第 40 卷第 10 期 西南大学学报(自然科学版) 2018年10月
Vol. 40 No. 10 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Oct. 2018

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.10.015

带有凹凸非线性项的 Kirchhoff 型方程解的多重性①

王雅琪， 欧增奇

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要: 利用集中紧性原理和对偶喷泉定理，研究了一类带有凹凸非线性项的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=|u|^{4}u+\mu|u|^{q-2}u & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

获得了该方程有无穷多个解. 其中 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中边界光滑的有界开集，且 $a,b>0$，$1<q<2$，$\mu>0$.

关 键 词: Kirchhoff 方程；凹凸非线性项；集中紧性原理；对偶喷泉定理

中图分类号: O176.3　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1673-9868(2018)10-0089-06

考虑如下 Kirchhoff 方程：

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=|u|^{4}u+\mu|u|^{q-2}u & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中边界光滑的有界开集，且 $a,b>0$，$1<q<2$，$\mu>0$. 我们记 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的范数为

$$\|u\|=\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$L^s(\Omega)$ 中的范数为

$$|u|_s=\left(\int_{\Omega}|u|^{s}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}$$

当 $1\leqslant s\leqslant 6$ 时，嵌入 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^s(\Omega)$ 是连续的；当 $1\leqslant s<6$ 时，嵌入是紧的. 此外，最佳 Sobolev 常数为

$$S=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x}{\left(\int_{\Omega}|u|^{6}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}}\tag{2}$$

由于有 $b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x$ 这一项，方程(1)被称为非局部问题. 众所周知，Kirchhoff 型问题起源于文献[1]，作

① 收稿日期：2017-11-01
基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).
作者简介：王雅琪(1990-)，女，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：欧增奇，副教授，硕士研究生导师.

为经典的D'Alembert波动方程在弹性弦的自由振动的推广. 文献[2]给出一个泛函分析结构，Kirchhoff型问题逐渐引起人们的关注. 据我们查阅的文献显示，文献[3]最先将变分法运用到Kirchhoff型问题中. 此后，出现了诸多关于Kirchhoff型问题的优秀结论[1-2,4-9].

当 $N=3$ 时，文献[4-5,10]研究了Kirchhoff型方程正解的存在性和多重性. 文献[10]研究了 $0<q<1$ 时的情形，利用Nehari和Ekeland变分原则的方法，得到了“存在一个仅依赖于 a 的 $T_4(a)>0$，当 $a>0$，$0<\lambda<T_4(a)$ 时，方程至少有一个正解”的结论. 当 b 充分小时，文献[4]利用极小作用原理和山路引理的方法，获得了方程(1)的两个正解. 文献[5]研究了 $a=1$，$q=2$ 时的情形，证得方程(1)具有正的基态解. 受到文献[4-6,10-11]的启发，本文将研究 $\mathbb{R}^3$ 空间中方程(1)多解的存在情况，并得到下面的定理：

定理1 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 有界，并且 $a,b>0$，$1<q<2$，则存在 $\mu^*>0$，使得对 $\forall\,0<\mu<\mu^*$，方程(1)有一列解 $\{u_n\}$，并且 $\varphi_\mu(u_n)<0$，$\varphi_\mu(u_n)\to 0\ (n\to\infty)$.

我们定义 $\varphi_\mu(u)$ 为方程(1)对应的能量泛函，即

$$\varphi_\mu(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{6}\int_\Omega |u|^6\mathrm{d}x-\frac{\mu}{q}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x \qquad \forall\, u\in H_0^1(\Omega) \tag{3}$$

如果 $u\in H_0^1(\Omega)$，且对 $\forall\, v\in H_0^1(\Omega)$，都有

$$a\int_\Omega \nabla u\nabla v\mathrm{d}x+b\|u\|^2\int_\Omega \nabla u\nabla v\mathrm{d}x-\int_\Omega |u|^4uv\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega |u|^{q-2}uv\mathrm{d}x=0$$

则 u 为方程(1)的弱解.

令 X 是自反的可分Banach空间，则存在 $e_i\in X$，$e_j^*=X^*$，使得：

$$X=\overline{\operatorname{span}\{e_i:i=1,2,\cdots\}} \qquad X^*=\overline{\operatorname{span}\{e_j:j=1,2,\cdots\}}$$

且

$$\langle e_j^*,e_i\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

令 $X_j=\operatorname{span}\{e_j\}$，于是 $X=\overline{\bigotimes_{j\geqslant1}X_j}$. 记 $Y_k=\bigoplus_{j=1}^k X_j$，$Z_k=\overline{\bigoplus_{j\geqslant k}X_j}$.

引理1 假设 $a,b,\mu>0$，$1<q<2$，以及 $c<\Lambda-D\mu^{\frac{2}{2-q}}$，则泛函 φ_μ 满足局部 $(\mathrm{PS})_c^*$ 条件，其中：

$$\Lambda=\frac{1}{4}abS^3+\frac{1}{24}b^3S^6+\frac{1}{24}(b^2S^4+4aS)^{\frac{3}{2}}$$

$$D=\frac{2-q}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{2-q}}|\Omega|^{\frac{6-q}{6-3q}}\left(\frac{2q}{aS}\right)^{\frac{q}{2-q}}$$

证 取 $H_0^1(\Omega)$ 中的标准正交基 (e_j)，并且定义 $X_j=\mathbb{R}e_j$. 假设 $\{u_{n_j}\}$ 是泛函 φ_μ 的 $(\mathrm{PS})_c^*$ 序列，即

$$u_{n_j}\in Y_{n_j},\ \varphi_\mu(u_{n_j})\to c,\ \varphi_\mu|'_{Y_{n_j}}(u_{n_j})\to 0 \qquad n_j\to\infty \tag{4}$$

现证明 $\{u_{n_j}\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有收敛子列. 首先，由(3),(4)式、Hölder不等式以及Sobolev不等式，有

$$1+c+o(\|u_{n_j}\|)\geqslant\varphi_\mu(u_{n_j})-\frac{1}{6}\langle\varphi_\mu(u_{n_j}),u_{n_j}\rangle\geqslant$$

$$\frac{a}{3}\|u_{n_j}\|^2+\frac{b}{12}\|u_{n_j}\|^4-\frac{\mu}{S^{\frac{q}{2}}}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{6}\right)|\Omega|^{\frac{6-q}{6}}\|u_{n_j}\|^q \tag{5}$$

由于 $1<q<2$，根据(5)式，可知 $\{u_{n_j}\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 因此，存在 $\{u_{n_j}\}$ 的子列(不妨仍记为 $\{u_{n_j}\}$)以及 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\begin{cases}u_{n_j}\rightharpoonup u & x\in H_0^1(\Omega)\\ u_{n_j}\to u & x\in L^p(\Omega),\ 1\leqslant p<6\\ u_{n_j}(x)\to u(x) & \text{a.e. } x\in\Omega\end{cases}$$

根据第二集中性引理[12]，我们可以找到一个至多可数的指标集 Γ、在 $\mathbb{R}^3$ 中的一个序列 $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$，以及 $\{\eta_k\}_{k\in\Gamma},\{\nu_k\}_{k\in\Gamma}\in\mathbb{R}_+$，使得：

$$|\nabla u_{n_j}|^2 \rightharpoonup \mathrm{d}\eta \geqslant |\nabla u|^2+\sum_{k\in\Gamma}\eta_k\delta_{x_k} \tag{6}$$

$$|u_{n_j}|^6 \rightharpoonup \mathrm{d}\nu = |u|^6+\sum_{k\in\Gamma}\nu_k\delta_{x_k} \tag{7}$$

$$\eta_k \geqslant S\nu_k^{\frac{1}{3}} \tag{8}$$

其中 δ_{x_k} 是在 x_k 上的 Diracdelta 函数. 接下来，我们证明 $\Gamma=\varnothing$. 假设 $\Gamma\neq\varnothing$，不妨设 $k\in\Gamma$，对 $\forall\varepsilon>0$，设 $\psi_\varepsilon^k\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3,[0,1])$ 满足条件 $0\leqslant\psi_\varepsilon^k\leqslant 1$，$|\nabla\psi_\varepsilon^k|\leqslant C$，且：

$$\begin{cases}\psi_\varepsilon^k(x)\equiv 1 & x\in B_\varepsilon(x_k)\\ \psi_\varepsilon^k(x)\equiv 0 & x\in\Omega\backslash B_{2\varepsilon}(x_k)\end{cases}$$

由于$\{\psi_\varepsilon^k u_{n_j}\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上有界，我们有$\langle\varphi_\mu'(u_{n_j}),\psi_\varepsilon^k u_{n_j}\rangle\to 0$，即

$$\begin{aligned}&(a+b\|u_{n_j}\|^2)\left(\int_\Omega u_{n_j}\nabla u_{n_j}\nabla\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u_{n_j}|^2\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x\right)=\\&\int_\Omega|u_{n_j}|^6\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega|u_{n_j}|^q\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x+o(1)\end{aligned} \tag{9}$$

由于$\{u_{n_j}\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上有界，并且由 Hölder 不等式，则存在常数 $C_1,C_2,C_3>0$，有

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n_j\to\infty}(a+b\|u_{n_j}\|^2)\left|\int_\Omega u_{n_j}\nabla u_{n_j}\nabla\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x\right|\leqslant\\&\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n_j\to\infty}C_1\left(\int_{B_\varepsilon(x_k)}|\nabla u_{n_j}|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_{B_\varepsilon(x_k)}|\nabla\psi_\varepsilon^k|^2|u_{n_j}|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\leqslant\\&\lim_{\varepsilon\to0}C_2\left(\int_{B_\varepsilon(x_k)}|\nabla\psi_\varepsilon^k|^2|u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\leqslant\\&\lim_{\varepsilon\to0}C_2\left(\int_{B_\varepsilon(x_k)}|\nabla\psi_\varepsilon^k|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac13}\left(\int_{B_\varepsilon(x_k)}|u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac16}\leqslant\\&\lim_{\varepsilon\to0}C_3\left(\int_{B_\varepsilon(x_k)}|u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac16}=0\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n_j\to\infty}(a+b\|u_{n_j}\|^2)\int_\Omega u_{n_j}\nabla u_{n_j}\nabla\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x=0 \tag{10}$$

由(6) 式，我们可知

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n_j\to\infty}(a+b\|u_{n_j}\|^2)\int_\Omega|\nabla u_{n_j}|^2\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x\geqslant\\&\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n_j\to\infty}\left(a+b\int_\Omega|\nabla u_{n_j}|^2\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x\right)\int_\Omega|\nabla u_{n_j}|^2\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x=\\&\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n_j\to\infty}a\int_\Omega|\nabla u_{n_j}|^2\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n_j\to\infty}b\left(\int_\Omega|\nabla u_{n_j}|^2\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\\&a\eta_k+b\eta_k{}^2\end{aligned} \tag{11}$$

由(7) 式得

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n_j\to\infty}\int_\Omega|u_{n_j}|^6\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x=&\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega|u|^6\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x+\nu_k=\\&\lim_{\varepsilon\to0}\int_{B_\varepsilon(x_k)}|u|^6\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x+\nu_k=\nu_k\end{aligned} \tag{12}$$

由(12) 式得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n_j\to\infty}\int_\Omega |u_{n_j}|^q\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon(x_k)}|u|^q\psi_\varepsilon^k\mathrm{d}x=0 \tag{13}$$

由(10)-(13)式，可推得

$$\nu_k\geqslant a\eta_k+b{\eta_k}^2 \tag{14}$$

和(8)式比较，可得：

(i) $\eta_k=0$；

或

(ii) $\eta_k\geqslant\dfrac{bS^3+S\sqrt{b^2S^4+4aS}}{2}$.

我们证明(ii)不成立. 根据文献[13]的引理 2.2、Hölder 不等式、Sobolev 不等式，以及(6),(7),(14)式，可得

$$\begin{aligned}c=&\lim_{n_j\to\infty}\left(\varphi_\mu(u_{n_j})-\frac{1}{4}\langle\varphi'_\mu(u_{n_j}),u_{n_j}\rangle\right)=\\&\lim_{n_j\to\infty}\left(\frac{a}{4}\|u_{n_j}\|^2+\frac{1}{12}\int_\Omega|u_{n_j}|^6\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{4}\right)\mu\int_\Omega|u_{n_j}|^q\mathrm{d}x\right)\geqslant\\&\frac{a}{4}\|u\|^2+\frac{a}{4}\eta_k+\frac{1}{12}\nu_k+\frac{1}{12}\int_\Omega|u|^6\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{4}\right)\mu\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{a}{4}\eta_k+\frac{1}{12}\nu_k+\frac{a}{4}\|u\|^2-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{4}\right)\mu\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{a}{3}\eta_k+\frac{b}{12}\eta_k^2+\frac{aS}{4}|u|_6^2-\mu\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{4}\right)|\Omega|^{\frac{6-q}{6}}|u|_6^q\end{aligned}$$

若(ii)成立，则

$$\frac{a}{3}\eta_k+\frac{b}{12}\eta_k^2\geqslant\frac{1}{4}abS^3+\frac{1}{24}b^3S^6+\frac{1}{24}(b^2S^4+4aS)^{\frac{3}{2}}$$

为了估计$\dfrac{aS}{4}|u|_6^2-\mu\left(\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{4}\right)|\Omega|^{\frac{6-q}{6}}|u|_6^q$，我们考虑

$$f(t)=\frac{aS}{4}t^2-\mu\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{4}\right)|\Omega|^{\frac{6-q}{6}}t^q\qquad t\geqslant 0 \tag{15}$$

得到$\min\limits_{t\geqslant 0}f(t)=f(t_1)=-D\mu^{\frac{2}{2-q}}$，其中：

$$t_1=\left[\frac{2q\mu}{aS}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{4}\right)|\Omega|^{\frac{6-q}{6}}\right]^{\frac{1}{2-q}}\qquad D=\frac{2-q}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{2-q}}|\Omega|^{\frac{6-q}{6-3q}}\left(\frac{2q}{aS}\right)^{\frac{q}{2-q}}$$

因此，由(13)-(15)式，可知

$$c\geqslant\frac{a}{3}\eta_k+\frac{b}{12}\eta_k^2+\frac{aS}{4}|u|_6^2-\mu\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{4}\right)|\Omega|^{\frac{6-q}{6}}|u|_6^q\geqslant\Lambda-D\mu^{\frac{q}{2-q}}$$

故矛盾，所以(ii)不成立，则 $\eta_k=0$，即 $\Gamma=\varnothing$. 所以我们可得出结论

$$\lim_{n_j\to\infty}\int_\Omega|u_{n_j}|^6\mathrm{d}x=\int_\Omega|u|^6\mathrm{d}x$$

接下来证明在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_{n_j}\to u$. 不妨设 $\lim\limits_{n_j\to\infty}\|u_{n_j}\|^2=d^2$，则需证 $\|u\|^2=d^2$. 事实上，

$$\begin{aligned}0=&\lim_{n_j\to\infty}\langle\varphi'_\mu(u_{n_j}),u_{n_j}-u\rangle=\lim_{n_j\to\infty}\varphi'_\mu(u_{n_j})u_{n_j}-\lim_{n_j\to\infty}\varphi'_\mu(u_{n_j})u=\\&\lim_{n_j\to\infty}\left[(a+b\|u_{n_j}\|^2)\|u_{n_j}\|^2-\int_\Omega|u_{n_j}|^6\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega|u_{n_j}|^q\mathrm{d}x\right]-\\&\lim_{n_j\to\infty}\left[(a+b\|u_{n_j}\|^2)\int_\Omega\nabla u_{n_j}\nabla u\mathrm{d}x-\int_\Omega|u_{n_j}|^4u_{n_j}u\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega|u_{n_j}|^{q-2}u_{n_j}u\mathrm{d}x\right]=\end{aligned}$$

$$(a+bd^2)\left(d^2-\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)$$

因此，$u_{n_j}\to u(x\in H_0^1(\Omega))$. 所以，当 $c<\Lambda-D\mu^{\frac{2}{2-q}}$ 时，泛函 φ_μ 满足局部 $(\mathrm{PS})_c^*$ 条件.

定理 1 的证明　我们将用文献[14]中的对偶喷泉定理证明定理 1. 下面将证明对 $\forall k\geqslant k_0$，存在 $\rho_k>\gamma_k>0$，使得：

(B_1) $a_k=\inf\limits_{u\in Z_k,\ \|u\|=\rho_k}\varphi(u)\geqslant 0$；

(B_2) $b_k=\max\limits_{u\in Y_k,\ \|u\|=\gamma_k}\varphi(u)<0$；

(B_3) $d_k=\inf\limits_{u\in Z_k,\ \|u\|=\rho_k}\to 0$，$k\to\infty$.

事实上，为了证明条件 (B_1)，我们定义 $\beta_k=\sup\limits_{u\in Z_k,\ \|u\|=1}|u|_q$. 由文献[6]的引理 3.8，有 $\beta_k\to 0(k\to\infty)$. 同时存在 $R>0$，使得

$$\|u\|\leqslant R\Rightarrow\frac{1}{6S^3}\|u\|^6\leqslant\frac{a}{4}\|u\|^2$$

那么当 $u\in Z_k$，$\|u\|\leqslant R$ 时，有

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(u)=&\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{6}\int_\Omega |u|^6\mathrm{d}x-\frac{\mu}{q}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{6S^3}\|u\|^6-\beta_k^q\frac{\mu}{q}\|u\|^q\geqslant\\&\frac{a}{4}\|u\|^2-\beta_k^q\frac{\mu}{q}\|u\|^q\end{aligned}\tag{16}$$

取 $\rho_k=\left(\frac{4\mu\beta_k^q}{aq}\right)^{\frac{1}{2-q}}$，有 $\rho_k\to 0(k\to\infty)$. 所以，存在 k_0，当 $k\geqslant k_0$ 时，使得 $\rho_k\leqslant R$. 因此，当 $u\in Z_k$，$\|u\|=\rho_k\leqslant R$ 时，有 $\varphi_\mu(u)\geqslant 0$. 故条件 (B_1) 成立.

对于条件 (B_2)，由于 $\dim Y_k<\infty$，所以 Y_k 上的任意范数等价，则存在常数 $C_4,C_5>0$，有：

$$|u|_6\leqslant C_4^{\frac{1}{6}}\|u\|\qquad |u|_q\leqslant C_5^{\frac{1}{q}}\|u\|$$

那么对 $\forall u\in Y_k$，且 $\|u\|=\gamma_k$，有

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(u)\leqslant&\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{C_4}{6}\|u\|^6-\frac{C_5\mu}{q}\|u\|^q=\\&\frac{a}{2}\gamma_k^2+\frac{b}{4}\gamma_k^4-\frac{C_4}{6}\gamma_k^6-\frac{C_5\mu}{q}\gamma_k^q\end{aligned}$$

由于 $\mu>0$，$C_5>0$，显然，存在充分小的 γ_k，使得 $\varphi_\mu(u)<0$，所以条件 (B_2) 成立.

对于条件 (B_3)，由(16)式，得

$$\varphi_\mu(u)\geqslant-\beta_k^q\frac{\mu}{q}\|u\|^q$$

又由于 $\beta_k\to 0(k\to\infty)$，存在 k_0，当 $k\geqslant k_0$，且 $u\in Z_k$，$\|u\|\leqslant\rho_k$ 时，有 $\varphi_\mu(u)\geqslant-\beta_k^q\frac{\mu}{q}\rho_k^q$. 故条件 (B_3) 成立. 由引理 1 知，存在 $\mu^*>0$，使得对每个 $0<\mu<\mu^*$ 和 $c<0$，泛函 φ_μ 满足局部 $(\mathrm{PS})_c^*$ 条件. 定理 1 证毕.

参考文献：

[1]　KIRCHHOFF G. Mechanik [M]. Teubner：Leipzig，1883.

[2]　FIGUEIREDO G M，JÜNIOR J R S. Multiplicity of Solutions for a Kirchhoff Equation with Subcritical of Critical Growth [J]. Differential Integral Equations，2013，25：853－868.

[3] MA T F, RIVERA J E M. Positive Solutions for a Nonlinear Nonlocal Elliptic Transmission Problem [J]. Applied Mathematics Letters, 2003, 16(2): 243-248.

[4] LEI C Y, LIU G S, GUO L T. Multiple Positive Solutions for a Kirchhoff Type Problem with a Critical Nonlinearity [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2016, 31: 343-355.

[5] ZHONG X J, TANG C L. Multiple Positive Solutions to a Kirchhoff Type Problem Involving a Critical Nonlinearity [J]. Computers Mathematics with Applications, 2016, 72: 2865-2877.

[6] LI H Y, LIAO J F. Existence and Multiplicity of Solutions for a Superlinear Kirchhoff-Type Equations with Critical Sobolev Exponent in $\mathbb{R}^N$ [J]. Computers Mathematics with Applications, 2016, 72(12): 2900-2907.

[7] ANELLO G. A Uniqueness Result for a Nonlocal Equation of Kirchhoff Type and Some Related Open Problem [J]. Journal of Mathematical Analysis Applications, 2011, 373(1): 248-251.

[8] CHEN C Y, KUO Y C, WU T F. The Nehari Manifold for a Kirchhoff Type Problem Involving Sign-Changing Weight Functions [J]. Journal of Differential Equations, 2011, 250(4): 1876-1908.

[9] CHENG B. New Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for Nonlocal Elliptic Kirchhoff Type Problems [J]. Journal of Mathematical Analysis Applications, 2012, 394(2): 488-495.

[10] SUN Y J, LIU X. Existence of Positive Solutions for Kirchhoff Type Problems with Critical Exponent [J]. Partial Differ Equ, 2012, 25(2): 85-96.

[11] FAN H. Multiple Positive Solutions for a Class of Kirchhoff Type Problems Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Journal of Mathematical Analysis Applications, 2015, 431(1): 150-168.

[12] LIONS P L. The Concentration-Compactness Prinicple in the Calculus of Variations [J]. Rev Mat Iberoam, 1985(1): 145-201.

[13] 刘选状. 两类带有临界指数的Kirchhoff型方程的解的存在性和多重性 [D]. 重庆: 西南大学, 2015.

[14] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston: Birkhauser, 1996.

Multiplicity of Solutions for Kirchhoff Equation with Concave and Convex Nonlinearities

WANG Ya-qi, OU Zeng-qi

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we study a class of Kirchhoff equation

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = |u|^4 u + \mu |u|^{q-2} u & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

with concave and convex nonlinearities, where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a smooth bounded domain with $a, b > 0$, $1 < q < 2$, $\mu > 0$. By means of the concentration compactness principle and a dual fountain theorem, we obtain the multiplicity of solutions about this equation.

Key words: Kirchhoff equation; concave and convex nonlinearities; the concentration compactness principle; dual fountain theorem

责任编辑 廖 坤

崔玉洁