第 40 卷第 9 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2018 年 9 月
Vol. 40 No. 9　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Sep. 2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.09.013

非定常不可压 Navier-Stokes 方程基于欧拉格式的两水平变分多尺度方法[①]

薛菊峰，　尚月强

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：主要研究了基于两个高斯积分的两水平全离散有限元变分多尺度方法. 该方法对每个时间步长首先在粗网格上求解稳定的非线性 Navier-Stokes 系统，然后在细网格上求解稳定的线性问题去校正粗网格上的解. 基于向后欧拉格式的时间离散推导的速度的误差估计关于时间是一阶收敛的. 数值实验验证了理论的正确性和方法的有效性.

关 键 词：Navier-Stokes 方程；两水平法；向后欧拉格式；误差估计

中图分类号：O241.82　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2018)09－0084－07

Navier-Stokes 方程为描述不可压缩的牛顿黏性流提供了一种数学模型，而且广泛用于天气、海流等生活实际方面. 最近几十年，许多作者研究了解 Navier-Stokes 方程的有限元方法，如：文献[1]给出了有限元 Galerkin 方法，但是有限元 Galerkin 方法对大雷诺数的流体不再适用；为了研究大雷诺数的流体，文献[2]介绍了人工粘性法；文献[3]得到了 defect-correct 方法；文献[4]得到了亚格子稳定方法；文献[5]得到了变分多尺度方法；文献[6]得到了差分方法. 文献[5]中的基于高斯积分的变分多尺度方法虽然适用于大雷诺数流体，但是需要花费大量的计算时间. 本文在文献[5]的向后欧拉格式基础上给出 Navier-Stokes 方程的两水平变分多尺度方法并推导了速度的误差估计. 在解精确度几乎一样的前提下，我们的方法相比文献[5]格式 1 的方法不仅适用于大雷诺数流体而且可以节约大约一半的计算时间.

1　预备知识

定义 1　设 Ω 是在 $\mathbb{R}^2$ 上具有利普希茨连续边界的有界区域，那么有下面的 Navier-Stokes 方程：

$$\boldsymbol{u}_t - \nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f},\ \text{in } \Omega\times(0,T] \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0,\ \text{in } \Omega\times(0,T] \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = 0,\ \text{on}\,\partial\Omega\times(0,T] \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}\,|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0,\ \text{in } \Omega \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{u}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^2$ 表示速度矢量，$\boldsymbol{p}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 是压力，$\boldsymbol{f}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^2$ 是流体驱动的体积力，$\nu>0$ 为流体粘性系数，$\boldsymbol{u}_0$ 是使得 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0=0$ 的初始速度，并且 $\boldsymbol{u}_t=\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}$.

定义 2　对于定义 1 的数学问题，我们引进下面的希尔伯特空间：

---

① 收稿日期：2017－05－31
基金项目：国家自然科学基金项目(11361016).
作者简介：薛菊峰(1991－)，女，硕士研究生，主要从事偏微分方程数值解.
通信作者：尚月强，教授，博士研究生导师.

$$X = H_0^1(\Omega)^2,\ Y = L^2(\Omega)^2,\ M = L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega): \int_\Omega q\,\mathrm{d}x = 0\}$$

其中：$(\cdot, \cdot)$ 表示空间 $L^2(\Omega)^2$ 或 $L^2(\Omega)$ 的标准内积，$(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v})$ 和 $\|\nabla \boldsymbol{u}\|_0$ 为空间 X 上的一般标量积和范数. 用字母 c 表示一个与时间步长和网格参数无关的正数而且可能在每个式子中代表的数值都不相同.

定义 3[5]　三线性项 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ 的定义为

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = ((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \frac{1}{2}((\nabla \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) =$$

$$\frac{1}{2}((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - \frac{1}{2}((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}),\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in X$$

它有如下的性质：

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}),\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in X \tag{5}$$

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant c\|\nabla \boldsymbol{u}\|_0 \|\nabla \boldsymbol{v}\|_0 \|\nabla \boldsymbol{w}\|_0,\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in X \tag{6}$$

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant c\|\nabla \boldsymbol{u}\|_0 \|\nabla \boldsymbol{v}\|_0 \|\boldsymbol{w}\|_0^{\frac{1}{2}} \|\nabla \boldsymbol{w}\|_0^{\frac{1}{2}},\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in X \tag{7}$$

定义 4　方程(1)-(4)的变分形式为：对于任意的 $t \in (0, T]$，存在 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \in X \times M$，使得

$$(\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{v}) + \nu(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}) + (\nabla \cdot \boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}),\ \forall (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{q}) \in X \times M \tag{8}$$

定义 5[7]　对于方程(8)的有限元离散，我们假设 $T^\mu(\Omega) = \{K\}(\mu = H, h, H > h)$ 是准均匀的三角形网格剖分并且网格尺寸 $0 < \mu < 1$. 细网格 $T^h(\Omega)$ 可以被认为是由粗网格加密而产生的. 协调有限元 (X_μ, M_μ) 满足下面的 inf-sup 条件：存在常数 $\beta > 0$ 使得

$$\inf_{\boldsymbol{q}_\mu \in M_\mu} \sup_{\boldsymbol{v}_\mu \in X_\mu} \frac{(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_\mu, \boldsymbol{q}_\mu)}{\|\nabla \boldsymbol{v}_\mu\|_0 \|\boldsymbol{q}_\mu\|_0} \geqslant \beta > 0 \tag{9}$$

定义 6[8-11]　设速度空间 X_μ 满足 $\forall K \in T^\mu(\Omega)$，$\boldsymbol{v}_\mu \in X_\mu$，$(\nabla \boldsymbol{v}_\mu)|_K$ 是线性的，那么在本文中提到的方法仅适用于速度限制在 $(P_2)^2$ 上的有限元对. 如：Taylor-Hood 元，$P_2 - P_0$ 元和 Scott-Vogelius($P_2 - P_1^{\mathrm{disc}}$) 元等.

定义 7[12]　我们定义 $V = \{\boldsymbol{v} \in X: (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{q}) = 0,\ \forall \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{M}\}$，$V_\mu = \{\boldsymbol{v}_\mu \in X_\mu: (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_\mu, \boldsymbol{q}_\mu) = 0,\ \forall \boldsymbol{q}_\mu \in M_\mu\}$，则有如下的估计：

$$\inf_{\boldsymbol{v}_\mu \in V_\mu} \|\nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\mu)\|_0 \leqslant C\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \inf_{\boldsymbol{v}_\mu \in X_\mu} \|\nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\mu)\|_0,\ \forall \boldsymbol{v} \in V \tag{10}$$

定义 8[12]　设 $P_{V_\mu}: Y \longrightarrow V_\mu$ 是 L^2 到 V_μ 上的正交投影，则满足 $(\boldsymbol{\xi} - P_{V_\mu}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v}_\mu) = 0$，$\forall \boldsymbol{\xi} \in Y$，$\boldsymbol{v}_\mu \in V_\mu$.

引理 1[13]　离散 Gronwall 引理：对于任意整数 $n \geqslant 0$，令 $\Delta t, H$ 和 a_n, b_n, c_n, d_n 是非负数，满足

$$a_l + \Delta t \sum_{n=0}^{l} b_n \leqslant \Delta t \sum_{n=0}^{l} d_n a_n + \Delta t \sum_{n=0}^{l} c_n + H,\ l \geqslant 0$$

和 $\Delta t d_n < 1\ \forall n$. 有

$$a_l + \Delta t \sum_{n=0}^{l} b_n \leqslant \exp\left(\Delta t \sum_{n=0}^{l} \frac{d_n}{1 - \Delta t\ d_n}\right)\left(\Delta t \sum_{n=0}^{l} c_n + H\right),\ l \geqslant 0$$

2　向后欧拉格式的有限元变分多尺度方法

定义 9[5]　设数值格式中出现的变分多尺度稳定项为

$$G(\boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu) = \alpha \sum_{K \in T^\mu(\Omega)} \left(\int_{K,m} \nabla \boldsymbol{u}_\mu \cdot \nabla \boldsymbol{v}_\mu \mathrm{d}x - \int_{K,1} \nabla \boldsymbol{u}_\mu \cdot \nabla \boldsymbol{v}_\mu \mathrm{d}x\right),\ \forall \boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu \in X_\mu \tag{11}$$

这里 $\int_{K,s}(\cdot)\mathrm{d}x$ 表示 K 上适当的高斯积分，该积分对于次数不超过 $s(s = m, 1, m \geqslant 2)$ 的多项式是准确的. $\alpha > 0$ 是一个自定义的稳定项参数.

定义

$$R_0 = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega): \boldsymbol{v}|_K \in P_0,\ \forall K \in T^\mu(\Omega)\},\ L_\mu = R_0^{2\times 2},\ L = L^2(\Omega)^{2\times 2}$$

其中 P_0 是常量元素 K 的空间. 那么标准的 L^2 -正交投影 $\Pi_\mu: L \longrightarrow L_\mu$ 有下面的性质：

$$(\Pi_\mu \nabla \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\nabla \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),\ \forall \boldsymbol{u} \in X, \boldsymbol{v} \in L_\mu \tag{12}$$

$$\| \Pi_\mu \nabla \boldsymbol{v} \|_0 \leqslant c \| \nabla \boldsymbol{v} \|_0,\ \forall \boldsymbol{v} \in X \tag{13}$$

注 1　稳定项(11) 还可以表示为：

$$G(\boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu) = \alpha(\nabla \boldsymbol{u}_\mu, \nabla \boldsymbol{v}_\mu) - \alpha(\Pi_\mu \nabla \boldsymbol{u}_\mu, \nabla \boldsymbol{v}_\mu) = \alpha((I - \Pi_\mu)\nabla \boldsymbol{u}_\mu, (I - \Pi_\mu)\nabla \boldsymbol{v}_\mu) \tag{14}$$

根据定义 9，我们给出 Navier-Stokes 方程的标准的有限元变分多尺度方法.

方法 1　标准的有限元变分多尺度方法[5].

给定 $\boldsymbol{u}_\mu^0$，存在 $(\boldsymbol{u}_\mu^{n+1}, \boldsymbol{p}_\mu^{n+1})_{n \geqslant 0} \in (X_\mu, M_\mu)$ 使得：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{u}_\mu^{n+1} - \boldsymbol{u}_\mu^n, \boldsymbol{v}_\mu) + \nu(\nabla \boldsymbol{u}_\mu^{n+1}, \nabla \boldsymbol{v}_\mu) + b(\boldsymbol{u}_\mu^{n+1}, \boldsymbol{u}_\mu^{n+1}, \boldsymbol{v}_\mu) - (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_\mu, \boldsymbol{p}_\mu^{n+1}) + \\ &(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_\mu^{n+1}, \boldsymbol{q}_\mu) + G(\boldsymbol{u}_\mu^{n+1}, \boldsymbol{v}_\mu) = (\boldsymbol{f}^{n+1}, \boldsymbol{v}_\mu),\ \forall (\boldsymbol{v}_\mu, \boldsymbol{q}_\mu) \in X_\mu \times M_\mu\end{aligned} \tag{15}$$

令时间步长的尺寸 Δt 满足 $0 < \Delta t < 1$，$t_n = n\Delta t$，$n = 0,1,\cdots,N-1$，和 $N = \dfrac{T}{\Delta t}$. φ^1 表示函数 φ 在时间 t_1 时的值，并且 $\varphi^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(\varphi^1 + \varphi^0)$. 初始速度 $\boldsymbol{u}_\mu^0 = P_{V_\mu} \boldsymbol{u}_0$.

引理 2[5]　令 $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)$ 和 $\boldsymbol{u}_0 \in L^2(\Omega)^2$. 则格式(15) 的解是稳定的且满足任意的 $0 < l \leqslant N$

$$\| \boldsymbol{u}_\mu^l \|_0^2 + \sum_{n=0}^{l-1} \| \boldsymbol{u}_\mu^{n+1} - \boldsymbol{u}_\mu^n \|_0^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{l-1} \nu \| \nabla \boldsymbol{u}_\mu^{n+1} \|_0^2 \leqslant \nu^{-1} \| \boldsymbol{f} \|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)}^2 + \| \boldsymbol{u}_0 \|_0^2 \tag{16}$$

$$\Delta t \sum_{n=0}^{l-1} \| \boldsymbol{p}_\mu^{n+1} \|_0 \leqslant C(\nu, \alpha, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{f}, T, \Omega) \tag{17}$$

引理 3[5]　Navier-Stokes 方程的精确解 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$ 满足 $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2)$，$\boldsymbol{u}_{tt} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2)$，和 $\boldsymbol{u}_{ttt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$. 那么由格式(15) 计算的全离散解有如下估计：

$$\begin{aligned}&\| \boldsymbol{u}(T) - \boldsymbol{u}_\mu^N \|_0^2 + \nu\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \| \nabla(\boldsymbol{u}(t_{n+1}) - \boldsymbol{u}_\mu^{n+1}) \|_0^2 \leqslant c(\alpha^2 + \Delta t^2) + \inf_{\boldsymbol{w}_\mu \in X_\mu} \| \boldsymbol{u}(T) - \boldsymbol{w}_\mu \|_0^2 + \\ &C\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \Big(\inf_{\boldsymbol{w}_\mu \in X_\mu} \| \nabla(\boldsymbol{u}(t_{n+1}) - \boldsymbol{w}_\mu) \|_0^2 + \inf_{\boldsymbol{\lambda}_\mu \in M_\mu} \| \boldsymbol{p}(t_{n+1}) - \boldsymbol{\lambda}_\mu \|_0^2 \Big)\end{aligned} \tag{18}$$

两水平有限元变分多尺度方法如下：

方法 2　两水平有限元变分多尺度方法.

给定 $\boldsymbol{u}_H{}^0, \boldsymbol{u}_h^0$，存在 $(\boldsymbol{u}_h{}^1, \boldsymbol{p}_h{}^1)_{n \geqslant 0} \in X_h \times M_h$.

1）寻找粗网格上的一个解 $(\boldsymbol{u}_H{}^1, \boldsymbol{p}_H{}^1)_{n \geqslant 0} \in (X_H, M_H)$ 使得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{u}_H^{n+1} - \boldsymbol{u}_H^n, \boldsymbol{v}_H) + \nu(\nabla \boldsymbol{u}_H^{n+1}, \nabla \boldsymbol{v}_H) + b(\boldsymbol{u}_H^{n+1}, \boldsymbol{u}_H^{n+1}, \boldsymbol{v}_H) - (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_H, \boldsymbol{p}_H^{n+1}) + \\ &(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_H{}^1, \boldsymbol{q}_H) + G(\boldsymbol{u}_H^{n+1}, \boldsymbol{v}_H) = (\boldsymbol{f}^{n+1}, \boldsymbol{v}_H),\ \forall (\boldsymbol{v}_H, \boldsymbol{q}_H) \in X_H \times M_H\end{aligned} \tag{19}$$

2）寻找细网格上的一个解 $(\boldsymbol{u}_h{}^1, \boldsymbol{p}_h{}^1)_{n \geqslant 0} \in (X_h, M_h)$ 使得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{u}_h^{n+1} - \boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h) + \nu(\nabla \boldsymbol{u}_h^{n+1}, \nabla \boldsymbol{v}_h) + b(\boldsymbol{u}_H^{n+1}, \boldsymbol{u}_h{}^{n+1}, \boldsymbol{v}_h) - (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{p}_h^{n+1}) + \\ &(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{q}_h) + G^*(\boldsymbol{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{f}^{n+1}, \boldsymbol{v}_h),\ \forall (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h) \in X_h \times M_h\end{aligned} \tag{20}$$

注 2

$$G^*(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = \alpha \sum_{K \in T^h(\Omega)} \left(\int_{K, m} \nabla \boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{v}_h \mathrm{d}x - \int_{K, 1} \nabla \boldsymbol{u}_H \cdot \nabla \boldsymbol{v}_h \mathrm{d}x \right),\ \forall \boldsymbol{v}_h \in X_h$$

3　主要结果

定理 1　Navier-Stokes 方程的精确解 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$ 满足 $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^2)$，$\boldsymbol{u}_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$，那么由式(19)－(20) 得到的全离散解有下面的估计式：

$$\| \boldsymbol{u}(T)-\boldsymbol{u}_h{}^N \|_0^2+\nu\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\| \nabla(\boldsymbol{u}(t_{n+1})-\boldsymbol{u}_h{}^{n+1})\|_0^2\leqslant$$

$$\inf_{\boldsymbol{w}_h\in X_h}\| \boldsymbol{u}(T)-\boldsymbol{w}_h\|_0^2+c\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\| \nabla(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}_H^{n+1})\|_0^2+$$

$$c\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}(\inf_{\boldsymbol{w}_h\in X_h}\| \nabla(\boldsymbol{u}(t_{n+1})-\boldsymbol{w}_h)\|_0^2+\inf_{\boldsymbol{\lambda}_h\in M_h}\| \boldsymbol{p}(t_{n+1})-\boldsymbol{\lambda}_h\|_0^2)+c(\alpha^2+\Delta t^2) \tag{21}$$

证 令$(\boldsymbol{u}(t_{n+1}),\ \boldsymbol{p}(t_{n+1}))=(\boldsymbol{u}^{n+1},\ \boldsymbol{p}^{n+1})$,$(\boldsymbol{e}^{n+1},\ \boldsymbol{\eta}^{n+1})=(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}_h{}^{n+1},\ \boldsymbol{p}^{n+1}-\boldsymbol{p}_h{}^{n+1})$,$n=1,2,\cdots,N-1$. 当时间 $t=t_{n+1}$ 时,式(8) 减去式(20) 得:$\forall(\boldsymbol{v}_h,\ \boldsymbol{q}_h)\in(X_h,\ M_h)$

$$\frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{e}^{n+1}-\boldsymbol{e}^n,\ \boldsymbol{v}_h)+(\nu+\alpha)(\nabla\boldsymbol{e}^{n+1},\ \nabla\boldsymbol{v}_h)+b(\boldsymbol{u}^{n+1},\ \boldsymbol{e}^{n+1},\ \boldsymbol{v}_h)-$$

$$b(u^{n+1}-\boldsymbol{u}_H^{n+1},\ \boldsymbol{e}^{n+1},\ \boldsymbol{v}_h)+b(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}_H^{n+1},\ \boldsymbol{u}^{n+1},\ \boldsymbol{v}_h)-(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h,\ \boldsymbol{\eta}^{n+1})=$$

$$\alpha(\nabla\boldsymbol{u}^{n+1},\ \nabla\boldsymbol{v}_h)-\alpha(\boldsymbol{\Pi}_h\nabla\boldsymbol{u}_H^{n+1},\ \nabla\boldsymbol{v}_h)-(\boldsymbol{u}_t(t_{n+1})-\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t},\ \boldsymbol{v}_h) \tag{22}$$

由于

$$V_h\subset X_h$$

所以

$$\boldsymbol{v}_h\in V_h\subset X_h$$

从而令

$$\boldsymbol{e}^{n+1}=\boldsymbol{\chi}^{n+1}-\boldsymbol{\varphi}_h{}^{n+1}$$

且

$$\boldsymbol{\chi}^{n+1}=\boldsymbol{u}^{n+1}-P_{v_h}\boldsymbol{u}^{n+1},\ \boldsymbol{\varphi}_h{}^{n+1}=\boldsymbol{u}_h{}^{n+1}-P_{v_h}\boldsymbol{u}^{n+1}$$

将 $\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{\varphi}_h{}^{n+1}$ 代入式(22) 利用式(5) 和 $2(a-b,\ a)=a^2-b^2+(a-b)^2$ 得:

$$\frac{1}{2\Delta t}(\| \varphi_h{}^{n+1}\|_0^2-\| \varphi_h^n\|_0^2+\| \varphi_h^{n-1}-\varphi_h^n\|_0^2)+(\nu+\alpha)\| \nabla\varphi_h{}^{n+1}\|_0^2=$$

$$\left(\frac{\chi^{n+1}-\chi^n}{\Delta t},\ \varphi_h{}^{n+1}\right)+(\nu+\alpha)(\nabla\chi^{n+1},\ \nabla\varphi_h{}^{n+1})+b(\boldsymbol{u}^{n+1},\ \boldsymbol{\chi}^{n+1},\ \varphi_h{}^{n+1})-b(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}_H^{n+1},\ \chi^{n+1},\ \varphi_h{}^{n+1})+$$

$$b(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}_H^{n+1},\ \boldsymbol{u}^{n+1},\ \varphi_h{}^{n+1})-(\nabla\cdot\varphi_h{}^{n+1},\ \boldsymbol{p}^{n+1}-\lambda_h)+(\nabla\cdot\varphi_h{}^{n+1},\ \boldsymbol{p}_h{}^{n+1}-\lambda_h)-\alpha(\nabla\boldsymbol{u}^{n+1},\ \nabla\varphi_h{}^{n+1})+$$

$$\alpha(\Pi_h\nabla\boldsymbol{u}_H^{n+1},\ \nabla\varphi_h{}^{n+1})+\left(\boldsymbol{u}_t(t_{n+1})-\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t},\ \varphi_h{}^{n+1}\right) \tag{23}$$

其中:$\lambda_h\in M_h$ 是 $\boldsymbol{p}^{n+1}$ 的近似值.

根据定义 7 中 V_h 的定义,有

$$(\nabla\cdot\varphi_h{}^{n+1},\ \boldsymbol{p}_h{}^{n+1}-\lambda_h)=0$$

由于 $\chi^{n+1}-\chi^n\perp V_h$ 且 $\varphi_h{}^{n+1}\in V_h$,利用投影算子我们有

$$\frac{1}{\Delta t}(\chi^{n+1}-\chi^n,\ \varphi_h{}^{n+1})=0$$

所以由式(23) 可得:

$$\frac{1}{2\Delta t}(\| \varphi_h{}^{n+1}\|_0^2-\| \varphi_h^n\|_0^2+\| \varphi_h^n-\varphi_h^{n-1}\|_0^2)+(\nu+\alpha)\| \nabla\varphi_h{}^{n+1}\|_0^2=$$

$$(\nu+\alpha)(\nabla\chi^{n+1},\ \nabla\varphi_h{}^{n+1})+b(\boldsymbol{u}^{n+1},\ \chi^{n+1},\ \varphi_h{}^{n+1})-b(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}_H^{n+1},\ \chi^{n+1},\ \varphi_h{}^{n+1})+$$

$$b(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}_H^{n+1},\ \boldsymbol{u}^{n+1},\ \varphi_h{}^{n+1})-(\nabla\cdot\varphi_h{}^{n+1},\ \boldsymbol{p}^{n+1}-\lambda_h)-\alpha(\nabla\boldsymbol{u}^{n+1},\ \nabla\varphi_h{}^{n+1})+$$

$$\alpha(\Pi_h\nabla\boldsymbol{u}_H^{n+1},\ \nabla\varphi_h{}^{n+1})+\left(\boldsymbol{u}_t(t_{n+1})-\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\Delta t},\ \varphi_h{}^{n+1}\right) \tag{24}$$

现在利用施瓦兹不等式,Young 不等式和式(13) 对式(24) 的右边进行估计:

$$\nu(\nabla\chi^{n+1},\ \nabla\varphi_h{}^{n+1})\leqslant\frac{7}{2}\nu\| \nabla\chi^{n+1}\|_0^2+\frac{\nu}{14}\| \nabla\varphi_h{}^{n+1}\|_0^2 \tag{25}$$

$$\alpha(\nabla \chi^{n+1}, \nabla \varphi_h{}^{n+1}) \leqslant \alpha \| \nabla \chi^{n+1} \|_0^2 + \frac{\alpha}{4} \| \nabla \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 \tag{26}$$

$$-(\nabla \cdot \varphi_h{}^{n+1}, \boldsymbol{p}^{n+1} - \lambda_h) \leqslant c\nu^{-1} \| \boldsymbol{p}^{n+1} - \lambda_h \|_0^2 + \frac{\nu}{14} \| \nabla \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 \tag{27}$$

$$-\alpha(\nabla \boldsymbol{u}^{n+1}, \nabla \varphi_h{}^{n+1}) \leqslant c\alpha^2 \nu^{-1} \| \nabla \boldsymbol{u}^{n+1} \|_0^2 + \frac{\nu}{14} \| \nabla \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 \tag{28}$$

$$\alpha(\Pi_h \nabla \boldsymbol{u}_H^{n+1}, \nabla \varphi_h{}^{n+1}) \leqslant c\alpha^2 \nu^{-1} \| \nabla \boldsymbol{u}_H^{n+1} \|_0^2 + \frac{\nu}{14} \| \nabla \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 \tag{29}$$

利用式(5)－(7) 和 Young 不等式估计下面的三线性项

$$b(\boldsymbol{u}^{n+1}, \chi^{n+1}, \varphi_h{}^{n+1}) \leqslant c\nu^{-1} \| \nabla \boldsymbol{u}_H^{n+1} \|_0^2 \| \nabla \chi^{n+1} \|_0^2 + \frac{\nu}{14} \| \nabla \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 \tag{30}$$

$$-b(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}_H^{n+1}, \chi^{n+1}, \varphi_h{}^{n+1}) \leqslant c\nu^{-1} \| \nabla(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}_H^{n+1}) \|_0^2 \| \nabla \chi^{n+1} \|_0^2 + \frac{\nu}{14} \| \nabla \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 \tag{31}$$

$$b(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}_H^{n+1}, \boldsymbol{u}^{n+1}, \varphi_h{}^{n+1}) \leqslant c\nu^{-1} \| \nabla(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}_H^{n+1}) \|_0^2 \| \nabla \boldsymbol{u}^{n+1} \|_0^2 + \frac{\nu}{14} \| \nabla \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 \tag{32}$$

对式(24) 最后一项$\left(\boldsymbol{u}_t(t_{n+1}) - \dfrac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\Delta t}, \varphi_h{}^{n+1}\right)$利用泰勒展式，施瓦兹不等式和 Young 不等式，得：

$$\left(\boldsymbol{u}_t(t_{n+1}) - \frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\Delta t}, \varphi_h{}^{n+1}\right) \leqslant c(\Delta t)^2 \| \boldsymbol{u}_{tt} \|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; L^2(\Omega)^2)}^2 + \| \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 \tag{33}$$

将式(25)－(33) 代入式(24)，有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\Delta t}(\| \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 - \varphi_h^n \|_0^2 + \| 2\varphi_h^{n-1} - \varphi_h^n \|_0^2) + \frac{1}{2}\nu \| \nabla \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 \leqslant \\ &c(\nu + \alpha + \nu^{-1}(\| \nabla \boldsymbol{u}^{n+1} \|_0^2 + \| \nabla(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}_H^{n+1}) \|_0^2)) \| \nabla \chi^{n+1} \|_0^2 + \\ &c \| \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 + c\nu^{-1} \| \boldsymbol{p}^{n+1} - \lambda_h \|_0^2 + c\alpha^2 \nu^{-1}(\| \nabla \boldsymbol{u}^{n+1} \|_0^2 + \| \nabla \boldsymbol{u}_H^{n+1} \|_0^2) + \\ &c\nu^{-1} \| \nabla \boldsymbol{u}^{n+1} \|_0^2 \| \nabla(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}_H^{n+1} \|_0^2 + c\Delta t^2 \| \boldsymbol{u}_{tt} \|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; L^2(\Omega)^2)}^2) \end{aligned} \tag{34}$$

将式(34) 乘以 $2\Delta t$，从 $n=1$ 加到 $N-1$ 且 $\varphi_h^0 = 0$. 得：

$$\begin{aligned} &\| \varphi_h^N \|_0^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \| \varphi_h{}^{n+1} - \varphi_h^n \|_0^2 + \nu\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \| \nabla \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 \leqslant \\ &c\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (\nu + \alpha + \nu^{-1}(\| \nabla \boldsymbol{u}^{n+1} \|_0^2 + \| \nabla(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}_H^{n+1}) \|_0^2)) \| \nabla \chi^{n+1} \|_0^2 + \\ &c\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \| \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 + c\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \nu^{-1} \| \boldsymbol{p}^{n+1} - \lambda_h \|_0^2 + \\ &c\alpha^2 \nu^{-1}(\| \nabla \boldsymbol{u} \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)}^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \| \nabla \boldsymbol{u}_H^{n+1} \|_0^2) + \\ &c\Delta t^2 \| \boldsymbol{u}_{tt} \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)}^2 + c\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \nu^{-1} \| \nabla \boldsymbol{u}^{n+1} \|_0^2 \| \nabla(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}_H^{n+1}) \|_0^2 \end{aligned}$$

最后，当 Δt 足够小时，应用离散 Gronwall 引理和式(10) 有

$$\begin{aligned} &\| \varphi_h^N \|_0^2 + \nu\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \| \nabla \varphi_h{}^{n+1} \|_0^2 \leqslant c\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (\inf_{w_h \in X_h} \| \nabla(\boldsymbol{u}(t_{n+1}) - w_h) \|_0^2 + \inf_{\lambda_h \in M_h} \| \boldsymbol{p}(t_{n+1}) - \lambda_h \|_0^2) + \\ &c\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \| \nabla(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}_H^{n+1}) \|_0^2 + c(\alpha^2 + \Delta t^2) \end{aligned} \tag{35}$$

利用三角不等式，可得式(21).

4　数值实验

在本节中，我们利用 FreeFem ++ 软件[14] 进行一些实验验证理论预测的正确性. Taylor-Hood 元用于空间离散化. 粗网格上的非线性迭代的迭代限差为 10^{-6}，并且非线性系统由牛顿迭代法求解. 值得注意的

是，对于非线性迭代，标准的变分多尺度方法和两水平变分多尺度方法的稳定项可以近似为

$$G(\boldsymbol{u}_h{}^j,\ \boldsymbol{v}_h)=\alpha\sum_{K\in T^h(\Omega)}\left(\int_{K,m}\nabla\boldsymbol{u}_h{}^j\cdot\nabla\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}x-\int_{K,1}\nabla\boldsymbol{u}_h^{j-1}\cdot\nabla\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}x\right)\qquad\forall\,\boldsymbol{u}_h{}^j,\boldsymbol{u}_h^{j-1},\boldsymbol{v}_h\in X_h$$

其中 j 表示非线性迭代的次数.

选择 Navier-Stokes 方程的精确解为：

$$u_1=10x^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1)\mathrm{e}^{-t}$$

$$u_2=-10y^2(y-1)^2x(x-1)(2x-1)\mathrm{e}^{-t}$$

$$p=10(2x-1)(2y-1)\mathrm{e}^{-t}$$

其中解的区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^2$，且 $\nu=1.0\times10^{-7}$，$T=0.01$.

定理1的误差估计在理论上预测了能量范数对于 $\mathcal{O}(h^2)$ 的空间收敛速度. 由此可设 $\alpha=0.1\,h^2$，$H=h^{\frac{1}{2}}$. 表1给出了数值结果. 从表1可知：本文的方法对空间和时间离散是一阶收敛的，同时也表明我们的理论预测是正确的.

表1　本文的两水平变分多尺度方法近似解的误差

H	h	Δt	$\Vert\nabla\boldsymbol{u}-\nabla\boldsymbol{u}^h\Vert_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}$	收敛阶	计算时间/s
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{200}$	0.000 364 631	—	0.563
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{400}$	0.000 108 167	1.753 18	4
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{800}$	4.175 79e-005	1.373 14	31.309
$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{1600}$	1.768 74e-005	1.239 32	240.831
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{3200}$	8.427 84e-006	1.069 49	2273.62

为了对比本文的方法和文献[5]中的方法，令网格尺寸 $H=\dfrac{1}{8}$，$h=\dfrac{1}{64}$，时间步长 $\Delta t=\dfrac{1}{800}$，但是粘性系数分别为 $\nu=0.01,0.001,0.000\,1,0.000\,01$ 和 $0.000\,001$ 的情况下求解. 数值结果在表2中给出. 由表2可知：本文的两水平变分多尺度方法得到的解精确度和标准的网格变分多尺度方法大体一致，但是本文的方法可以节约一半以上的计算时间.

表2　近似解的对比

ν	本文的两水平变分多尺度方法		文献[5]中格式1的标准变分多尺度方法	
	$\Vert\nabla\boldsymbol{u}-\nabla\boldsymbol{u}^h\Vert_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}$	计算时间/s	$\Vert\nabla\boldsymbol{u}-\nabla\boldsymbol{u}^h\Vert_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}$	计算时间/s
0.01	2.057 93e-005	30.157	2.053 08e-005	73.275
0.001	2.471 53e-005	30.847	2.381 3e-005	72.506
0.0001	3.747 18e-005	30.567	3.467 79e-005	67.934
0.000 01	4.126 64e-005	31.407	3.799 44e-005	69.861
0.000 001	4.171 25e-005	30.809	3.838 63e-005	68.667

6　结束语

本文给出了全离散速度的误差估计. 对比标准的变分多尺度方法，本文的方法可以节约很多计算时间.

参考文献：

[1] GLOWINSKI R. Finite Element Methods for Incompressible Viscous Flow [M]. Amsterdam: Elsevier Science Publisher, 2003.

[2] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR R C, NIETHARASU P. The Finite Element Method [M]. New York: Springer, 2008.

[3] LIU Q F, HOU Y R. A Two-Level Defect-Correction Method for Navier-Stokes Equations [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2010, 81(3) 442－454.
[4] SHANG Y Q. A Two-Level Subgrid Stabilized Oseen Iterative Method for the Steady Navier-Stokes Equations [J]. Journal of Computational Physics, 2013, 233(1): 210－226.
[5] SHANG Y Q. Error Analysis of a Fully Discrete Finite Element Variational Multiscale Method for Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2013, 29(6): 2025－2046.
[6] 唐秀丽，王修庆. 三维空间中 Euler 方程的中心差分方法 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2016，34(2)：71－75.
[7] MAUBACH J. Local Bisection Refinement for N-Simplicial Grids Generated by Reflection [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1995, 16(1): 210－227.
[8] HOOD P, TAYLOR C. A Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations Using the Finite Element Technique [J]. Computers & Fluids, 2017, 1(1): 73－100.
[9] FORTIN M. Calcul Numérique des Ecoulements Fluides De Bingham et des Fluides Newtoniens Incompressible Par des Méthodes d'eléments Finis [M]. Paris: Doctoral Thesis, 1972.
[10] CASE M, ERVIN V, LINKE A, et al. A Connection Between Scott-Vogelius Elements and Grad-Div Stabilization [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2011, 49(4): 1461－1481.
[11] 罗　尧，杨一都. 传输特征值混合方法 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2017，35(2)：38－45.
[12] GIRAULT V, RAVIART P A. Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
[13] HEYWOOD J G, RANNACHER R. Finite Element Approximation of the Nonstationary Navier-Stokes Problem IV: Error Analysis for Second-Order Time Discretization [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1990, 27(2): 353－384.
[14] HECHT F. New Development in FreeFem＋＋ [J]. Journal of Numerical Mathematics, 2012, 20(3－4): 251－265.

A Finite Element Variational Multiscale Method Based on the Backward Euler Scheme for the Time-Dependent Navier-Stokes Equations

XUE Ju-feng,　SHANG Yue-qiang

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we mainly study a fully discrete finite element variational multiscale method based on two local Gaussian integrations for the time-dependent Navier-Stokes equations. A feature of the method is that a stabilized nonlinear Navier-Stokes system is first solved on a coarse grid, and then a stabilized linear problem is solved on a fine grid to correct the coarse grid solution at each time step. Based on the backward Euler scheme for temporal discretization, we derive error bound of the approximate velocity which is first-order in time. Numerical experiments verify the correctness of the theory and the effectiveness of the method.

Key words: Navier-Stokes equation; two-grid method; backward Euler scheme; error estimate

责任编辑　张　枸