DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.10.011

元素个数不大于 5 的次直积不可约带[①]

王 洁, 王正攀

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 利用加细半格作为主要工具, 从半群的元素个数和半群的半格结构入手, 给出了元素个数不大于 5 的次直积不可约带的一个分类, 证明了这样的互不同构的次直积不可约带仅有 13 种.

关 键 词: 带; 次直积不可约; 加细半格; 左零半群

中图分类号: O152.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2018)10-0068-04

众所周知, 一个半群是次直积不可约的当且仅当其上存在最小非平凡同余. 据文献[1] 的推论 VI.5.3, 正规带簇中的次直积不可约成员只有 5 个, 分别为 L_2, R_2, Y_2, L_2^0 和 R_2^0. 而在带簇的真子簇格中, 几乎覆盖正规带簇的正则带簇, 其次直积不可约成员有无限多个, 且存在元素个数无限的次直积不可约正则带. 所以, 即使在正则带簇中, 找遍所有互不同构的次直积不可约成员也是困难的. 本文将找出元素个数不超过 5 的所有次直积不可约带.

令 X 为非空集合, 记 ε_X 为 X 上的相等关系, ω_X 为 X 上的泛关系. 令 S 为半群. S 的对偶是指集合 S 上如下定义的运算 $\circ$ 所确定的半群: 对任意 $a, b \in S$, $a \circ b = ba$, 其中 ba 按半群 S 中的乘法作运算. 通常记 S 的对偶半群为 S^*. 不难看出, 半群 S 和 S^* 同时次直积不可约或同时次直积可约. 文献[2] 构造了以下两个非正则带, 我们分别记其为 E_1 和 E_2(图 1):

	a	b	c	d	e
a	a	a	c	d	e
b	b	b	c	d	e
c	d	e	c	d	e
d	d	d	c	d	e
e	e	e	c	d	e

(a) E_1

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	c	d	e	c	d	e
b	b	b	f	g	h	f	g	h
c	d	e	c	d	e	c	d	e
d	d	d	c	d	e	c	d	e
e	e	e	c	d	e	c	d	e
f	g	h	f	g	h	f	g	h
g	g	g	f	g	h	f	g	h
h	h	h	f	g	h	f	g	h

(b) E_2

图 1 两个正则带

① 收稿日期: 2018-03-02
基金项目: 国家自然科学基金项目(11501467); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(XDJK2016B038).
作者简介: 王 洁(1994-), 女, 硕士研究生, 主要从事半群代数理论的研究.
通信作者: 王正攀, 教授.

并证明了:

引理 1 带 B 是正则的当且仅当 B 中没有形如 E_1, E_2, E_1^* 和 E_2^* 的子带.

直接验证可得, $\omega_{\{b,c\}} \cup \varepsilon_{E_1}$ 是 E_1 上的最小非平凡同余, 因此, E_1 是次直积不可约的[3]. 不难看出, E_1 的结构半格为 Y_2. 由引理 1 知, 同构的意义下, 元素个数不超过 5 的带除 E_1 和 E_1^* 外均是正则的. 文中未介绍的术语符号及未提供证明的事实请读者参见文献[1, 4-5].

据文献[6], 有:

引理 2 令 S 为半群. 则 S^1 和 S, S^0 和 S 均同时次直积不可约或同时次直积可约.

由文献[1] 可知, 任意正则带都是一左正则带和一右正则带的次直积. 注意到, 每一右正则带均是某左正则带的对偶. 为研究次直积不可约的正则带, 我们仅需研究次直积不可约的左正则带. 令 L 为次直积不可约左正则带, 据文献[5, 7], L 可记为 $[Y; L_\alpha, \rho_{\alpha,\beta}, \phi_{\alpha,\beta}]$. 由文献[5] 的引理 1.3 知, L 的结构半格 Y 必含零元, 记其为 θ. 据文献[5], 有以下两条引理:

引理 3 对任意 $\alpha \in Y - \{\theta\}$, 有 $\rho_{\alpha,\theta} \neq \omega_{L_\theta}$.

引理 4 对任意 $\alpha \in Y$, 若 $\rho_{\alpha,\theta} = \varepsilon_{L_\theta}$, 则 $|\bigcup_{\delta \geqslant \alpha} L_\delta| = 1$.

由文献[5] 的定理 2.16, 我们可构造结构半格为 Y_2 的另一 5 元次直积不可约(左正则) 带, 记其为 F, 其乘法表如图 2:

	a	b	c	d	e
a	a	a	c	c	e
b	b	b	d	d	e
c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d
e	e	e	e	e	e

图 2 乘法表

引理 5 对任意 $\alpha \in Y - \{\theta\}$, $\rho = \rho_{\alpha,\theta} \cup \varepsilon_L$ 是 L 上的同余.

证 易见 ρ 是 L 上的等价关系. 又因 L_θ 是左零半群, 为证 ρ 是 L 上的同余, 只需证 ρ 左相容. 任取 $(x, y) \in \rho$, $a \in L_\beta$, 则有 $ax = a\phi^x_{\beta,\theta}$, $ay = a\phi^y_{\beta,\theta}$. 当 $(x, y) \in \varepsilon_L$ 时显然相容. 现假设 $(x, y) \in \rho_{\alpha,\theta}$. 则 $\rho_{\alpha,\theta} \cup \rho_{\beta,\theta} \subseteq \rho_{\alpha\beta,\theta}$. 由关系映射的定义知

$$(ax, ay) = (a\phi^x_{\beta,\theta}, a\phi^y_{\beta,\theta}) \in \rho_{\alpha\beta,\theta}$$

于是由文献[5] 的引理 1.5(iii) 知, 对任意满足 $\alpha\beta \geqslant \gamma$ 的 $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $a \in L_\alpha$, $c \in L_\gamma$, 存在 $c' \in L_\gamma$, 使得

$$a\phi_{\alpha,\gamma} \cap c\rho_{\alpha\beta,\gamma} \subseteq c'\rho_{\beta,\gamma}$$

可得 $(ax, ay) \in \rho_{\alpha,\theta}$. 因此, $\rho = \rho_{\alpha,\theta} \cup \varepsilon_L$ 是 L 上的同余.

下面给出本文的主要结论.

定理 1 在同构的意义下, 元素个数不大于 5 的次直积不可约带仅有以下 13 个:

$$L_2, R_2, Y_2, L_2^0, R_2^0, L_2^1, R_2^1, L_2^{1,0}, R_2^{1,0}, E_1, E_1^*, F, F^*$$

证 据引理 2 及前述讨论, 上列 13 个带均次直积不可约. 由引理 1 知, 同构的意义下, 元素个数不大于 5 的非正则带仅有 E_1 和 E_1^*. 因此, 我们仅需考虑正则的次直积不可约带, 进而仅需考虑左正则的次直积不可约带. 即证, 元素个数不大于 5 的次直积不可约左正则带仅有以下 6 个:

$$L_2, Y_2, L_2^0, L_2^1, L_2^{1,0}, F$$

注意到这 6 个带的结构半格均是链，据引理 3 和文献[5] 的引理 1.5，结构半格是链，不含零元，不含单位元且元素个数不大于 5 的次直积不可约左正则带仅有 L_2 和 F. 从而由引理 2，结构半格是链且元素个数不大于 5 的次直积不可约左正则带仅有上述 6 个. 因此，我们仅需证明不存在结构半格非链而元素个数不大于 5 的次直积不可约的左正则带. 为此，令 $L=[Y;L_\alpha,\rho_{\alpha,\beta},\phi_{\alpha,\beta}]$ 为左正则次直积不可约带，θ 为其结构半格 Y 的零元，且 $|L|\leqslant 5$. 若 L 只含 3 个元素，则 L 必为半格. 据文献[1]，次直积不可约的半格仅有 Y_2，因此不可能. 以下分情况讨论：

情形 1　$|L|=4$.

若 L 含零元，据引理 2，L 去掉零元后依然次直积不可约. 因此，L 去掉零元后所得带的结构半格依然不是链，据前述情形，也不可能. 若 L 不含零元，则 L 只能有如图 3 所示的半格分解：

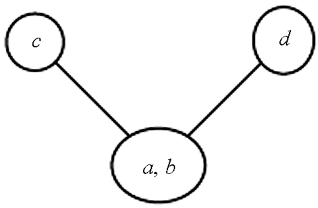

图 3　$|L|=4$ 时 L 的半格分解

由引理 3 和文献[5] 的引理 1.5(iii)，这种情形也不可能.

情形 2　$|L|=5$.

类似地，只可能有如图 4 所示的 4 种半格分解：

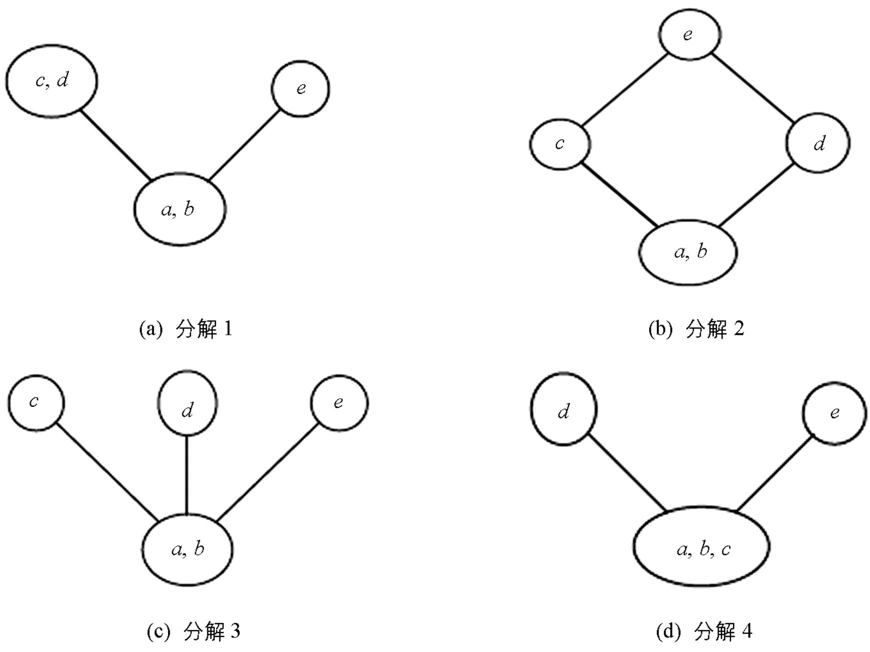

图 4　$|L|=5$ 时 L 的 4 种半格分解

又由引理 3 和文献[5] 的引理 1.5(iii)，前 3 种分解依然不可能. 关于第 4 种情形，假设 d 和 e 所在的 $\mathscr{L}$-类分别为 L_α 和 L_β，由引理 3 和文献[5] 的引理 1.5(iii)，$\rho_{\alpha,\theta}$ 和 $\rho_{\beta,\theta}$ 均既不是 $L_\theta=\{a,b,c\}$ 上的泛关系也不是其上的相等关系. 再据文献[5] 的引理 1.5(iii) 和关系映射的定义，$\rho_{\alpha,\theta}$ 和 $\rho_{\beta,\theta}$ 不同，从而由引理 5 知，L 上存在两个非平凡同余 $\rho_{\alpha,\theta}\cup\varepsilon_L$ 和 $\rho_{\beta,\theta}\cup\varepsilon_L$，它们的交为相等关系，这与 L 次直积不可约矛盾.

关于含元素个数更多的次直积不可约带，我们将结合逻辑推理与计算机编程的方法，进一步寻找.

参考文献：

[1] PETRICH M, REILLY N R. Completely Regular Semigroups [M]. New York: Wiley-Interscience, 1999, 1−155.

[2] WANG Z P, ZHOU Y L, GUO Y Q. A Note on Band Semirings [J]. Semigroup Forum, 2005, 71(3): 439−445.

[3] GERHARD J A. Some Subdirectly Irreducibe Idempotent Semigroups [J]. Semigroup Forum, 1972, 5(2): 362−369.

[4] HOWIE J M. Fundamentals of Semigroup Theory [M]. Oxford UK: Clarendon Press, 1995: 1−142.

[5] WANG Z P, LENG J, YU H Y. On Subdirectly Irreducible Regular Band [J]. Turk J Math, 2017, 41: 1337−1343.

[6] SCHEIN B M. Homomorphisms and Subdirect Semilattices of Semigroups [J]. Pacific J Math, 1996, 17(3): 529−547.

[7] WANG Z P, GUO Y Q, SHUM K P. On Refined Semilattices of Semigroups [J]. Algebra Colloquium, 2008, 15(2): 331−336.

Subdirectly Irreducible Bands with no More than 5 Elements

WANG Jie, WANG Zheng-pan

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, using refined semilattices and investigating element number and semilattice decomposition of semigroups, we classify subdirectly irreducible bands with 5 or fewer elements and prove that there exactly exist 13 such bands up to isomorphism.

Key words: band; subdirectly irreducible; refined semilattice of semigroups; left zero semigroup

责任编辑 廖 坤
崔玉洁