DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.10.010

# 单群 $PSL_2(7)$的特征性质及其初等证明①

蒋琴会，　陈兆英，　李可峰

济南大学 数学科学学院，济南 250022

**摘要：**群的阶、谱及素图是有限群研究的基本工具. 利用有限群的数量性质(如群的阶，元素的阶，素图等)来研究群的结构和性质是有限群研究的热点问题. 施武杰教授率先提出用纯数量来刻画有限单群，即利用"两阶"来刻画有限单群，并提出了著名的施武杰猜想. 目前，该猜想已经完全被解决. 然而，回顾以往的工作，作者大多运用了单群的分类定理. 尝试不用单群分类定理，仅利用谱来刻画有限单群 $PSL_2(7)$，用初等方法证明了 $G\cong PSL_2(7)$ 当且仅当 $\pi_e(G)=\{1, 2, 3, 4, 7\}$.

**关　键　词：**有限群；元素的阶；Burnside 正规补

**中图分类号：O152.1**　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673－9868(2018)10－0065－03

本文所涉及的群均指有限群. 设 $G$ 是一个群，我们用 $\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的所有素因子集合，用 $\pi_e(G)$ 表示 $G$ 中所有元素阶的集合(又称为群 $G$ 的谱). 设 $H$ 为任一满足 $\pi_e(H)=\pi_e(G)$ 的有限群. 若 $H$ 与 $G$ 同构，则我们称 $G$ 是可以用谱刻画的.

根据施武杰教授的一个注记[1]，含有非平凡正规可解子群的有限群是无法用谱刻画的，也就是说，存在无数多个与 $G$ 的谱相同但是不同构的群. 因此，谱刻画的问题只是针对含有平凡可解剩余类的有限群，尤其是单群和几乎单群. 最早利用谱刻画有限单群的是施武杰教授，他在文献[2]中证明了最小的非交换单群，即 5 阶交错群 $A_5$，是可以用谱刻画的：即 $G\cong A_5$ 当且仅当 $\pi_e(G)=\{1, 2, 3, 4, 7\}$. 后来人们对于一系列的单群进行了谱刻画，取得了很多结果(可见文献[3－9]).

利用 $\pi_e(G)$，我们可以定义素图 $\Gamma(G)$ 如下[10]：图的顶点为 $\pi(G)$ 中的元素，两个顶点相连当且仅当两顶点的乘积包含在 $\pi_e(G)$ 中. 显然，$\Gamma(G)$ 被 $\pi_e(G)$ 唯一确定，即，若谱相同，则其素图亦相同. 因而素图刻画与谱刻画是紧密联系的. 事实上，如果一个有限群是可以用素图刻画的，那么它一定是可以用谱刻画的，反之并不成立.

2005年，文献[11]首次提出了有限群的素图度数型这个概念，即 OD-刻画，从此群论学者开始利用群的阶及其素图度数型来刻画单群，例如，文献[12]对单群 $L_5(q)$ 应用了 OD-刻画.

我们称 $G$ 为质幂元群，如果它的元素的阶均为素数幂. 有限群元素的阶是有限群的一个基本算术量，通过这个量获取有限群的性质是有限群的一个重要课题. 在以前的工作中，作者大多运用了单群的分类定理. 不用单群分类定理刻画有限单群是有意义的工作. 文献[13]用初等方法证明了 $G\cong A_5$ 当且仅当 $\pi_e(G)=\{1, p, q, r\}$，其中 $p, q, r$ 是两两不等的素数. 本文我们给出单群 $PSL_2(7)$ 的特征性质，并给出初等证明，即下面的定理：

**定理 1**　设 $G$ 是有限群，则 $\pi_e(G)=\pi_e(PSL_2(7))=\{1, 2, 3, 4, 7\}$ 当且仅当 $G\cong PSL_2(7)$.

①　收稿日期：2017－08－04

基金项目：国家自然科学基金项目(11301218)；山东省自然科学基金项目(ZR2014AM)；济南大学科研项目(XKY1611)；桥梁无损检测与工程计算四川省高校重点实验室项目(2018QZJ04).

作者简介：蒋琴会(1983－)，女，博士，讲师，主要从事有限群的研究.

这也是文献[13]中问题 2 的前部分.

**引理 1**[14,定理 1] 设 $G$ 是有限可解群，若 $G$ 的元素的阶为素数幂，那么 $|\pi(G)|\leqslant 2$.

**引理 2**[15,引理4] 设 $H$ 是群，且 $N$ 是其正规 $p$ 子群. 假设 $H/N=A:B$ 是一个 Frobenius 群，$p$ 不整除 $|A|$，且 $A$ 以自然的方式非平凡地作用在 $N$ 上. 则对于任意的 $m\in\pi_e(B)$，有 $pm\in\pi_e(H)$.

**定理 1 的证明**

充分性易证，只需证明必要性. 设 $G$ 是一个极小阶反例. 我们用 $P_r$ 表示 $G$ 的 Sylow $r$-子群.

由引理 1，$G$ 是非可解群. 设 $N$ 为 $G$ 的极大可解正规子群，$H/N$ 为 $G/N$ 的极小正规子群，则 $H/N$ 为单群. 设 $\overline{G}=G/N$.

由 Burnside $p^a q^b$-定理，$\pi_e(\overline{H})=\{1,2,3,7\}$ 或 $\pi_e(\overline{H})=\{1,2,3,4,7\}$.

若 $\pi_e(\overline{H})=\{1,2,3,7\}$，由于 $G$ 是质幂元群，由引理 1，我们得到 $|\pi(N)|\leqslant 2$. 我们证明 $|\pi(N)|=1$. 否则，$|\pi(N)|=2$. 则存在 $s\in\pi(G)-\pi(N)$. 由于 $G$ 是质幂元群，故 $NP_s$ 是以 $N$ 为核的 Frobenius 群. 因此，$p_1p_2\in\pi_e(N)$，其中 $p_i\in\pi(N)$，$p_1\neq p_2$. 这与 $G$ 是质幂元群矛盾. 因此，$|\pi(N)|=1$. 于是 $N$ 是 $r$-群，其中 $r$ 是素数. 我们证明 $r=2$. 否则，取 $H$ 的 Sylow 2-子群 $H_2$. 由于 $G$ 是质幂元群，我们得到 $NH_2$ 是以 $H_2$ 为补的 Frobenius 群. 由文献[16]的定理 10.3.1，$H_2$ 循环或为广义四元数群. 但注意到 $\pi_e(\overline{H})=\{1,2,3,7\}$，我们可得 $H_2\cong C_2$，这与 $\overline{H}$ 是单群矛盾. 这样我们证明了 $r=2$.

设 $Q_i$ 是 $H$ 的 Sylow $i$-子群，其中 $i$ 是素数. 则 $Q_2$ 初等交换. 此时容易证明 $|\overline{Q_3}|=3$，$|\overline{Q_7}|=7$. 由于 $\pi_e(\overline{H})=\{1,2,3,7\}$ 且 $\overline{H}$ 是单群，我们得 $|\overline{H}:N_{\overline{H}}(\overline{Q_2})|\geqslant 5$. 若 $N_{\overline{H}}(\overline{Q_2})=\overline{Q_2}$，由 Burnside 正规补定理，$\overline{H}$ 有正规 2-补，这与 $\overline{H}$ 是单群矛盾. 因此，$|\overline{H}:N_{\overline{H}}(\overline{Q_2})|=7$. 由此得，$\overline{H}/(N_{\overline{H}}(\overline{Q_2}))_{\overline{H}}\leqslant S_7$. 由 $\overline{H}$ 是单群，则 $(N_H(\overline{Q_2}))_{\overline{H}}=1$ 且 $\overline{H}\leqslant S_7$. 注意到，$\overline{H}$ 是单群，所以 $\overline{H}\leqslant A_7$. 进而 $|\overline{H}|\leqslant 2^3\cdot 3\cdot 7$，因此 $\overline{H}\cong \mathrm{PSL}_2(7)$. 但此时 $4\in\pi_e(\overline{H})$，矛盾.

若 $\pi_e(\overline{H})=\{1,2,3,4,7\}$. 首先，假设 $N\neq 1$. 由 $G$ 是极小阶反例，我们可以得到 $\overline{H}\cong \mathrm{PSL}_2(7)$. 由于 $N$ 可解，所以 $|\pi(N)|\leqslant 2$. 同理，我们得到 $|\pi(N)|=1$. 无妨设 $N$ 是 $p$ 群. 如果 $p=3$ 或 $p=7$，则 $S_2\in \mathrm{Syl}_2(\overline{H})$ 是循环群或广义四元数群，这与 $\overline{H}\cong \mathrm{PSL}_2(7)$ 矛盾. 因此 $p=2$，$N$ 是 2-群. 由于 $\mathrm{PSL}_2(7)$ 含有 Frobenius 子群 $C_7:C_3$，由引理 2，$G$ 有 6 阶元，矛盾.

因此，$N=1$，$H\cong \mathrm{PSL}_2(7)$.

由于 $H$ 是 $G$ 的正规子群，那么 $G/C_G(H)\leqslant \mathrm{PGL}_2(7)$. 因 $G$ 是质幂元群，所以 $C_G(H)=1$. 因此 $G\leqslant \mathrm{PGL}_2(7)$. 由于 $\mathrm{PSL}_2(7)\leqslant G$，我们有 $G=\mathrm{PGL}_2(7)$ 或 $G=\mathrm{PSL}_2(7)$.

若 $G=\mathrm{PGL}_2(7)$，则 $6\in\pi_e(G)$，矛盾. 因此 $G\cong \mathrm{PSL}_2(7)$，但这与极小阶反例矛盾. 这就证明了 $G\cong \mathrm{PSL}_2(7)$.

**参考文献：**

[1] SHI W J. A Characterization of the Sporadic Simple Groups by Their Element Orders [J]. Algebra Colloquium，1994，1(2)：159－166.

[2] 施武杰. $A_5$ 的一个特征性质 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1986，27(3)：11－14.

[3] MAZUROV V D，KHUKHRO E I. Unsolvable Problems in Group Theory [M]. Novosibirsk：Russian Academy of Sciences，2010：60.

[4] BRANDI R，SHI W J. Finite Groups Whose Element Orders are Consecutive Integers [J]. J Algebra，1991，143(2)：388－400.

[5] BRANDI R，SHI W J. The Characterization of PSL(2，q) by Its Element Orders [J]. J Algebra，1994，163(1)：109－114.

[6] KONDRATIEV A S，MAZUROV V D. Recognition of Alternating Groups of Prime Degress From Their Element Orders [J]. Sib Math J，2000，41(2)：294－302.

[7] MAZUROV V D. Characterizations of Groups by Arithmetic Properties [J]. Algebra Colloquium，2004，11(1)：129－140.

[8] SHI W J. A New Characterization of the Sporadic Simple Groups [J]. Science Bulletin，1988，33(9)：788.
[9] ZAVARNITISN A V. Recognition of Alternating Groups of Degree $r+1$ and $r+2$ for Prime r and the Group of Degree 16 by their Element Order Sets [J]. Algebra and Logic，2000，39(6)：370－377.
[10] KONDRAT'EV A S. On Prime Graph Components for Finite Simple Groups [J]. Mat Sib，1989，180(6)：787－797.
[11] MOGHADDAMFAR A R，ZOKAYI A R，DARAFSHEH M R. A Characterization of Finite Simple Groups by the Degrees of Vertices of Their Prime Graphs [J]. Algebra Colloquium，2005，12(3)：431－442.
[12] 张盟盟，张良才，包　奕. 特殊射影线性群 $L_5(q)$的 OD-刻画 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(6)：1－5.
[13] 钱国华，施武杰. $A_5$ 的一个特征性质及其初等证明 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2007，29(2)：1－4.
[14] HIGMAN G. Finite Groups in which Every Element has Prime Power Order [J]. J London Math Soc，1957，32(3)：335－342.
[15] 施武杰，邓辉文，张　建. 元阶集中有少数合数的有限不可解群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2001，26(5)：493－502.
[16] GORENSTEIN D. Finite Groups [M]. New York：Harper Row，1968.

# A Characteristic of Simple Groups $PSL_2(7)$ and Its Elementary Proof

JIANG Qin-hui，　CHEN Zhao-ying，　LI Ke-feng

*School of Mathematical Sciences，University of Jinan，Jinan 250022，China*

**Abstract**：The order，the spectrum and the prime graph of a group are the basic methods in the study of finite groups. It is a hot topic to investigate finite groups by using the arithmetic properties (such as group order，the element orders and prime graph) of a group. Professor WJ Shi was the first to propose to characterize finite simple groups by group order and element orders. He also proposed a famous conjecture named "WJ Shi Conjecture"，which has been solved up to now. However，most of the researchers used the "Classification of Finite Simple Groups". In this paper，we try characterizing the finite simple group $PSL_2(7)$ without using the "Classification of Finite Simple Groups". Instead，we show by an elementary proof that $G \cong PSL_2(7)$ if and only if $\pi_e(G)=\{1, 2, 3, 4, 7\}$.

**Key words**：finite group；element order；Burnside normal complement

**责任编辑**　廖　坤
崔玉洁