

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.10.013

T-型六角系统的点可区别边染色^①

王文杰, 黄丽娜, 李沐春

兰州交通大学 应用数学研究所, 兰州 730070

摘要: 根据 T-型六角系统链 H 结构的性质以及 2 度点的排列特点, 用 $\pi(H) + 1$ 种颜色给出了 $p (\geq 4)$ 阶 H 中 2 度点的点可区别边染色算法, 紧接着分析其 3 度点的染色特点, 通过调整个别边的颜色, 最终证明 $H (p \geq 4)$ 的点可区别色数不超过 $\pi(H) + 1$. 另外, 当 $p \leq 3$ 时, 用 $\pi(H)$ 种颜色给出具体的点可区别边染色方法, 从而证明 H 的点可区别边色数不超过 $\pi(H) + 1$.

关键词: T-型六角系统; 点可区别边染色; 算法

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2018)10-0077-06

文中所研究的图均为有限无向图且均是简单图. 设 $G = (V, E)$ 表示顶点集为 V , 边集为 E 的简单图. 用 Δ 和 δ 分别表示图 G 的最大度和最小度, n_i 表示图中度为 i 的点的个数, P 表示路.

六角系统(HS)是指平面上若干个全等的正六边形所组成的网络, 其中每个六边形的边都分别平行于 3 个固定的方向, 且它们覆盖的平面区域(称为 HS 的区域)是连通的. 六角系统是苯系化合物分子结构的数学模型, 这模型的数学结构与分子的化学特性有着密切的关系, 因此对六角系统的研究对于化学理论有着重要的意义. 文献[1]研究了关于六角系统的 Wiener 指标. 文献[2]针对渺位六角系统的 Wiener 指标, 降低了边的 Wiener 指标. 文献[3-4]分别对六角系统的顶点度极值进行了研究.

然而对于六角系统的点可区别边染色的研究并不多见. 文献[5]给出了点可区别边染色的定义. 文献[6]提出了一个著名的猜想: 对任意一个点可区别边染色图 G , 它的点可区别边色数为 $\pi(G)$ 或 $\pi(G) + 1$, 其中 $\pi(G)$ 为图 G 的边组合度且满足

$$\pi(G) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \binom{\theta}{i} \geq n_i, \delta \leq i \leq \Delta \right\}$$

对于此猜想目前仍没有得到解决, 但是对于一些特殊图是成立的, 例如完全图、完全二部图、路、圈以及一些树^[6]等. 近年来, 学者们一直致力于研究各类图的点可区别边色数, 并得到了一些结果. 文献[7]证明了: 对于阶数 $n \geq 3$ 的连通图, 若 $\sigma_2(G) \geq 2n/3$, 则它的点可区别边色数不超过 $\Delta + 5$, 其中 $\sigma_2(G)$ 表示 G 中两个不相邻的点的最小度和. 文献[8]证明了: 若树 T 满足 $n_2(T) \leq n_1(T)$, 且树的直径为 3 或任意两树之一的直径为 4 时, 它的点可区别边色数为 $n_1(T) + 1$, 否则它的点可区别边色数为 $n_1(T)$.

由于六角系统独特的图结构, 研究它的点可区别边染色还是有一定难度的. 本文研究了一类特殊的六角系统, 它是 3 个由分别为 p 个直线排列的正六边形组成的直链与一个正六边形组成的中心对称图, 简称 $p (p \geq 1)$ 阶 T-型六角系统链, 记作 H . 本文首先用 $\pi(H) + 1$ 种颜色用染色算法对 $H (p \geq 4)$ 中所有 2 度点所关联的边进行着色, 又通过分析 3 度点的色集合, 对个别边进行调色之后, 可以满足 H 的点可区别边

① 收稿日期: 2017-11-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(11461038, 61163010); 甘肃省自然科学基金项目(甘 1212RJZA039).

作者简介: 王文杰(1979-), 男, 副教授, 主要从事图论与组合优化的研究.

着色的. 当 $p \leq 3$ 时, 用 $\pi(H)$ 种颜色对 H 的边进行着色, 并给出具体的染色方法, 从而证明 H 的点可区别边着色也满足文献[6]中的猜想.

定义 1^[6] 对图 G , 设映射 $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 满足对 $\forall uv, uw \in E(G)$, 有 $f(uv) \neq f(uw)$, 则称 f 为 G 的 k -正常边染色, 记为 k -PEC. 若图 $G(V, E)$ 不含孤立边, 且最多有一个孤立点, 且满足对 $\forall u, v \in V(G)$, 如果 $u \neq v$, 有 $C(u) \neq C(v)$ 成立, 则称 f 为 G 的 k -点可区别边染色, 记为 k -VDEC. 记 $\chi'_{ed}(G) = \min\{k: G \text{ 有 } k\text{-VDEC}\}$ 是图 G 的点可区别边色数, 其中 $C(u) = \{f(uv): uv \in E(G)\}$. 特别地, 若对任意 u, v 满足 $d(u) = d(v) = i$, 均有 $C(u) \neq C(v)$, 则称 f 为关于 G 的 i 度点的点可区别边染色. 显然对于任意图 $G(V, E)$ 的点可区别边染色, 均有 $\chi'_{ed}(G) \geq \pi(G)$ 成立.

1 算法设计

$p(p \geq 1)$ 阶 T-型六角系统 H 是由 2 度点和 3 度点组成的, 其中 $n_2 = 6p + 6, n_3 = 6p$. 它的边组合度为

$$\pi(H) = \min\left\{\theta \in \mathbb{N}: \binom{\theta}{2} \geq 6p + 6, \binom{\theta}{3} \geq 6p\right\}$$

由于当 $\theta \geq 5$ 时, $\binom{\theta}{3} \geq \binom{\theta}{2}$, 而对 $p \geq 1$, 都有 $\theta \geq 5$ 成立, 因此

$$\pi(H) = \min\left\{\theta \in \mathbb{N}: \binom{\theta}{2} \geq 6p + 6\right\}$$

此时 $\pi(H) = k \cdot \left\lceil \frac{1 + \sqrt{48p + 49}}{2} \right\rceil$.

接下来将给出一个染色的算法, 对 $p(p \geq 4)$ 阶 T-型六角系统 H 的所有 2 度点相关联的边进行着色, 直到没有边剩余.

首先把 $\binom{k}{2}$ 种 2 色集合按顺序排列出来, 如图 1.

1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	...	1,k-1	1,k
	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	...	2,k-1	2,k
		3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	...	3,k-1	3,k
			4,5	4,6	4,7	4,8	...	4,k-1	4,k
				5,6	5,7	5,8	...	5,k-1	5,k
					6,7	6,8	...	6,k-1	6,k
						7,8	...	7,k-1	7,k
								⋮	
									k-1,k

图 1 $\binom{k}{2}$ 种 2 色集合

根据图 1 中色集合的排列, 得到如下染色序列, 并记 $c(i)$ 为上述序列中第 i 个位置所对应的颜色:

1,2,1,3,1,4,1,5,1,6,1,7,1,8, ..., 1,k-1,1,k;

2,3,2,4,2,5,2,6,2,7,2,8, ..., 2,k-1,2,k;

3,4,3,5,3,6,3,7,3,8, ..., 3,k-1,3,k;

4,5,4,6,4,7,4,8, ..., 4,k-1,4,k;

...

k-1,k.

其次, 将 H 的各个分支按逆时针方向标记为 H_1, H_2, H_3 , 将中心六边形的各顶点按逆时针方向依次

标记为 $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$, 再分别对各分支的顶点进行标号, 如图 2, 其中 $t = 2p - 2$.

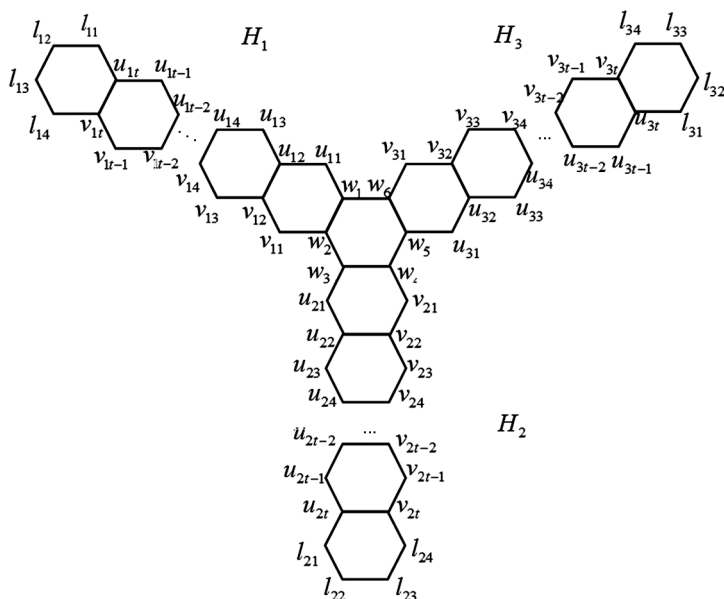


图 2 H 各分支的顶点标号

1.1 $p (p \geq 10)$ 阶 H 的点可区别边染色

算法 1

输入: $p (p \geq 10)$ 阶 T-型六角系统 H.

输出: 关于 H 的所有 2 度点可区别 $k + 1$ 边着色.

步骤 1 把 $u_{2t}l_{21}l_{22}l_{23}l_{24}v_{2t}$ 依次赋予颜色 2, 3, 4, 5, 1; 把 $u_{3t}l_{31}l_{32}l_{33}l_{34}v_{3t}$ 依次赋予颜色 1, 4, 2, 5, 3.

步骤 2 去掉图 1 中前 4 列的 10 个 2 色集合 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$ 之后, 再重新排序, 得到新序列如下:

- 1, 6, 1, 7, 1, 8, ..., 1, $k - 1, 1, k$;
- 2, 6, 2, 7, 2, 8, ..., 2, $k - 1, 2, k$;
- 3, 6, 3, 7, 3, 8, ..., 3, $k - 1, 3, k$;
- 4, 6, 4, 7, 4, 8, ..., 4, $k - 1, 4, k$;
- ...
- 5, 6, 5, 7, 5, 8, ..., 5, $k - 1, 5, k$;
- 6, 7, 6, 8, 6, $k - 1, 6, k$;
- 7, 8, 7, $k - 1, 7, k, \dots, k - 1, k$.

容易看出对任意 i 均满足 $c(i) \neq c(i + 1)$. 当 i 是偶数时, $c(i) \geq 6, c(i) > c(i - 1), c(i) \neq c(i + 2)$; 当 i 是奇数时, $c(i)$ 是递增函数.

步骤 3 令 $i = 1$.

步骤 4 令 $P_{(1)} = w_1u_{11}u_{12}u_{13}u_{14} \cdots u_{1t-1}u_{1t}l_{11}l_{12}, P_{(2)} = l_{13}l_{14}v_{1t}v_{1t-1} \cdots v_{14}v_{13}v_{12}v_{11}w_2, P_{(3)} = w_3u_{21}u_{22}u_{23}u_{24} \cdots u_{2t-1}u_{2t}, P_{(4)} = v_{2t}v_{2t-1} \cdots v_{24}v_{23}v_{22}v_{21}w_4, P_{(5)} = w_5u_{31}u_{32}u_{33}u_{34} \cdots u_{3t-1}u_{3t}, P_{(6)} = v_{3t}v_{3t-1} \cdots v_{34}v_{33}v_{32}v_{31}w_6$. 此时对路 $P_{(1)}, P_{(2)}, P_{(3)}, P_{(4)}, P_{(5)}, P_{(6)}$ 进行边着色. 记 u 为路 $P_{(i)} (i = 1, \dots, 6)$ 中的任意点, u' 为点 u 的后继顶点. 令 $u = w_1$, 则 $u' = u_{11}$. 把边 uu' 染以 $c(i)$ 色, 此时令 $u = u', i = i + 1$.

步骤 5 若 $u = l_{12}$, 则说明路 $P_{(1)}$ 被染完, 执行.

令 $u = l_{13}, u' = l_{14}$. 将边 uu' 染以 $c(i)$ 色. 此时令 $u = u', i = i + 1$.

若 $u = w_2$, 则说明路 $P_{(2)}$ 被染完, 执行.

令 $u = w_3, u' = u_{21}$. 将边 uu' 染以 $c(i)$ 色. 此时令 $u = u', i = i + 1$.

若 $u = u_{2t}$, 则说明路 $P_{(3)}$ 被染完, 执行.

令 $u = v_{2t}$, $u' = v_{2t-1}$. 将边 uu' 染以 $c(i)$ 色. 此时令 $u = u'$, $i = i + 1$.

若 $u = w_4$, 则说明路 $P_{(4)}$ 被染完, 执行.

令 $u = w_5$, $u' = u_{31}$. 将边 uu' 染以 $c(i)$ 色. 此时令 $u = u'$, $i = i + 1$.

若 $u = u_{3t}$, 则说明路 $P_{(5)}$ 被染完, 执行.

令 $u = v_{3t}$, $u' = v_{3t-1}$. 将边 uu' 染以 $c(i)$ 色. 此时令 $u = u'$, $i = i + 1$.

若 $u = w_6$, 则说明路 $P_{(6)}$ 被染完.

结束.

步骤 6 引入新色 $k + 1$, 将边 $l_{12}l_{13}$ 染以 $k + 1$ 色.

通过上述算法 1, 能够得到一个关于 T-型六角系统 H 的所有 2 度点的点可区别 $(k + 1)$ -边染色. 将 $w_1w_2w_3w_4w_5w_6w_1$ 依次赋予颜色 $4, 1, 2, 3, 2, 5$. 此时对于 T-型六角系统 H , 只有边 $u_{i2}v_{i2}, u_{i4}v_{i4}, \dots, u_{i(i-2)}v_{i(i-2)}, u_{ii}v_{ii}$ ($i = 1, 2, 3$) 没有被染色, 又因这些边互不相交, 所以可以用新色 $k + 1$ 对其同时进行着色.

下面对 3 度点 w_i ($i = 1, \dots, 6$) 进行分析, 可设 $C(w_1) = \{4, 5, a\}$, $C(w_2) = \{1, 4, b\}$, $C(w_3) = \{1, 2, d\}$, $C(w_4) = \{2, 3, f\}$, $C(w_5) = \{2, 3, g\}$, $C(w_6) = \{2, 5, h\}$. 由于染色算法的顺序性且路 P_i ($i = 1, \dots, 6$) 均为偶数阶, 则 $b \neq d, f \neq g$, 且 $a = 1; b, f, h \geq 6; d \geq 3; g \geq 4$. 否则, 分别有:

$$2(k - 5) > \frac{4p}{12p - 8} \left(\binom{k}{2} - 10 - (k - 1) \right) > \frac{k^2 - 3k - 18}{6}$$

$$3(k - 5) > \frac{8p - 4}{12p - 8} \left(\binom{k}{2} - 10 - (k - 1) \right) > \frac{k^2 - 3k - 18}{3}$$

成立, 即分别有:

$$k^2 - 15k + 42 < 0$$

$$k^2 - 12k + 27 < 0$$

此时, 分别有 $k < \frac{15 + \sqrt{57}}{2}$, $k < 9$. 不符合题意. 于是点 w_i 是正常边染色且色集合均可区分. 又因点 w_i ($i = 1, \dots, 6$) 的色集合不含 $k + 1$ 色, 于是点 w_i 与其他 3 度点均可区分.

上述染色算法对任意的 u_{ij}, v_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 2, 4, 6, \dots, t - 2, t$) 均满足 $C(u_{ij}) \neq C(v_{ij})$, 且除了点 $u_{2t}, v_{2t}, u_{3t}, v_{3t}$ 外, 其他点的色集合均可互相区别.

下面考虑 $u_{2t}, v_{2t}, u_{3t}, v_{3t}$ 这 4 个三度点的色集合, 对 $u_{2t}v_{2t}, u_{3t}v_{3t}$ 两条边进行调色.

分别设边 $v_{3t-2}v_{3t-1}, v_{3t-1}v_{3t}, u_{3t-1}u_{3t}, v_{2t-2}v_{2t-1}, v_{2t-1}v_{2t}, u_{2t-1}u_{2t}$ 上的颜色依次为: $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$. 由于 $x_1 \neq x_2, x_1 \neq x_3$ 且 $x_1 \geq 6$, 于是可以用颜色 x_1 对 $u_{3t}v_{3t}$ 正常染色, 此时点 v_{3t} 的色集合为 $\{3, x_1, x_2\}$, u_{3t} 的色集合为 $\{1, x_1, x_3\}$, 又由于 $x_2 \geq 4, x_3 \geq 6$, 于是除了点 u_{2t}, v_{2t} 外均可区别. 同理可以用颜色 y_1 对 $u_{2t}v_{2t}$ 正常染色, 此时点 v_{2t} 的色集合为 $\{1, y_1, y_2\}$, u_{2t} 的色集合为 $\{2, y_1, y_3\}$, 其中 $y_1, y_3 \geq 6, y_2 \geq 3$. 容易看出, u_{2t} 的色集合与其他点的均可区分, 而点 v_{2t} 的色集合有可能与点 u_{3t} 或点 w_2 的区分不开. 根据染色序列的性质能够得到 $x_1, x_3 > y_2$, 于是点 v_{2t} 的色集合与点 u_{3t} 的一定可区别. 若点 v_{2t} 的色集合与点 w_2 的相同, 此时取颜色 $c \geq 6$ 且不同于 b, y_2, y_3 即可. 又由于 $p \geq 10$, 于是 $\chi'_{\text{nd}}(H) \geq \pi(H) = 12$, 因此颜色 c 的取法至少有 4 种可以对边 $u_{2t}v_{2t}$ 正常着色.

至此, 就用算法 1 得到了 p ($p \geq 10$) 阶 T-型六角系统 H 的 $(k + 1)$ -点可区别边染色.

1.2 p ($4 \leq p \leq 9$) 阶 H 的点可区别边染色

当 $4 \leq p \leq 9$ 时, $k = \pi(H)$, 于是 $9 \leq k \leq 12$, 其算法与算法 1 类似, 这里不再赘述, 只需调整部分颜色, 并将 $w_1w_2w_3w_4w_5w_6w_1$ 依次赋予颜色 $2, 5, 4, 2, 3, 4$. 此时 $d \leq 3$. 若 $d \geq 4$, 则

$$4(k - 5) \leq \frac{4p}{12p - 8} \left(\binom{k}{2} - 10 \right) \leq \frac{2}{5} \left(\binom{k}{2} - 10 \right)$$

于是求得 $k \leq 5$ 或 $k \geq 16$, 矛盾.

2 主要结果

定理 1 对 $p (p \geq 1)$ 阶 T-型六角系统 H , 均有

$$\left\lceil \frac{1 + \sqrt{48p + 49}}{2} \right\rceil \leq \chi'_{vd}(H) \leq \left\lceil \frac{1 + \sqrt{48p + 49}}{2} \right\rceil + 1$$

证 由于

$$\pi(H) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \binom{k}{2} \geq 6p + 6 \right\}$$

求得

$$\pi(H) = \left\lceil \frac{1 + \sqrt{48p + 49}}{2} \right\rceil$$

于是

$$\left\lceil \frac{1 + \sqrt{48p + 49}}{2} \right\rceil \leq \chi'_{vd}(H)$$

首先, 分别给出 $p = 1, 2, 3$ 时的 p 阶六角系统 H 的点可区别边染色, 如图 3.

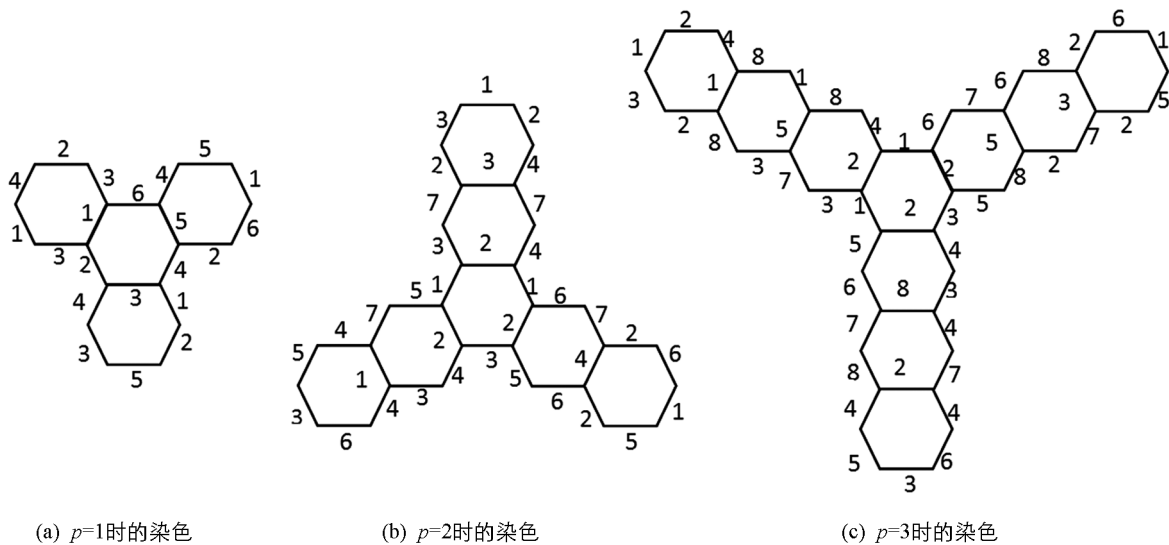


图 3 $p = 1, 2, 3$ 时 p 阶六角系统 H 的点可区别边染色

$p = 1$ 时, $\pi(H) = 6, \chi'_{vd}(H) = 6$;

$p = 2$ 时, $\pi(H) = 7, \chi'_{vd}(H) = 7$;

$p = 3$ 时, $\pi(H) = 8, \chi'_{vd}(H) = 8$.

因此当 $p = 1, 2, 3$ 时, 满足题意

$$\chi'_{vd}(H) = \left\lceil \frac{1 + \sqrt{48p + 49}}{2} \right\rceil$$

当 $p \geq 4$ 时, 由算法 1 可得

$$\chi'_{vd}(H) \leq \pi(H) + 1 = \left\lceil \frac{1 + \sqrt{48p + 49}}{2} \right\rceil + 1$$

至此, 就得到了 $p (p \geq 1)$ 阶 T-型六角系统 H 的 $(k + 1)$ -点可区别边染色, 它的点可区别边色数满足

$$\chi'_{vd}(H) \leq \pi(H) + 1 = \left\lceil \frac{1 + \sqrt{48p + 49}}{2} \right\rceil + 1$$

于是定理 1 得证. 因此 $p(p \geq 1)$ 阶 T-型六角系统 H 的点可区别边染色符合文献[6]中的猜想.

参考文献:

- [1] DOBRYNIN A A, GUTMAN I, KLAVŽAR S, et al. Wiener Index of Hexagonal Systems [J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2002, 72(3): 247–294.
- [2] CHEN A, XIONG X, LIN F. Explicit Relation Between the Wiener Index and the Edge-Wiener Index of the Catacondensed Hexagonal Systems [J]. Applied Mathematics & Computation, 2016, 273: 1100–1106.
- [3] CRUZ R, GIRALDO H, RADA J. Extremal Values of Vertex-Degree Topological Indices Over Hexagonal Systems [J]. MATCH Commun Math Comput Chem, 2013, 70(2): 501–512.
- [4] BERROCAL L, OLIVIERI A, RADA J. Extremal Values of Vertex-Degree-Based Topological Indices Over Hexagonal Systems with Fixed Number of Vertices [J]. Applied Mathematics & Computation, 2014, 243(2): 176–183.
- [5] BURRIS A C. Vertex-Distinguishing Edge-Colorings [D]. Memphis: Memphis State University, 1993.
- [6] BURRIS A C, SCHELP R H. Vertex-Distinguishing Proper Edge-Colorings [J]. Journal of Graph Theory, 1997, 26(2): 73–82.
- [7] LIU B, LIU G. Vertex-Distinguishing Edge Colorings of Graphs with Degree Sum Conditions [J]. Graphs and Combinatorics, 2010, 26(6): 781–791.
- [8] YAO B, CHEN X E, SHAN S L. On Equitable Vertex Distinguishing Edge Colorings of Trees [J]. Acta Mathematica Scientia, 2013, 33(3): 621–630.

Vertex Distinguishing Proper Edge Coloring of T-Shaped Hexagonal Systems

WANG Wen-jie, HUANG Li-na, LI Mu-chun

School of Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, according to the properties of the T-shaped hexagonal system H and the arrangement of its 2-degree vertices, we give an algorithm of vertex-distinguishing proper edge coloring of 2-degree vertices on $H(p \geq 4)$ by using $\pi(H) + 1$ colors. Then we analyze the color sets of its vertices with degree 3, and the color of some edges incident with those vertices are adjusted. Finally, we obtain that if $p \geq 4$, the vertex distinguishing edge chromatic number of H is no more than $\pi(H) + 1$. In addition, if $p \leq 3$, the specific coloring method is given by using $\pi(H)$ colors. Consequently, we show that the vertex distinguishing edge chromatic number of H is $\pi(H) + 1$ at most.

Key words: T-shaped hexagonal system; vertex-distinguishing proper edge coloring; algorithm

责任编辑 廖 坤
崔玉洁