第 40 卷第 10 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2018年10月
Vol. 40　No. 10　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Oct.　2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.10.014

非线性复微分方程的解与 H_ω^∞ 空间①

孙　煜[1]，　龙见仁[1]，　覃智高[1]，　胡光明[2]

1. 贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550001；2. 北京航空航天大学 数学与系统科学学院，北京 100191

摘要： 利用直接的积分估计，研究非线性复微分方程

$$(f^{(k)})^{n_k}+A_{k-1}(z)(f^{(k-1)})^{n_{k-1}}+\cdots+A_1(z)(f')^{n_1}+A_0(z)f=A_k(z)$$

解的函数空间属性，刻画了方程的解析解，以及它们的导数属于 H_ω^∞ 空间时系数需要满足的条件．改善及推广了已有的相关结果．

关　键　词： 非线性复微分方程；Hardy 空间；解析解；单位圆

中图分类号：O174　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2018)10-0083-06

近年来，关于微分方程的研究已经引起了广泛的关注(参见文献[1－2])．其中一个分支是关于复线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)f'+A_0(z)f=A_k(z) \tag{1}$$

解的性质的研究，主要关注的是方程(1)的解的增长性，其中 $A_j\in\mathscr{H}(D)(j=0,1,\cdots,k)$，$\mathscr{H}(D)=\{f:f$ 在 D 上是解析的$\}$，$D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$．通过 Nevanlinna 理论，文献[3－4]得到了一些关于解的快速增长的结果．文献[5－7]得到了一些关于解的慢速增长结果．文献[8－9]研究了非线性复微分方程

$$(f^{(k)})^{n_k}+A_{k-1}(z)(f^{(k-1)})^{n_{k-1}}+\cdots+A_1(z)(f')^{n_1}+A_0(z)f=A_k(z) \tag{2}$$

解的增长性质，其中 $A_j\in\mathscr{H}(D)(j=0,1,\cdots,k)$，给出了方程(2)的所有解析解属于给定空间(例如 Q_k 空间、Hardy空间等)的一些充分条件．在研究方程(1)的解的慢速增长性中，常用Herold比较定理[10]和一些其它基于 Carleson 测度的方法[7]．本文与以上方法不同，主要基于直接的积分估计．

文献[11]给出了一些使得方程(1)的所有解和它们的导数属于 H_ω^∞ 空间的充分条件，其中

$$H_\omega^\infty=\{f\in\mathscr{H}(D):\|f\|_{H_\omega^\infty}=\sup_{z\in D}|f(z)|\cdot\omega(z)<\infty\}$$

ω 是一个权重函数，满足 $\omega:D\longrightarrow(0,\infty)$ 是有界可测的．如果对于所有的 $z\in D$，有 $\omega(z)=\omega(|z|)$，则称 ω 是径向的．若对于所有的 $p\in(0,\infty)$，有 $\omega(z)=(1-|z|)^p$，则 $H_\omega^\infty=H_p^\infty$．令

$$\omega(z)=\omega_a^{h_1}(z)\omega_b^{h_2}(z)\qquad h_1,h_2\in\mathbb{N}$$

其中 $\mathbb{N}$ 为自然数集，$\omega_a(z)=\left(\log\left(\dfrac{\mathrm{e}}{1-|z|}\right)\right)^{-1}$，$\omega_b(z)=1-|z|$．

在本文中，总假设径向权重 $\omega:D\longrightarrow(0,\infty)$ 满足下面两个条件：

(f_1) 存在 $M=M(\omega)\in(0,\infty)$，使得

$$\limsup_{s\to1^-}\omega(s)\int_0^s\frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)(1-t)}<M<\infty \tag{3}$$

---

① 收稿日期：2017-11-01
基金项目：国家自然科学基金项目(11501142，11861023)；贵州省科学技术基金项目(黔科合J字[2015] 2112号)．
作者简介：孙　煜(1993-)，女，硕士研究生，主要从事函数论的研究．
通信作者：龙见仁，教授．

(f_2) 存在常数 $\varepsilon \in (0, \infty)$，$m = m(\omega, \varepsilon) \in (0, \infty)$，使得

$$\limsup_{s \to 1^-} \frac{\omega(s)}{\omega\left(\frac{1+\varepsilon s}{1+\varepsilon}\right)} < m \tag{4}$$

由(3)式知，存在 $M_j = M_j(\omega, j) \in (0, M]$ 和 $M_0 = M_0(\omega) \in (0, \infty)$，使得

$$\limsup_{s \to 1^-} \omega(s)(1-s)^{j-1} \int_0^s \frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)(1-t)^j} < M_j \qquad j = 1, 2, \cdots, k \tag{5}$$

和

$$\omega(r) \int_0^r \frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)(1-t)} < m_0 \qquad r \in (0, 1) \tag{6}$$

为方便描述，特作以下记号：

$$\omega_p(z) = \omega(z)(1-|z|)^p$$

$$\dot{\omega}_{h(1,2),n(k,j)}(z) = (\omega_a(z))^{h_1(n_k - n_j)}(\omega_b(z))^{(h_2+k)n_k-(h_2+j)n_j}$$

$j = 0$ 时，

$$\dot{\omega}_{h(1,2),n(k,0)}(z) = (\omega_a(z))^{h_1(n_k-1)}(\omega_b(z))^{(h_2+k)n_k-h_2}$$

$$\widetilde{\omega}_{h(1,2),n(k,0)}(z) = (\omega_a(z))^{h_1(n_k-1)}(\omega_b(z))^{(h_2+k-1)n_k-h_2}$$

记号中的 ω，ω_a，ω_b，ω_p，$\dot{\omega}_{h(1,2),n(k,j)}$，$\widetilde{\omega}_{h(1,2),n(k,j)}$ 均为径向权重，其中 $n_0 = 1$，$n_j \geqslant 1 (j = 1, 2, \cdots, k)$，$n_j \leqslant n_k (j = 1, 2, \cdots, k-1)$. 值得注意的是，若方程(2)是线性的，即 $n_k = n_j = 1 (j = 0, \cdots, k)$，则

$$\dot{\omega}_{h(1,2),n(k,j)}(z) = (1-|z|)^{k-j} \qquad \widetilde{\omega}_{h(1,2),n(k,j)}(z) = (1-|z|)^{k-j-1}$$

类似 H_ω^∞ 的定义，我们定义如下函数空间：

$$H^\infty_{\dot{\omega}_{h(1,2),n(k,j)}} = \left\{ f \in \mathscr{H}(D): \| f \|_{H^\infty_{\dot{\omega}_{h(1,2),n(k,j)}}} = \sup_{z \in D} | f(z) | \dot{\omega}_{h(1,2),n(k,j)}(z) < \infty \right\}$$

$$H^\infty_{\widetilde{\omega}_{h(1,2),n(k,j)}} = \left\{ f \in \mathscr{H}(D): \| f \|_{H^\infty_{\widetilde{\omega}_{h(1,2),n(k,j)}}} = \sup_{z \in D} | f(z) | \widetilde{\omega}_{h(1,2),n(k,j)}(z) < \infty \right\}$$

1 引理和主要结果

引理 1[12] 设 $n = 1, 2, \cdots, N$，$a_n \geqslant 0$，则：

$$\left(\sum_{n=1}^n a_n\right)^p \leqslant \left(\sum_{n=1}^n a_n{}^p\right) \qquad 0 < p \leqslant 1$$

$$\left(\sum_{n=1}^n a_n\right)^p \leqslant N^{p-1}\left(\sum_{n=1}^n a_n{}^p\right) \qquad 1 \leqslant p < \infty$$

引理 2[11] 设 $\omega: \Delta \longrightarrow (0, \infty)$ 是一个径向权重且满足(3)式，则对于 $f \in \mathscr{H}(D)$ 有

$$| f(z) | \omega(z) \leqslant Q_k \sup_{|\xi| \leqslant |z|} (| f^{(k)}(\xi) | \omega(\xi)(1-|\xi|)^k) + C \qquad z \in D, k \in \mathbb{N}$$

其中 $C \in [0, \infty)$ 为不依赖于 z 的常数，$Q_k = \prod_{j=1}^k M_j$，M_j 为(5)式所定义.

引理 3[11] 设 $\omega: D \to (0, \infty)$ 是一个径向权重，且存在常数 $\varepsilon \in (0, \infty)$，$m = m(\omega, \varepsilon) \in (0, \infty)$ 满足(4)式，则对于 $f \in \mathscr{H}(D)$ 有

$$| f^{(k)}(z) | \omega(z)(1-|z|)^k \leqslant k!\,(1+\varepsilon)^k m \sup_{|\xi| = \rho} | f(\xi) | \omega(\rho) + C \qquad z \in D, k \in \mathbb{N}$$

其中 $\rho = \rho(\varepsilon, |z|) = \dfrac{1+\varepsilon|z|}{1+\varepsilon}$，$C \geqslant 0$ 为不依赖于 z 的常数.

定义如下扩张函数：设 $f \in \mathscr{H}(D)$，令 $f_r(z) = f(rz)$，其中 $z \in D$，$r \in [0, 1)$.

引理 4[11] 设 $\omega: D \longrightarrow (0, \infty)$ 是一个径向权重，且存在常数 $\varepsilon \in (0, \infty)$，$m = m(\omega, \varepsilon) \in (0, \infty)$ 满足(4)式. 如果 $\sup_{r \in [0, 1)} \| f_r \|_{H_\omega^\infty} < \infty$，则 $f \in H_\omega^\infty$ 且 $\| f_r \|_{H_\omega^\infty} = \sup_{r \in [0, 1)} \| f_r \|_{H_\omega^\infty}$.

引理 5 设径向权重 $\omega(z) = \omega_a^{h_1}(z)\omega_b^{h_2}(z)$，则 $\omega(z)$ 满足(3)式和(4)式.

证　设 $s\in[0,1)$，$h_1,h_2\in\mathbb{N}$，则由：

$$1-\log(1-s)>-\log(1-s)\qquad\left(\log\left(\frac{\mathrm{e}}{1-s}\right)\right)^{-1}<(-\log(1-s))^{-1}$$

得

$$\left(\log\left(\frac{\mathrm{e}}{1-s}\right)\right)^{-h_1}<(-\log(1-s))^{-h_1}\tag{7}$$

做辅助函数 $F(s)=(\log(1-s))^{h_1}(1-s)^{-h_2}$，则

$$F'(s)=-h_1(\log(1-s))^{h_1-1}(1-s)^{h_2-1}-h_2(\log(1-s))^{h_1}(1-s)^{h_2-1}$$

两边求积分，得

$$-(\log(1-r))^{h_1}(1-r)^{-h_2}=h_1\int_0^r(\log(1-s))^{h_1-1}(1-s)^{h_2-1}\mathrm{d}s+h_2\int_0^r(\log(1-s))^{h_1}(1-s)^{h_2-1}\mathrm{d}s$$

两边同乘 $-(\log(1-r))^{-h_1}(1-r)^{h_2}$，得

$$h_1(\log(1-r))^{-h_1}(1-r)^{h_2}\int_0^r(\log(1-s))^{h_1-1}(1-s)^{h_2-1}\mathrm{d}s+$$

$$h_2(\log(1-r))^{-h_1}(1-r)^{h_2}\int_0^r(\log(1-s))^{h_1}(1-s)^{h_2-1}\mathrm{d}s=-1$$

重复以上过程 h_1 次，得

$$\lim_{r\to1^-}\sup(\log(1-r))^{-h_1}(1-r)^{h_2}\int_0^r(\log(1-s))^{h_1}(1-s)^{h_2-1}\mathrm{d}s<\infty$$

由(7)式得

$$\lim_{r\to1^-}\sup\omega(r)\int_0^r\frac{\mathrm{d}s}{\omega(s)(1-s)}<\infty$$

$$\lim_{r\to1^-}\frac{\omega(r)}{\omega\left(\dfrac{1+\varepsilon r}{1+\varepsilon}\right)}=\lim_{r\to1^-}\frac{(\omega_a(r))^{h_1}(\omega_b(r))^{h_2}}{\left(\omega_a\left(\dfrac{1+\varepsilon r}{1+\varepsilon}\right)\right)^{h_1}\left(\omega_b\left(\dfrac{1+\varepsilon r}{1+\varepsilon}\right)\right)^{h_2}}=$$

$$\lim_{r\to1^-}\frac{\left(\log\dfrac{\mathrm{e}}{1-r}\right)^{-h_1}}{\left(\log\dfrac{\mathrm{e}}{1-\dfrac{1+\varepsilon r}{1+\varepsilon}}\right)^{-h_1}}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{h_2}=$$

$$\lim_{r\to1^-}\left(\frac{1-\log\left(1-\dfrac{1+\varepsilon r}{1+\varepsilon}\right)}{1-\log(1-r)}\right)^{h_1}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{h_2}=$$

$$\lim_{r\to1^-}\left(1-\frac{\log\varepsilon+\log(1+\varepsilon)}{1-\log(1-r)}\right)^{h_1}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{h_2}<\infty$$

于是径向权重 ω 满足(3)式和(4)式.

本文的主要目的是研究方程(2)的解析解，以及它们的导数属于空间 H_ω^∞ 时系数需要满足的条件，主要证明了下面的结果：

定理 1　设径向权重 ω 在单位圆区域 D 上满足(3)式和(4)式. 如果 $A_j\in H^{\infty}_{\omega_{h(1,2),n(k,j)}}$ $(j=0,1,\cdots,k)$，且

$$E=Q_k\left(\|A_0\|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\omega_{h(1,2),n(k,0)}}}+\sum_{j=1}^{k-1}j!\,(1+\varepsilon)^j m\|A_j\|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\omega_{h(1,2),n(k,j)}}}\right)<1$$

其中 $Q_k=\prod_{j=1}^{k}M_j$，M_j 为(5)式所定义，m 和 ε 为(4)式所定义，则方程(2)的所有解析解属于 H_ω^∞.

定理 2　设径向权重 ω 在单位圆区域 D 上满足(3)式和(4)式. 如果 $A_j\in H^\infty_{\tilde{\omega}_{n,k,j}}$ $(j=0,1,\cdots,k)$，且

$$F = Q_{k-1}\left(\sup_{z \in D} \omega(z) \| A_0 \|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\vartheta_{h(1,2),n(k,0)}}} \int_0^{|z|} \frac{\mathrm{d}r}{\omega(r)} + \| A_1 \|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\vartheta_{h(1,2),n(k,1)}}} + \right.$$

$$\left. \sum_{j=2}^{k-1} (j-1)!\ (1+\varepsilon)^{j-1} m \| A_{j+1} \|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\vartheta_{h(1,2),n(k,j)}}} \right) < 1$$

其中 $Q_k = \prod_{j=1}^{k} M_j$，$M_j$ 为(5)式所定义，m 和 ε 为(4)式所定义，则方程(2)的每个解析解的导数属于 H^∞_ω.

2　主要结果的证明

定理 1 的证明　设 f 是方程(2)的解析解，则

$$(f_r^{(k)}(z))^{n_k} + \sum_{j=0}^{k-1} B_j(z)(f_r^{(j)}(z))^{n_j} = 0 \qquad z \in D \tag{8}$$

其中 $B_j(z) = B_j(z, r) = r^{kn_k - jn_j} A_j(rz)$，$r \in [0, 1)$. 由引理 5 知，$\omega$ 满足(3)式和(4)式. 再由(8)式和引理 2，有

$$| f_r(z) | \omega(z) \leqslant Q_k \sup_{|\xi| \leqslant |z|} (| f_r^{(k)}(\xi) | (\omega_a(\xi))^{h_1} (1 - |\xi|)^{k+h_2}) + C_{t_1} \leqslant$$

$$Q_k \sup_{|\xi| \leqslant |z|} \left(\left| \sum_{j=0}^{k-1} B_j(\xi)(f_r^{(j)}(\xi))^{n_j} \right| \right)^{\frac{1}{n_k}} (\omega_a(\xi))^{h_1} (1 - |\xi|)^{k+h_2} + C_{t_1}$$

运用引理 1，有

$$| f_r(z) | \omega(z) \leqslant Q_k \sup_{|\xi| \leqslant |z|} \sum_{j=0}^{k-1} | B_j(\xi) |^{\frac{1}{n_k}} | f_r^{(j)}(\xi) |^{\frac{n_j}{n_k}} (\omega_a(\xi))^{h_1} (1 - |\xi|)^{k+h_2} + C_{t_1} \leqslant$$

$$Q_k \sup_{|\xi| \leqslant |z|} \Big[(| B_0(\xi) | (\omega_a(\xi))^{h_1(n_k - 1)} (1 - |\xi|)^{h_2(n_k - 1) + kn_k})^{\frac{1}{n_k}} \| f_r \|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_\omega} +$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} | B_j(\xi) |^{\frac{1}{n_k}} | f_\rho^{(j)}(\xi) |^{\frac{n_j}{n_k}} (\omega_a(\xi))^{h_1} (1 - |\xi|)^{h_2 + k} \Big] + C_{t_1} \leqslant$$

$$Q_k \| B_0 \|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\dot{\Psi}_{n,k,0}}} \cdot \| f_r \|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_\omega} +$$

$$Q_k \sup_{|\xi| \leqslant |z|} \sum_{j=1}^{k-1} | B_j(\xi) |^{\frac{1}{n_k}} | f_r^{(j)}(\xi) |^{\frac{n_j}{n_k}} (\omega_a(\xi))^{h_1} (1 - |\xi|)^{k+h_2} + C_{t_1}$$

再运用引理 3，得

$$| f_r(z) | \omega(z) \leqslant Q_k \| B_0 \|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\dot{\omega}_{h(1,2),n(k,0)}}} \| f_r \|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_\omega} +$$

$$Q_k \sup_{|\xi| \leqslant |z|} \sum_{j=1}^{k-1} (| B_j(\xi) | (\omega_a(\xi))^{h_1(n_k - n_j)} (1 - |\xi|)^{(h_2 + k)n_k - (h_2 + j)n_j})^{\frac{1}{n_k}} \cdot$$

$$(j!\ (1+\varepsilon)^j m \sup_{|\xi| = |\rho|} | f_r(\xi) | \omega(\xi) + C_j)^{\frac{n_j}{n_k}} + C_{t_1} \leqslant$$

$$Q_k \Big[\| B_0 \|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\dot{\omega}_{h(1,2),n(k,0)}}} \| f_r \|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_\omega} +$$

$$\sup_{|\xi| \leqslant |z|} \sum_{j=1}^{k-1} \| B_j \|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\dot{\omega}_{h(1,2),n(k,j)}}} j!\ (1+\varepsilon)^j m \| f_r \|^{\frac{n_j}{n_k}}_{H^\infty_\omega} + C_j \Big] + C_{t_1} \tag{9}$$

其中 $C_j, C_{t_1} \in (0, \infty)$ 为不依赖于 z 的常数($j = 1, \cdots, k-1$). 若 $\| f_r \|_{H^\infty_\omega} \leqslant 1$，则结论显然成立. 因此设 $\| f_r \|_{H^\infty_\omega} > 1$，由(9)式得

$$| f_r(z) | \omega(z) \leqslant E \| f_r \|_{H^\infty_\omega} + C_{t_1}$$

故

$$\sup_{r \in [0, 1)} \| f_r \|_{H^\infty_\omega} \leqslant \frac{C_{t_1}}{1 - E} < \infty$$

由引理 4 有 $f \in H_\omega^\infty$.

定理 2 的证明　设 f 是方程(2)的解析解，由

$$f(z)=\int_0^z f'(\xi)\mathrm{d}\xi+f(0) \qquad z\in D$$

得

$$\begin{aligned}|f(z)|\omega(z)\leqslant&\int_0^{|z|}\frac{|f'(\xi)|\omega(\xi)}{\omega(\xi)}|\mathrm{d}\xi|\omega(z)+|f(0)|\omega(z)\leqslant\\&\sup_{|\xi|\leqslant|z|}|f'(\xi)|\omega(\xi)\int_0^{|z|}\frac{\mathrm{d}r}{\omega(r)}\omega(z)+|f(0)|\omega(z) \qquad z\in D\end{aligned}\tag{10}$$

运用引理 2 把 f 和 k 分别替换成 f' 和 $k-1$，则有

$$|f_r{}'(z)|\omega(z)\leqslant Q_{k-1}\sup_{|\xi|\leqslant|z|}(|f_r{}^{(k)}(\xi)|\omega_{k-1}(\xi))+C_{t_2}\tag{11}$$

由引理 5，ω 满足(3)式和(4)式，结合引理 1、引理 3、(8)，(10)和(11)式，得

$$\begin{aligned}|f_r{}'(z)|\omega(z)\leqslant&Q_{k-1}\sup_{|\xi|\leqslant|z|}\sum_{j=0}^{k-1}|B_j(\xi)|^{\frac{1}{n_k}}|f_r^{(j)}(\xi)|^{\frac{n_j}{n_k}}\omega(\xi)(1-|\xi|)^{k-1}+C_{t_2}\leqslant\\&Q_{k-1}\sup_{|\xi|\leqslant|z|}\Big[\|B_0(\xi)\|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\delta_{h(1,2),n(k,0)}}}\int_0^{|z|}\frac{\mathrm{d}r}{\omega(r)}\omega(z)\|f_r{}'\|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_\omega}+\\&\|B_1(\xi)\|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\delta_{h(1,2),n(k,1)}}}\|f_r{}'\|^{\frac{n1}{n_k}}_{H^\infty_\omega}+\\&\sum_{j=2}^{k-1}\|B_j(\xi)\|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\delta_{h(1,2),n(k,0)}}}(j-1)!\ (1+\varepsilon)^{j-1}m\|f_r{}'\|^{\frac{n_j}{n_k}}_{H^\infty_\omega}+C_j\Big]+\\&C_{t_2}+C_{t_{21}}\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $C_{t_{21}}=\|B_0(\xi)\|^{\frac{1}{n_k}}_{H^\infty_{\delta_{h(1,2),n(k,0)}}}|f(0)|^{\frac{1}{n_k}}\omega(\xi)^{\frac{1}{n_k}}$，$C_j,C_{t_2}\in(0,\infty)$ 为不依赖于 z 的常数，$j=0,\cdots,k-1$. 若 $\|f_r{}'\|_{H^\infty_\omega}\leqslant 1$，则结论显然成立. 因此设 $\|f_r{}'\|_{H^\infty_\omega}>1$，由(12)式得

$$|f_r{}'(z)|\omega(z)\leqslant F\|f'\|_{H^\infty_\omega}+C_{t_2}+C_{t_{21}}$$

故

$$\sup_{r\in[0,1)}\|f'\|_{H^\infty_\omega}\leqslant\frac{C_{t_2}+C_{t_{21}}}{1-F}<\infty$$

由引理 4 有 $f'\in H_\omega^\infty$.

参考文献：

[1] 贾秀梅，李永军，杨继超. 更一般的常系数线性差分微分方程的解 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(1)：79－83.

[2] 崔亚琼，康淑瑰，陈慧琴. 非线性分数阶微分方程的一个正解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(8)：9－12.

[3] BENBOURENANE D，SONS L. On Global Solutions of Complex Differential Equations in the Unit Disc [J]. Complex Var Theory Appl，2004，49：913－925.

[4] CAO T，YI H. The Growth of Solutions of Linear Differential Equations with Coefficients of Iterated Order in the Unit Disc [J]. J Math Anal Appl，2006，319(1)：278－294.

[5] HEITTOKANGAS J，KORHONEN R，RÄTTYÄ J. Growth Estimates for Solutions of Linear Complex Differential E-quations [J]. Ann Acad Sci Fenn Math，2004，29(29)：233－246.

[6] RÄTTYÄ J. Linear Differential Equations with Solutions in Hardy Spaces [J]. Complex Var Eiliptic Equ，2007，52(9)：785－795.

[7] HEITTOKANGAS J，KORHONEN R，RÄTTYÄ J. Linear Differential Equations with Solutions in the Dirichlet Type Subspace of the Hardy Space [J]. Nagoya Math J，2007，187：91－113.

[8] LI H，LI S. Nonlinear Differential Equation and Analytic Function Spaces [J]. Complex Var Eiliptic Equ，2018，63(1)：136－149.

[9] XIAO L P. Complex Differential Equations with Solutions in the Hardy Spaces [J]. Taiwanese J Math, 2014, 18(3): 909-923.

[10] HEITTOKANGAS J, KORHONEN R, RÄTTYÄ J. Growth Estimates for Solutions of Non-Homogeneous Linear Complex Differential Equations [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2009, 34(1): 145-156.

[11] HUUSKO J M, KORHONEN T, REIJONEN A. Linear Differential Equations with Solutions in the Growth Space H_ω^∞ [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2016, 41(1): 399-416.

[12] DUREN P. Theory of H^p Spaces [M]. New York: Academic Press, 1970.

The Solutions of Nonlinear Complex Differential Equations and H_ω^∞ Space

SUN Yu[1], LONG Jian-ren[1], QIN Zhi-gao[1], HU Guang-ming[2]

1. School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China;

2. School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract: Based on the straightforward integral estimate, the properties of function spaces of solutions of the nonlinear differential equation

$$(f^{(k)})^{n_k} + A_{k-1}(z)(f^{(k-1)})^{n_{k-1}} + \cdots + A_1(z)(f')^{n_1} + A_0(z)f = A_k(z)$$

are studied. The sufficient conditions of the coefficients for the derivatives and analytic solutions of the above equation to be in H_ω^∞ are given in this paper, which improves and extends previous results from Huusko-Korhonen-Reijonen.

Key words: nonlinear complex differential equation; Hardy space; analytic solution; unit disc

责任编辑 廖 坤
崔玉洁