

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.09.012

耦合 Schrödinger-KdV 方程的高阶保能量方法^①

陈宵玮, 孙建强, 王一帆

海南大学 信息科学技术学院, 海口 570228

摘要: 耦合 Schrödinger-KdV 方程具有能量守恒特性. 基于四阶平均向量场方法和傅里叶拟谱方法构造了耦合 Schrödinger-KdV 方程的高阶保能量格式, 并用新格式数值模拟孤立波的行为. 结果表明新的高阶格式能较好地模拟耦合 Schrödinger-KdV 方程孤立波的演化行为, 且精确地保持方程的离散能量守恒特性.

关键词: 耦合 Schrödinger-KdV 方程; 高阶平均向量场方法; 保能量方法

中图分类号: O241.8

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2018)09-0076-08

非线性现象在应用数学和物理中是一种常见的动力学行为, 可以通过很多耦合偏微分方程来描述, 如 KdV-mKdV 方程、KdV-ZK 方程、KdV-Burger 方程和耦合 Schrödinger-KdV 方程等^[1]. 耦合 Schrödinger-KdV 方程是描述振动的电场和低频密度场扰动相互作用的物理过程. 一般的耦合 Schrödinger-KdV 方程可表示为

$$\begin{cases} i\varepsilon E_t + \frac{3}{2}E_{xx} - \frac{1}{2}NE = 0 \\ N_t + \frac{N_{xxx}}{2} + \frac{1}{2}(N^2 + |E|^2)_x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

设初始条件为 $N(x, 0) = N_0(x)$, $E(x, 0) = E_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $\varepsilon > 0$ 为常数. 方程(1)具有如下能量守恒特性:

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left(3|E_x|^2 + |E|^2 N + \frac{N^3}{3} - \frac{1}{2}(N_x)^2 \right) dx = I(0)$$

其中 $I(0)$ 为常数.

在计算机模拟过程中, 设计尽可能保持微分方程能量守恒特性的数值格式对于精确地模拟微分方程的运动具有重要的意义^[2]. 保持微分方程结构特性的数值算法已成为计算数学的一个重要部分. 1984 年, 在北京举办的国际微分方程与微分几何会议上, 冯康院士作了题为“差分格式与辛几何”的报告, 首次系统地提出了保辛结构的辛几何算法^[3-5]. 后来 Bridges 和 Reich 等人在辛几何算法的基础上提出偏微分方程的多辛算法^[6-7]. 1999 年 Quispel 和 McLachlan 等人提出了二阶平均向量场方法, 广泛应用于偏微分方程的计算^[8-10], 最近 Celledoin 等又提出了在时间方向上具有高阶精度的高阶保能量格式^[11].

本文利用高阶平均向量场方法求解耦合 Schrödinger-KdV 方程. 首先介绍高阶平均向量场方法, 然后利用四阶平均向量场方法和傅里叶拟谱方法对耦合 Schrödinger-KdV 方程进行离散, 从而得到其方程的高阶保能量格式, 再对方程在不同初始条件下进行数值模拟, 得出结论.

① 收稿日期: 2017-10-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(11561018).

作者简介: 陈宵玮(1993-), 女, 硕士研究生, 主要从事微分方程数值解的研究.

通信作者: 孙建强, 教授.

1 耦合 Schrödinger-KdV 方程的保能量方法

1.1 高阶平均向量场方法

设 u 是关于 (x, t) 的函数, 方程(1) 可以转化成如下的无限维哈密尔顿系统

$$\frac{du}{dt} = \mathbf{D} \frac{\delta H[u]}{\delta u} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{D}$ 是一个斜伴随算子

$$H[u] = \int_{\Omega} H(x; u, u_x, u_{xx}, \dots) dx$$

$H[u]$ 的变分可以表示为

$$\frac{\delta H}{\delta u} = \frac{\partial H}{\partial u} - \partial_x \left(\frac{\partial H}{\partial u_x} \right) + \partial_x^2 \left(\frac{\partial H}{\partial u_{xx}} \right) - \dots$$

将方程(2) 在空间方向用拟谱方法或差分方法数值离散后可转化成有限维哈密尔顿系统

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = f(\mathbf{U}) = \overline{\mathbf{S}} \nabla \overline{\mathbf{H}}(\mathbf{U}) \quad (3)$$

其中: $\overline{\mathbf{S}}$ 是斜对称矩阵, $\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{U})$ 是哈密尔顿函数, $\mathbf{U} = [u_0, u_1, \dots, u_i, \dots, u_{N-1}]$, u_i 为 $u(x, t)$ 在点 x_i 的值. 将高阶平均向量场方法应用于(3) 式, 可得

$$\frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\tau} = (\delta_i^j + \alpha \tau^2 f_k^i(\hat{\mathbf{U}}) f_j^k(\hat{\mathbf{U}})) \cdot \int_0^1 f^j((1 - \xi)\mathbf{U}^n + \xi\mathbf{U}^{n+1}) d\xi \quad (4)$$

其中: $\mathbf{U}_i$ 表示向量 $\mathbf{U}$ 的第 i 个分量, $f_k^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^k}$, $f^i = \frac{du_i}{dt}$, δ_i^j 是克罗内克符号, α 为常数. 当 $\alpha = 0$ 时, (4)

式具有二阶精度; 当 $\alpha = -\frac{1}{12}$, $\hat{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n+1}}{2}$ 时, (4) 式具有四阶精度. 方程(4) 可写成矩阵向量的形式

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = \left(I + \alpha \tau^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}}(\hat{\mathbf{U}}) \right)^2 \right) \cdot \int_0^1 f((1 - \xi)\mathbf{U}^n + \xi\mathbf{U}^{n+1}) d\xi \quad (5)$$

将(3) 式中 $f(\mathbf{U})$ 代入(5) 式, 可得到

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = (I + \alpha \tau^2 \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{H}} \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{H}}) \overline{\mathbf{S}} \cdot \int_0^1 \nabla \overline{\mathbf{H}}((1 - \xi)\mathbf{U}^n + \xi\mathbf{U}^{n+1}) d\xi$$

在两边乘

$$\int_0^1 \nabla \overline{\mathbf{H}}((1 - \xi)\mathbf{U}^n + \xi\mathbf{U}^{n+1}) d\xi$$

再应用积分基本定理, 可得到

$$\frac{1}{\tau} \int_0^1 (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) \cdot \nabla \overline{\mathbf{H}}((1 - \xi)\mathbf{U}^n + \xi\mathbf{U}^{n+1}) d\xi = 0$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^1 \frac{d}{d\xi} \overline{\mathbf{H}}((1 - \xi)\mathbf{U}^n + \xi\mathbf{U}^{n+1}) d\xi = 0$$

从而有

$$\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{U}^{n+1}) = \overline{\mathbf{H}}(\mathbf{U}^n) \quad (6)$$

由(6) 式可知, 四阶平均向量场格式(5) 在时间层上能保持哈密尔顿系统(3) 的能量守恒.

1.2 耦合 Schrödinger-KdV 方程的高阶保能量格式

设 $E(x, t) = p(x, t) + q(x, t)i$, 耦合 Schrödinger-KdV 方程等价于

$$\begin{cases} \epsilon p_t = -\frac{3}{2}q_{xx} + \frac{1}{2}Nq \\ N_t = -\frac{1}{2}N_{xxx} - \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + N^2)_x \\ \epsilon q_t = \frac{3}{2}p_{xx} - \frac{1}{2}Np \end{cases} \quad (7)$$

方程(7) 可以表示成无限维哈密顿系统

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{J} \frac{\delta H(\mathbf{z})}{\delta \mathbf{z}}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4\epsilon} \\ 0 & -\frac{1}{2}\partial_x & 0 \\ -\frac{1}{4\epsilon} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中: $\mathbf{z} = (p, N, q)'$, ∂_x 为一阶偏导数, 相应的哈密顿函数为

$$H(\mathbf{z}) = \int_{\Omega} 3((p_x)^2 + (q_x)^2) + (p^2 + q^2)N + \frac{N^3}{3} - \frac{(N_x)^2}{2} dx$$

对无限维哈密顿系统(8) 在空间方向用拟谱方法进行离散.

令 $x_j (j=1, 2, \dots, N_1)$, $t_k (k=1, 2, \dots, N_2)$ 为 $[x_0, x_{N_1}] \times [t_0, t_{N_2}]$ 内正规网格点. 设 $\Omega = [a, b]$, $L = b - a$. 将 Ω 分为 N 等份, N 为偶数, $\tau = \frac{L}{N}$ 是空间步长, 则可以用 $x_j = a + \tau j$, $j=0, 1, \dots, N-1$ 表示空间网格点. 令 p_j, N_j, q_j 分别是 $p(x, t), N(x, t), q(x, t)$ 在 x_j 处的近似, 定义

$$S_N = \left\{ g_j(x) : -\frac{N}{2} \leq j \leq \frac{N}{2} - 1 \right\}$$

为插值空间, 其中 $g_j(x)$ 是满足 $g_j(x_i) = \delta_j^i$ 的正交三角多项式, $g_j(x)$ 可表示成

$$g_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{c_l} e^{il\mu(x-x_j)}$$

其中:

$$c_l = 1 \left(\left| l \right| \neq \frac{N}{2} \right) \quad c_{-\frac{N}{2}} = c_{\frac{N}{2}} = 2 \quad \mu = \frac{2\pi}{L}$$

对函数 $N(x, t) \in C^0(\Omega)$, 定义插值算子 I_N 为

$$I_N N(x, t) = \sum_{l=0}^{N-1} N_l g_l(x)$$

对于插值算子, 在配置点 x_j 满足

$$I_N N(x_j, t) = \sum_{l=0}^{N-1} N_l g_l(x_j) \quad j=0, 1, \dots, N-1$$

由计算可得

$$\frac{\partial}{\partial x} I_N N(x, t) \big|_{x=x_j} = \sum_{l=0}^{N-1} N_l \frac{dg_l(x_j)}{dx} = (\mathbf{D}_1 n)_j$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} I_N N(x, t) \big|_{x=x_j} = \sum_{l=0}^{N-1} N_l \frac{d^2 g_l(x_j)}{dx^2} = (\mathbf{D}_2 n)_j$$

同理可得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} I_N p(x, t) \big|_{x=x_j} = \sum_{l=0}^{N-1} p_l \frac{d^2 g_l(x_j)}{dx^2} = (\mathbf{D}_2 P)_j$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} I_N q(x, t) \big|_{x=x_j} = \sum_{l=0}^{N-1} q_l \frac{d^2 g_l(x_j)}{dx^2} = (\mathbf{D}_2 Q)_j$$

其中 $\mathbf{D}_1$ 和 $\mathbf{D}_2$ 分别是一阶谱矩阵和二阶谱矩阵, 对于三阶偏导算子 ∂_{xxx} 可用谱微分矩阵 $\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2$ 近似离散, 从而可得到方程(1) 的半离散拟谱格式

$$\epsilon \frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} N_j q_j - \frac{3}{2} (\mathbf{D}_2 \mathbf{Q})_i \quad (9)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = -\frac{1}{2} (\mathbf{A} \mathbf{n})_i - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} d_{i,j} (p_j^2 + q_j^2 + N_j^2) \quad (10)$$

$$\epsilon \frac{dq_i}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} N_j p_j + \frac{3}{2} (\mathbf{D}_2 \mathbf{P})_i \quad (11)$$

其中: $\mathbf{A} = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2$, $d_{i,j}$ 是矩阵 $\mathbf{D}_1$ 第 i 行第 j 列的元素. 方程(9)–(11) 可写成有限维哈密尔顿系统

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = f(\mathbf{Z}) = \bar{\mathbf{J}} \nabla H(\mathbf{Z})$$

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{I}}{4\epsilon} \\ \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{D}_1}{2} & \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{I}}{4\epsilon} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

其中: $\mathbf{Z} = [\mathbf{P}^T, \mathbf{n}^T, \mathbf{Q}^T]^T$, $\mathbf{I}$ 是 $N \times N$ 单位矩阵, 相应的哈密尔顿函数为

$$H(\mathbf{Z}) = \sum_{i=0}^{N-1} \left((p_i^2 + q_i^2) N_i + \frac{N_i^3}{3} \right) - 3(\mathbf{P}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{P} + \mathbf{Q}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{Q}) + \frac{1}{2} (\mathbf{n}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{n}) \quad (12)$$

用四阶平均向量场方法离散(12) 式, 有

$$\frac{\mathbf{Z}^{n+1} - \mathbf{Z}^n}{\tau} = \int_0^1 f((1-\xi)\mathbf{Z}^n + \xi\mathbf{Z}^{n+1}) d\xi - \frac{1}{12} \tau^2 \hat{\mathbf{J}}^2 \cdot \int_0^1 f((1-\xi)\mathbf{Z}^n + \xi\mathbf{Z}^{n+1}) d\xi \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{J}} \hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{4} \mathbf{G} & -\mathbf{K} + \frac{1}{4} \mathbf{F} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{B} & -\frac{1}{2} \mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbf{C} & -\frac{1}{2} \mathbf{D} \\ \mathbf{K} - \frac{1}{4} \mathbf{F} & -\frac{1}{4} \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \hat{\mathbf{H}}$ 分别为如下 $N \times N$ 阶对角矩阵

$$\begin{aligned} (\mathbf{E})_{i,j} &= \begin{cases} p_i^{n+1} + p_i^n & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\ (\mathbf{F})_{i,j} &= \begin{cases} N_i^{n+1} + N_i^n & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\ (\mathbf{G})_{i,j} &= \begin{cases} q_i^{n+1} + q_i^n & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\hat{\mathbf{H}})_{i,j} = \frac{\partial^2 H}{\partial Z_i \partial Z_j} \left(\frac{Z^{n+1} + Z^n}{2} \right) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{D}_1 \mathbf{E} \quad \mathbf{C} = \mathbf{D}_1 \mathbf{F} \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \mathbf{G} \quad \mathbf{K} = \frac{3\mathbf{D}_2}{2} \end{aligned}$$

故

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{D}} & \hat{\mathbf{K}} & \hat{\mathbf{I}} \\ \hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{C}} \\ \hat{\mathbf{F}} & \hat{\mathbf{E}} & \hat{\mathbf{G}} \end{pmatrix}$$

方程(13) 等价于

$$\begin{pmatrix} \epsilon \frac{\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{P}^n}{\tau} \\ \mathbf{n}^{n+1} - \mathbf{n}^n \\ \epsilon \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^3 \end{pmatrix} - \frac{\tau^2}{12} \mathbf{J}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^3 \end{pmatrix} \quad (14)$$

则(14)式可以写成

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\tau} &= F_i^1 - \frac{\tau^2}{12} \sum_{j=0}^{N-1} (\hat{d}_{i,j} F_j^1 + \hat{k}_{i,j} F_j^2 + \hat{l}_{i,j} F_j^3) \\ \frac{N_i^{n+1} - N_i^n}{\tau} &= F_i^2 - \frac{\tau^2}{12} \sum_{j=0}^{N-1} (\hat{b}_{i,j} F_j^1 + \hat{a}_{i,j} F_j^2 + \hat{c}_{i,j} F_j^3) \\ \epsilon \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} &= F_i^3 - \frac{\tau^2}{12} \sum_{j=0}^{N-1} (\hat{f}_{i,j} F_j^1 + \hat{e}_{i,j} F_j^2 + \hat{g}_{i,j} F_j^3) \end{aligned}$$

其中: $i=1,2,\dots,N-1$; $\hat{d}_{i,j}, \hat{k}_{i,j}, \hat{l}_{i,j}, \hat{b}_{i,j}, \hat{a}_{i,j}, \hat{c}_{i,j}, \hat{f}_{i,j}, \hat{e}_{i,j}, \hat{g}_{i,j}$ 分别表示矩阵 $\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{G}}$ 的第 i 行第 j 列元素.

$$\begin{aligned} F_i^1 &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{q_j^{n+1} N_j^{n+1} + q_j^n N_j^n + \frac{q_j^{n+1} N_j^n + q_j^n N_j^{n+1}}{2}}{6} - \left(\mathbf{D}_2 \frac{3(\mathbf{Q}^{n+1} + \mathbf{Q}^n)}{4} \right)_i \\ F_i^2 &= - \sum_{j=0}^{N-1} d_{i,j} \left(\frac{(N_j^{n+1})^2 + N_j^{n+1} N_j^n + (N_j^n)^2}{6} + (p_j^{n+1})^2 + p_j^{n+1} p_j^n + (p_j^n)^2 + (q_j^{n+1})^2 + q_j^{n+1} q_j^n + (q_j^n)^2 \right) - \\ &\quad \left(\mathbf{A} \frac{\mathbf{n}^{n+1} + \mathbf{n}^n}{4} \right)_i \\ F_i^3 &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_j^{n+1} N_j^{n+1} + p_j^n N_j^n + \frac{p_j^{n+1} N_j^n + p_j^n N_j^{n+1}}{2}}{6} + \left(\mathbf{D}_2 \frac{3(\mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{P}^n)}{4} \right)_i \end{aligned}$$

2 数值模拟

为了验证格式保能量守恒特性, 定义能量误差

$$RE(t) = |H(Z^n) - H(Z^0)|$$

其中

$$\begin{aligned} H(\mathbf{Z}^n) &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(((p_i^n)^2 + (q_i^n)^2) N_i^n + \frac{(N_i^n)^3}{3} \right) - \\ &\quad 3((\mathbf{P}^n)^\top \mathbf{D}_2 \mathbf{P}^n + (\mathbf{Q}^n)^\top \mathbf{D}_2 \mathbf{Q}^n) + \frac{1}{2} (\mathbf{n}^n)^\top \mathbf{D}_2 \mathbf{n}^n \end{aligned}$$

定义数值解与精确解的最大模误差为

$$L^\infty(\tau) = \max_{1 \leq j \leq N} |u_j^n - u(x_j, t_n)|$$

收敛速度为

$$ratio = \frac{\ln \left(\frac{L^\infty(\tau_1)}{L^\infty(\tau_2)} \right)}{\ln \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right)}$$

方程(1)具有精确解

$$E(x, t) = -\frac{6}{5} \sqrt{3} \alpha \operatorname{sech}(\xi) \tanh(\xi) \times \exp \left(i \alpha \left(\frac{3}{20\epsilon} - \frac{\epsilon \alpha}{6} \right) t - \frac{\epsilon x}{3} \right)$$

$$N(x,t)=-\frac{9}{5}\alpha \operatorname{sech}^2(\xi)$$

2.1 数值模拟 1

取 $-150 < x < 150, \epsilon = 1, \alpha = 0.45, \xi = \left(\frac{\alpha}{10}\right)^{\frac{1}{2}}x$. 文献[1] 对二阶保能量格式的 L_∞ 误差做了分析. 参照文献[1], 表 1 表示方程(1) 中 N 在 $t=3$ 时的二阶和高阶保能量格式的 L_∞ 误差和收敛阶, 从表 1 可以看出高阶保能量格式的精度明显高于二阶保能量格式的精度, 并在时间方向上具有四阶精度.

表 1 二阶和高阶保能量格式的 L_∞ 误差和收敛阶比较

$t=3$	2-order scheme	ratio	4-order scheme	ratio
$\tau=0.06$	$4.038\ 2\times 10^{-6}$	—	$5.390\ 3\times 10^{-10}$	—
$\tau=0.05$	$2.804\ 4\times 10^{-6}$	1.999\ 8	$2.646\ 9\times 10^{-10}$	3.900\ 9
$\tau=0.04$	$1.794\ 8\times 10^{-6}$	2.000\ 0	$1.083\ 5\times 10^{-10}$	4.002\ 8
$\tau=0.03$	$1.009\ 6\times 10^{-6}$	1.999\ 9	$3.442\ 6\times 10^{-11}$	3.985\ 5

设方程(1)初始条件为

$$E_0(x)=-\frac{6}{5}\sqrt{3}\alpha \operatorname{sech}(\xi)\tanh(\xi)\exp\left(ia\left(-\frac{\epsilon x}{3}\right)\right)$$
$$N_0(x)=-\frac{9}{5}\alpha \operatorname{sech}^2(\xi)$$

取 x 周期边界条件 $E(-30,t)=E(30,t), N=400, L=60, \tau=0.005, dx=0.5$. 图 1 和图 2 分别表示在 $t\in[0,2]$ 内解的演化行为, 图 3 表示方程(1)的能量误差随时间的变化, 能量误差可忽略不计. 高阶保能量方法能够有效地模拟方程孤立波的行为, 并保持方程的能量守恒.

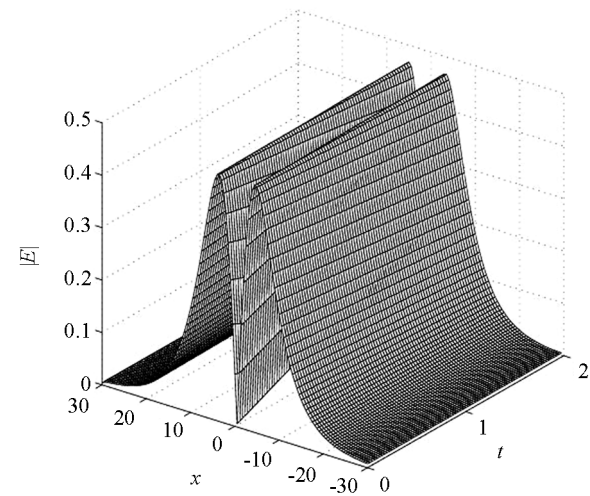


图 1 $|E|$ 在 $t\in[0,2]$ 内的数值解

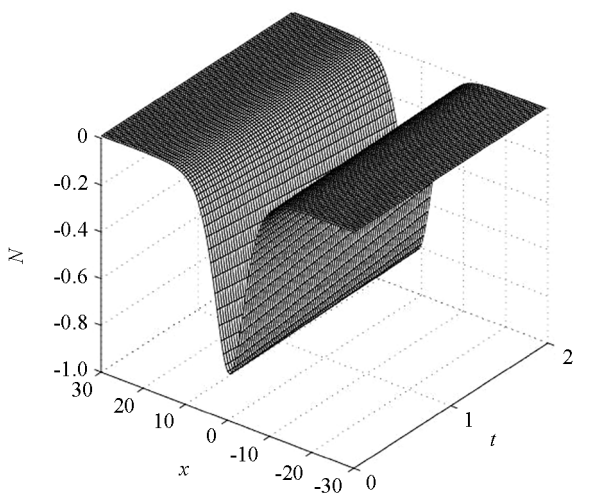


图 2 N 在 $t\in[0,2]$ 内的数值解

2.2 数值模拟 2

设方程(1)的初始条件为

$$E_0(x)=e^{i\theta}(-\sqrt{2}(2c_2\pm\delta)+6\sqrt{2}c_2\operatorname{sech}^2(\sqrt{c_2}\xi))$$
$$N_0(x)=-\frac{1}{3}(\gamma+6c_2\pm\delta)+6c_2\operatorname{sech}^2(\sqrt{c_2}\xi)$$

其中: $\xi=x, \theta=\gamma x, \delta=\sqrt{\sqrt{2}c_1c_3+4c_2^2}, c_1=c_3=0, c_2=0.01, \gamma=0.1, x$ 周期边界条件 $E(-30,t)=E(30,t)$, 取 $N=100, L=60, \tau=0.01, dx=0.25$. 图 4 和图 5 表示在 $t\in[0,3]$ 内解的演化行为, 图 6

表示能量误差随时间的变化过程, 能量误差可忽略不计. 同样可知, 高阶保能量方法能够有效地模拟方程孤立波的演化行为, 并保持方程的离散能量守恒.

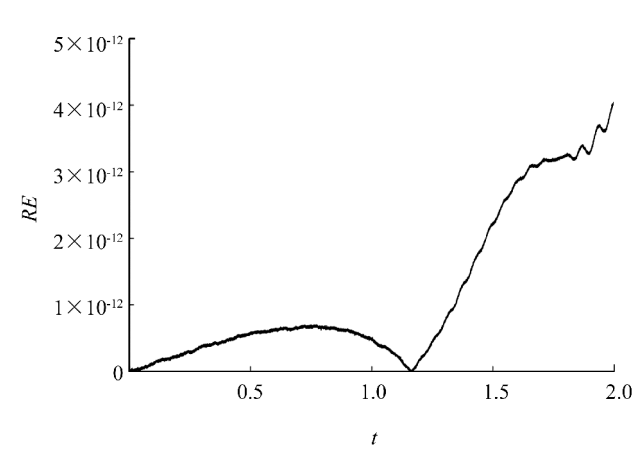


图 3 数值解在 $t \in [0, 2]$ 内能量误差变化

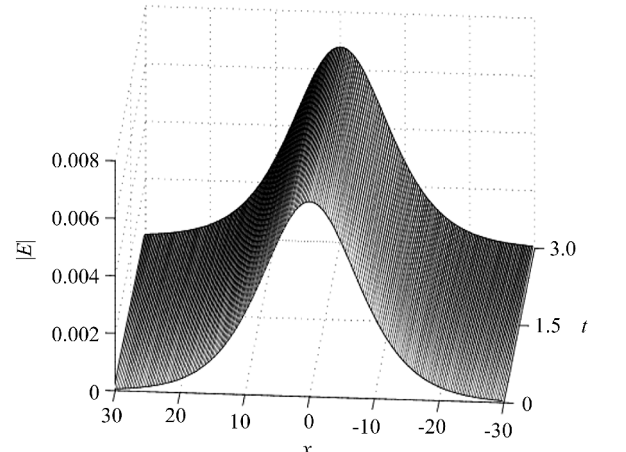


图 4 $|E|$ 在 $t \in [0, 3]$ 的数值解

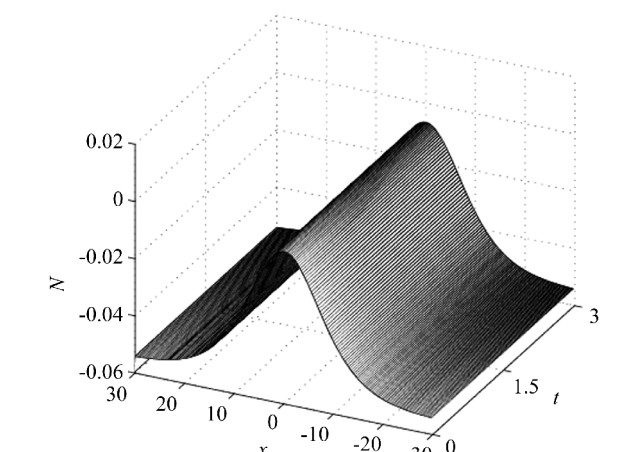


图 5 N 在 $t \in [0, 3]$ 内的数值解

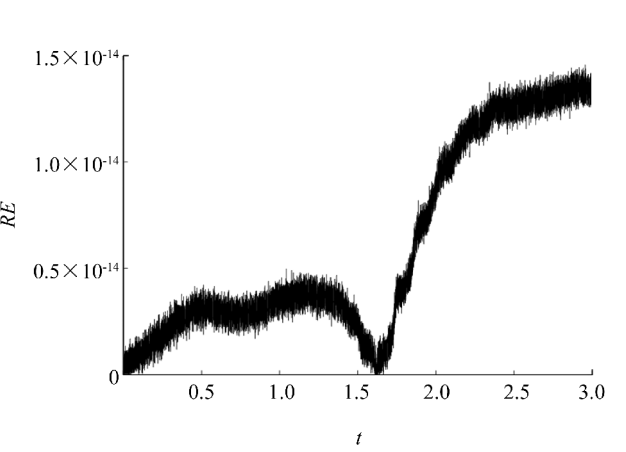


图 6 数值解在 $t \in [0, 3]$ 内能量误差变化

3 小 结

本文用四阶平均向量场方法和傅里叶拟谱方法构造出耦合 Schrödinger-KdV 方程的高阶保能量格式, 再通过在不同初值条件下数值模拟方程孤立波的行为并分析格式的保能量守恒特性得到新的高阶保能量格式. 新格式能很好地模拟耦合 Schrödinger-KdV 方程孤立波的演化行为, 并且可以精确地保持方程的离散能量特性, 高阶平均向量场方法在数值模拟能量守恒特性的偏微分方程中具有显著的优势.

参考文献:

[1] ZHANG H, SONG S H, CHEN X D, et al. Average Vector Field Methods for the Coupled Schrödinger-KdV Equations [J]. Chinese Physics B, 2014, 23(7): 242–250.

[2] SUN J Q, GU X Y, MA Z Q. Numerical Study of the Soliton Waves of the Coupled Nonlinear Schrödinger System [J]. Physical D: Nonlinear Phenomena, 2004, 196(3/4): 311–328.

[3] 冯 康, 秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何法 [M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2003.

[4] QIN M Z, ZHU W J. Construction of High Order Symplectic Schemes by Composition [J]. Computing, 1992, 47(3–4): 309–321.

[5] WANG Y S, WANG B, QIN M Z. Local Structure-Preserving Algorithms for Partial Differential Equations [J]. Science

- in China series A: Mathematics, 2008, 51(11): 2115—2136.
- [6] CELLEDONI E, MCLACHLAN R I, OWEREN B, et al. On Conjugate B-Series and Their Geometric Structure [J]. Journal of Numerical Analysis Industrial and Applied Mathematics, 2010, 5(1—2): 85—94.
- [7] CHEN J B, QIN M Z, TANG Y F. Symplectic and Multi-Symplectic Methods for the Nonlinear Schrödinger Equation [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2002, 43(8—9): 1095—1106.
- [8] CHARTIER P, FAOU E, MURUA A. An Algebraic Approach to Invariant Preserving Integrators: The Case of Quadratic and Hamiltonian Invariants [J]. Numerische Mathematik, 2006, 103(4): 575—590.
- [9] QUISPE G R W, MCLAREN D I. A New Class of Energy-Preserving Numerical Integration Methods [J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2008, 41(4): 045206.
- [10] MCLACHLAN R I, QUISPEL G R W, ROBIDOUX N. Geometric Integration Using Discrete Gradients [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Science, 1999, 357(1754): 1021—1045.
- [11] CELLEDOIN E, MCLACHLAN R I, OWREN B, et al. Energy-Preserving Integrators and the Structure of B-Series [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2010, 10(6): 673—693.

A High-Order Energy Preserving Method for the Coupled Schrödinger-KdV Equation

CHEN Xiao-wei, SUN Jian-qiang, WANG Yi-fan

College of Information Science and Technology, Hainan University, Haikou 570228, China

Abstract: The coupled Schrödinger-KdV equation has the energy conservation property. A high-order energy preserving scheme of the coupled Schrödinger-KdV equation is obtained with the fourth-order average vector field method and the Fourier pseudo-spectrum method, and the behavior of the solitary wave is simulated with the new format. Numerical results show that the new scheme can well simulate the evolution of the behaviors of the coupled equation and exactly preserve the discrete energy conservation property of the equation.

Key words: coupled Schrödinger-KdV equation; high-order average vector field method; energy-preserving method

责任编辑 张 桢