第 40 卷第 10 期　　西 南 大 学 学 报 (自然科学版)　　2018年10月
Vol. 40　No. 10　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Oct.　2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.10.016

分数阶椭圆方程近共振问题解的多重性①

宋树枝，　陈尚杰

重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067

摘要：考虑当线性项的参数从右边逼近非主特征值时分数阶椭圆方程的多解性．一方面，通过对泛函在不同特征子空间上的能量水平的估计可构造出一个具有鞍点结构的解；另一方面，当参数充分接近特征值时，结合鞍点定理、Galerkin 逼近方法及对近共振对应的特征子空间上能量水平的仔细估算证明第二个解的存在性．

关　键　词：分数阶椭圆方程；近共振；鞍点结构；Galerkin 逼近

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2018)10－0095－08

考虑分数阶椭圆方程

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u=\lambda u+f(x,u)+h(x) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega\end{cases}\tag{1}$$

其中，$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为具有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域，$s\in(0,1)$，$N>2s$，$f\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$，且满足条件：

(f_0) $\lim\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{f(x,t)}{t}=0$ 对 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立．

$(-\Delta)^s$ 为分数阶椭圆算子，定义如下：

$$(-\Delta)^s u(x)=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\qquad x\in\mathbb{R}^N$$

记 $Q=\mathbb{R}^{2N}\setminus\mathscr{O}$，其中 $\mathscr{O}=C(\Omega)\times C(\Omega)\subset\mathbb{R}^{2N}$ 以及 $C(\Omega)=\mathbb{R}^N\setminus\Omega$．近年来，分数阶椭圆算子越来越多地出现在一些运用领域，例如极小曲面问题[1]、分数阶椭圆相变理论[2] 以及分数阶量子力学问题[3] 等．由文献[4]的命题 4.4 知，当 $s\to1^-$ 时，算子$(-\Delta)^s$ 的极限为$-\Delta$．用 $X(\Omega)$ 表示由 Lebesgue 可测函数构成的线性空间，满足

$$X(\Omega)=\left\{u:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}:u|_{\Omega}\in L^2(\Omega),\int_Q\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty\right\}$$

赋予范数

$$\|u\|_X=\|u\|_{L^2(\Omega)}+\left(\int_Q\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

令 $X_0(\Omega)=\{u\in X(\Omega):u=0(\text{a.e. } x\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega\}$，则 $X_0(\Omega)$ 为 $X(\Omega)$ 的线性闭子空间．由文献[5]知$(X_0(\Omega),\|.\|_{X_0})$ 为 Hilbert 空间，其内积为

① 收稿日期：2017－09－26
基金项目：重庆市教委科学技术研究项目(KJ1600618)；重庆市基础与前沿研究计划项目(cstc2016jcyjA0263)；国家青年基金项目(11601046)．
作者简介：宋树枝(1980－)，女，讲师，博士，主要从事非线性泛函分析和偏微分方程的研究．

$$\langle u, v\rangle_{X_0}=\int_Q \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

并且当 $q\in[1,2_s^*]\left(2_s^*=\dfrac{2N}{N-2s}\right)$ 时，嵌入 $X_0(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ 是连续的；当 $q\in[1,2_s^*)$ 时，嵌入 $X_0(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ 是紧的. 因此，对 $\forall q\in[1,2_s^*]$，存在 $\tau_q>0$，使得

$$\|u\|_{L^q}\leqslant\tau_q\|u\|_{X_0}\qquad\forall u\in X_0(\Omega)\tag{2}$$

由文献[6]知特征值问题

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u=\lambda u & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\mathbb{R}^N\backslash\Omega\end{cases}\tag{3}$$

有一列单调递增的特征值 $0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k\leqslant\cdots$，相应的特征函数表示为 ϕ_k. $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 构成空间 $L^2(\Omega)$ 以及空间 $X_0(\Omega)$ 的正交基. 若 $\lambda_{k-1}<\lambda_k=\cdots=\lambda_{k+m-1}<\lambda_{k+m}$，我们称 $\lambda_k(k\geqslant 2)$ 是问题(3)的 $m(m\in\mathbb{N})$ 重特征值. 此时，λ_k 的特征函数的全体构成 $X_0(\Omega)$ 的线性闭子空间，表示为 $Z=\mathrm{span}\{\phi_k,\cdots,\phi_{k+m-1}\}$. 本文的主要结论如下：

定理 1 令 λ_k 为问题(3)的 m 重特征值，$f\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$，$h\in L^2(\Omega)$. 假设条件$(\mathrm{f}_0)$及下面的条件$(\mathrm{H}_1)$或$(\mathrm{H}_2)$成立：

(H_1) $\lim\limits_{t\to\pm\infty}f(x,t)=\mp\infty$ 对 $x\in\Omega$ 一致成立；

(H_2) $\lim\limits_{|t|\to\infty}F(x,t)=-\infty$ 对 $x\in\Omega$ 一致成立，且 $\int_\Omega h\phi\,\mathrm{d}x=0(\forall\phi\in Z)$.

则存在 $\varepsilon_1>0$，使得当 $\lambda\in(\lambda_k,\lambda_k+\varepsilon_1)$ 时，方程(1)至少存在 2 个解.

注 1 注意到定理 1 中参数位于特征值 λ_k 的右边小邻域内，因此，这个问题本质上是参数从右边趋近非主特征值 λ_k 时解的多重性问题，称其为近共振问题. 椭圆型方程近共振问题相关结论可参见文献[7-15]. 其中，文献[7]考察了分数阶椭圆方程关于左边近共振问题解的多重性，文献[8]考察了非线性项满足 Landesman-Lazer 型条件下的分数阶椭圆方程右边近共振问题解的多重性. 参数从左边趋近时，近共振问题的多解性可以通过构造两个不同能量水平上的鞍点结构来获得；当参数从右边趋近 λ_k 时，λ_k 的特征子空间引发的几何结构的改变导致不能再同时建立两个不同的鞍点结构. 为此，文献[9]不得不运用分离球定理(也称作局部鞍点定理)来证明第二个解的存在性. 文献[8-13]也都是采用这一思路. 特别指出的是文献[14]的证明方法. 文献[14]运用 Galerkin 逼近方法考察了一类椭圆系统，在一定程度上统一了左右两边逼近情况下的证明. 受此启发，本文采用 Galerkin 逼近方法进行处理，从而避免使用分离球定理来处理参数从右边逼近时的近共振问题.

考虑泛函

$$J_\lambda(u)=-\left(\frac{1}{2}\|u\|_{X_0}^2-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x-\int_\Omega hu\,\mathrm{d}x\right)$$

因为非线性项 $f\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ 且满足次线性增长性条件(f_0)，因此 $J_\lambda\in C^1(X_0(\Omega),\mathbb{R})$. 由变分法可知 $u\in X_0(\Omega)$ 是方程(1)的解当且仅当 u 是泛函 J_λ 在空间 $X_0(\Omega)$ 中的临界点. 由条件(f_0)，对 $\forall\delta>0$，存在 $M_\delta>0$，使得

$$|f(x,t)|\leqslant\delta|t|+M_\delta\qquad\forall t\in\mathbb{R}\tag{4}$$

利用 Hölder 不等式及(2)式可知：

$$\left|\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\delta\|u\|_{L^2}^2+M_\delta|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{2}\delta\tau_2^2\|u\|_{X_0}^2+C_1\|u\|_{X_0}\tag{5}$$

$$\left|\int_\Omega h(x)u\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\|h\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\leqslant\tau_2\|h\|_{L^2}\|u\|_{X_0}\leqslant C_2\|u\|_{X_0}\tag{6}$$

其中 $C_1=M_\delta|\Omega|^{\frac{1}{2}}\tau_2$，$C_2=\tau_2\|h\|_{L^2}$. 由空间的直和分解可知：

$$\|u\|_{X_0}^2 \leqslant \lambda_j \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \qquad \forall u \in \operatorname{span}\{\phi_1, \cdots, \phi_j\} \tag{7}$$

$$\|u\|_{X_0}^2 \geqslant \lambda_{j+1} \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \qquad \forall u \in \operatorname{span}\{\phi_1, \cdots, \phi_j\}^\perp \tag{8}$$

$$\|u\|_{X_0}^2 = \lambda_k \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \qquad \forall u \in Z \tag{9}$$

令：

$$V = \operatorname{span}\{\phi_1, \cdots, \phi_{k-1}\} \qquad W = (V \oplus Z)^\perp$$

$$E_n = \operatorname{span}\{\phi_1, \cdots, \phi_n\} \qquad n > k + m$$

$$W_n = W \cap E_n$$

定义：

$$B_{W_n} = \{u \in W_n : \|u\|_{X_0} \leqslant 1\} \qquad B_{W_n Z} = \{u \in W_n \oplus Z : \|u\|_{X_0} \leqslant 1\}$$

且 S_{W_n}，$S_{W_n Z}$ 分别表示 B_{W_n}，$B_{W_n Z}$ 的球面.

引理 1　在定理 1 的假设下，存在 $\varepsilon_1 > 0$，使得当 $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_k + \varepsilon_1)$ 时，存在常数 D_V，D_λ^- 及 $\rho_\lambda^- > R^- > 0$，使得：

$$J_\lambda \geqslant D_V + 1 \qquad u \in V \tag{10}$$

$$J_\lambda < D_V \qquad u \in R^- S_{W_n Z} \tag{11}$$

$$J_\lambda < D_V \qquad u \in W_n,\ \|u\|_{X_0} \geqslant R^- \tag{12}$$

$$J_\lambda \geqslant D_\lambda^- \qquad u \in Z \oplus V \tag{13}$$

$$J_\lambda < D_\lambda^- \qquad u \in \rho_\lambda^- S_{W_n} \tag{14}$$

证　令 $u \in V$. 利用(5)，(6)，(7) 式可得

$$J_\lambda(u) \geqslant \frac{\lambda - \lambda_{k-1}}{2\lambda_{k-1}} \|u\|_{X_0}^2 - \frac{1}{2}\delta\tau_2^2 \|u\|_{X_0}^2 - (C_1 + C_2)\|u\|_{X_0} \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k-1}} - \delta\tau_2^2\right)\|u\|_{X_0}^2 - (C_1 + C_2)\|u\|_{X_0}$$

取 $\delta < \dfrac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k-1}\tau_2^2}$，则 $\dfrac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k-1}} - \delta\tau_2^2 > 0$. 从而对 $\forall u \in V$，$J_\lambda(u)$ 有下界，即存在常数 D_V，使得 $J_\lambda \geqslant D_V + 1$，即(10) 式成立(注意 D_V 与 λ 无关).

下面考察当 $u \in W_n \oplus Z$，条件(H_1) 或条件(H_2) 成立时的情形. 首先考虑条件(H_1) 成立的情形. 由 f 的连续性知，对任意常数 $K > 0$，存在 $C_K > 0$，使得 $F(x, t) \leqslant -K|t| + C_K$. 特别地，取 $K = 1 + C_2$. 注意到，对固定的 n，$W_n \oplus Z$ 为有限维子空间，所有范数等价. 令 $\varepsilon_1 = \lambda - \lambda_k > 0$，则

$$J_\lambda(u) \leqslant \frac{\lambda - \lambda_k}{2\lambda_k}\|u\|_{X_0}^2 + \int_\Omega F(x, u)\mathrm{d}x + \int_\Omega hu\,\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{\varepsilon_1}{2\lambda_k}\|u\|_{X_0}^2 - K\|u\|_{X_0} + C_K|\Omega| + C_2\|u\|_{X_0} =$$

$$\frac{\varepsilon_1}{2\lambda_k}\|u\|_{X_0}^2 - \|u\|_{X_0} + C_K|\Omega| \tag{15}$$

令 $\|u\|_{X_0} = R^-$，使得 $C_K|\Omega| - R^- < D_V - 1$. 当 $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{2\lambda_k}{R^-}$，即 $\dfrac{\varepsilon_1}{2\lambda_k}(R^-)^2 < 1$ 时，对 $\forall u \in R^- S_{W_n Z}$，有 $J_\lambda(u) < D_V$，即(11) 式成立.

特别地，当 $u \in W_n$ 时，类似(15) 式可得

$$J_\lambda(u) \leqslant \frac{\lambda - \lambda_{k+m}}{2\lambda_{k+m}}\|u\|_{X_0}^2 + \int_\Omega F(x, u)\mathrm{d}x + \int_\Omega hu\,\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{\lambda-\lambda_{k+m}}{2\lambda_{k+m}}\|u\|_{X_0}^2-\|u\|_{X_0}+C_K|\Omega|$$

由于 $\lambda-\lambda_{k+m}<0$ 且 $C_K|\Omega|-R^-<D_V-1<D_V$，故当 $u\in W_n$ 且 $\|u\|_{X_0}\geqslant R^-$ 时，$J_\lambda(u)\leqslant D_V$，即(12)式成立.

接下来考虑条件(H_2)成立的情形. 我们首先证明当 $u\in W_n\oplus Z$ 时，有

$$\lim_{\|u\|_{X_0}\to\infty}\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x=\lim_{R^-\to+\infty}\sup_{u\in R^-S_{W_nZ}}\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x=-\infty \tag{16}$$

成立. 为此，我们首先断言：对 $\forall u\in S_{W_nZ}$，存在常数 $\sigma>0$，使得集合 $\Omega_u=\{x\in\Omega:|u(x)|>\sigma\}$ 的测度 $|\Omega_u|>\sigma$. 事实上，若结论不成立，则存在一列$\{\sigma_j\}$，$\sigma_j\to0$，$u_j\in S_{W_nZ}$ 使得 $|\Omega_{u_j}|\leqslant\sigma_j$. 当 $n\to0$ 时，$\{u_j(x)\}$ 依测度收敛于 0. 因此，存在$\{u_j\}$的子列，仍记作$\{u_j\}$，使得$\{u_j\}$在 Ω 上几乎处处收敛于 0. 又由 $\|u_j\|=1$，存在$\{u_j\}$的子列(仍记作$\{u_j\}$)和$\{u\}\in W_n\oplus Z$，满足$\{u_j\}$在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛于 u，$\{u_j(x)\}$ 在 Ω 上几乎处处收敛于 $u(x)$. 因此 $u\equiv0$. 然而 $0<\dfrac{1}{\lambda_n}\leqslant\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x$，矛盾.

利用条件(H_2)及性质 $f(x,t)\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ 易知 $F(x,t)$ 上方有界，即存在常数 C_F 使得

$$F(x,t)\leqslant C_F\qquad\forall(x,t)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$$

对 $\forall L>0$，取 $M=(L+C_F|\Omega|)\sigma^{-1}$，由条件$(H_2)$知存在常数 $t_M>0$，使得当 $|t|>t_M$ 时有 $F(x,t)<-M$. 又令 $K>\dfrac{t_M}{\sigma}$，则

$$\Omega_u\subset\{x\in\Omega:|Ku(x)|>t_M\}$$

于是$\int_{|Ku|>t_M}F(x,Ku)\mathrm{d}x\leqslant-M\sigma$，且$\int_{|Ku|\leqslant t_M}F(x,Ku)\mathrm{d}x\leqslant C_F|\Omega|$. 因此，对 $\forall L>0$ 有

$$\int_\Omega F(x,Ku)\mathrm{d}x\leqslant-M\sigma+C_F|\Omega|=-L$$

根据 L 的任意性知(16)式成立.

对 $\forall u\in W_n\oplus Z$，记 $u=w+z$，其中 $w\in W_n$，$z\in Z$. 取 $\varepsilon_1=\lambda-\lambda_k<\dfrac{\lambda_{k+m}-\lambda_k}{2}$，则根据(6)，(8)式及条件$(H_2)$，有

$$J_\lambda(u)\leqslant\frac{\lambda-\lambda_{k+m}}{2\lambda_{k+m}}\|w\|_{X_0}^2+\frac{\lambda-\lambda_k}{2\lambda_k}\|z\|_{X_0}^2+\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x+\int_\Omega hw\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{\varepsilon_1}{2\lambda_k}\|z\|_{X_0}^2-\frac{\lambda_k-\lambda_{k+m}}{4\lambda_{k+m}}\|w\|_{X_0}^2+\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x+C_2\|w\|_{X_0}$$

显然

$$-\frac{\lambda_k-\lambda_{k+m}}{4\lambda_{k+m}}\|w\|_{X_0}^2+C_2\|w\|_{X_0}<C$$

其中 $C>0$ 为某一常数. 由(16)式知，存在 R^-，使得对 $\forall u\in W_n\oplus Z$ 且 $\|u\|_{X_0}=R^-$ 时，有

$$\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\leqslant D_V-C-1$$

于是

$$J_\lambda(u)\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2\lambda_k}\|z\|_{X_0}^2+\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x+C\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2\lambda_k}(R^-)^2+D_V-1$$

令 $\varepsilon_1<\min\left\{\dfrac{\lambda_{k+m}-\lambda_k}{2},\dfrac{2\lambda_k}{(R^-)^2}\right\}$，则对 $\forall u\in R^-S_{W_nZ}$，有 $J_\lambda(z)<D_V$ 成立，即(11)式成立.

若 $u\in W_n$，则 $z=0$. 注意到当 $\|u\|_{X_0}\geqslant R^-$ 时，有$\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\leqslant D_V-C-1$，所以 $J_\lambda(u)<$

$D_V-1<D_V$，即(12) 式成立.

考虑 $u\in V\oplus Z$. 利用(5)，(6)，(7) 式可得

$$J_\lambda(u)\geqslant\frac{\lambda-\lambda_k}{2\lambda_k}\|u\|_{X_0}^2-\frac{1}{2}\delta\tau_2^2\|u\|_{X_0}^2-(C_1+C_2)\|u\|_{X_0}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda_k}-\delta\tau_2^2\right)\|u\|_{X_0}^2-(C_1+C_2)\|u\|_{X_0}$$

取 $\delta<\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda_k\tau_2^2}$，则 $\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda_k}-\delta\tau_2^2>0$. 从而对所有 $u\in Z\oplus V$，$J_\lambda(u)$ 有下界，即存在常数 D_λ^-(与 λ 有关) 使得(13) 式成立.

考虑 $u\in W_n$. 利用(5)，(6)，(8) 式可得

$$J_\lambda(u)\leqslant\frac{\lambda-\lambda_{k+m}}{2\lambda_{k+m}}\|u\|_{X_0}^2+\frac{1}{2}\delta\tau_2^2\|u\|_{X_0}^2+(C_1+C_2)\|u\|_{X_0}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda-\lambda_{k+m}}{\lambda_{k+m}}+\delta\tau_2^2\right)\|u\|_{X_0}^2+(C_1+C_2)\|u\|_{X_0}$$

取 $\delta<\frac{\lambda_{k+m}-\lambda}{\lambda_{k+m}\tau_2^2}$，则 $\frac{\lambda-\lambda_{k+m}}{\lambda_{k+m}}+\delta\tau_2^2<0$. 这意味着当 $u\in W_n$ 且 $\|u\|_{X_0}\to\infty$ 时，$J_\lambda(u)\to-\infty$. 因此，存在足够大的常数 $\rho_\lambda^->R^->0$ 使得(14) 式成立.

令 $J_{\lambda,n}$ 为 J_λ 限制在子空间 E_n 上的泛函，即 $J_{\lambda,n}=J_\lambda|_{E_n}$. 显然，在定理 1 的假设下，$J_{\lambda,n}$ 与 J_λ 在子空间 V,Z,W_n 上满足相同的估计，即对泛函 $J_{\lambda,n}$，引理 1 中的估计仍成立. 下面的引理表明泛函 $J_{\lambda,n}$ 在空间 $E_n(n>k+m)$ 上满足(PS) 条件(证明将在最后给出)：

引理 2　设 $\lambda\in(\lambda_k,\lambda_{k+m})$. 在定理 1 的条件下，泛函 $J_{\lambda,n}$ 满足(PS) 条件，即：假设序列 $\{u_i\}\subset E_n$ 使得 $J_{\lambda,n}(u_i)$ 有界，$|\langle J'_{\lambda,n}(u_i),\phi\rangle|\leqslant\epsilon_i\|\phi\|_{X_0}$ 对每个 $\phi\in E_n$ 成立，其中，当 $i\to\infty$ 时 $\epsilon_i\to0$. 则 $\{u_i\}$ 在 E_n 中有收敛子列.

由引理 1 和引理 2 知，对每个 $n>k+m$，泛函 $J_{\lambda,n}$ 在空间 E_n 上存在 2 个鞍点结构的临界点. 事实上，在子空间 V 和 $Z\oplus W_n$ 上，由不等式(10) 及(11) 确定一个鞍点结构；在子空间 $V\oplus Z$ 和 W_n 上，由不等式(13) 及(14) 也确定一个鞍点结构. 因此，存在泛函 $J_{\lambda,n}$ 的临界点 $\tilde{u}_n,\tilde{v}_n\in E_n$，满足：

$$c_n^-=J_{\lambda,n}(\tilde{u}_n)=\inf_{\gamma\in\tilde{\Gamma}_1}\sup_{u\in R^-B_{W_nZ}}J_{\lambda,n}(\gamma(u))\qquad d_n^-=J_{\lambda,n}(\tilde{v}_n)=\inf_{\gamma\in\tilde{\Gamma}_2}\sup_{u\in\rho_\lambda^-B_{W_n}}J_{\lambda,n}(\gamma(u))$$

其中：

$$\tilde{\Gamma}_1=\{\gamma\in C^0(R^-B_{W_nZ};X_0):\gamma|_{R^-S_{W_nZ}}=\mathrm{Id}\}$$

$$\tilde{\Gamma}_2=\{\gamma\in C^0(\rho_\lambda^-B_{W_n};X_0):\gamma|_{\rho_\lambda^-S_{W_n}}=\mathrm{Id}\}$$

引理 3　在引理 1 的条件下，对每个 $n>k+m$，有 $d_n^-\in[D_\lambda^-,D_V]$ 及 $c_n^-\in[D_V+1,T]$，其中 $T>0$ 是与 n 无关的常数.

证　根据 d_n^-,c_n^- 的定义，$d_n^-\geqslant D_\lambda^-$，$c_n^-\geqslant D_V+1$. 定义连续映射 $\tilde{\gamma}_1:\rho_\lambda^-B_{W_n}\longrightarrow E_n$ 使得

$$\tilde{\gamma}_1(u)=\begin{cases}u+[(R^-)^2-\|u\|_{X_0}^2]^{\frac{1}{2}}e_k & \|u\|_{X_0}\leqslant R^-\\ u & R^-\leqslant\|u\|_{X_0}\leqslant\rho_\lambda^-\end{cases}$$

其中 $e_k\in Z$ 且 $\|e_k\|_{X_0}=1$. 于是，当 $\|u\|_{X_0}\leqslant R^-$ 时，由(11) 式知 $J_{\lambda,n}(\tilde{\gamma}_1(u))<D_V$；当 $R^-\leqslant\|u\|_{X_0}\leqslant\rho_\lambda^-$ 时，由(12) 式知 $J_{\lambda,n}(\tilde{\gamma}_1(u))<D_V$. 因此，$\sup\limits_{u\in\rho_\lambda^-B_V}J_{\lambda,n}(\tilde{\gamma}_1(u))<D_V$，这蕴含 $d_n^-<D_V$.

由于恒等映射属于 $\tilde{\Gamma}_1$，故 $c_n^-\leqslant\sup\limits_{u\in R^-B_{W_nZ}}J_{\lambda,n}(u)$. 设 $u\in W_n\oplus Z$，令 $w\in W_n$，$z\in Z$，使得 $u=w+$

z. 注意到 $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_k + \varepsilon_1)$，由(5),(6),(7) 式和(9) 式得

$$J_{\lambda,n}(u) \leqslant \frac{\lambda - \lambda_{k+m}}{2\lambda_{k+m}} \| w \|_{X_0}^2 + \frac{\lambda - \lambda_k}{2\lambda_k} \| z \|_{X_0}^2 + \frac{1}{2}\delta\tau_2^2 \| u \|_{X_0}^2 + (C_1 + C_2) \| u \|_{X_0} \leqslant$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\lambda_k} + \delta\tau_2^2\right) \| u \|_{X_0}^2 + (C_1 + C_2) \| u \|_{X_0}$$

这说明 $J_{\lambda,n}(u)$ 在有界集 $R^- B_{W_n Z}$ 上关于 n 上方一致有界. 因此，存在与 n 无关的常数 T，使得 $c_n^- \leqslant T$. 故

$$D_\lambda^- \leqslant d_n^- < D_V < D_V + 1 \leqslant c_n^- \leqslant T$$

我们还需要下述引理(其证明将在最后给出)：

引理 4 假设 $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+m})$，序列 $\{u_i\} \subset X_0(\Omega)$，使得对每个 $i \in \mathbb{N}$，有 $u_i \in E_i$ 且 $J_{\lambda,i}(u_i)$ 有界，$|\langle J'_{\lambda,i}(u_i), \phi\rangle| \leqslant \epsilon_i \| \phi \|_{X_0}$ 对每个 $\phi \in E_i$ 成立，其中当 $i \to \infty$ 时 $\epsilon_i \to 0$. 则 $\{u_i\}$ 在 $X_0(\Omega)$ 中有界.

定理 1 的证明 首先，根据引理 3，存在 $d^- \in [D_\lambda^-, D_V]$ 及 $c^- \in [D_V + 1, T]$，使得当 $n \to \infty$ 时，通过取子列，有 $d_n^- \to d^-$ 及 $c_n^- \to c^-$. 我们断言：存在泛函 J_λ 的临界点 $\tilde{u}_0$ 和 $\tilde{v}_0$，满足 $J_\lambda(\tilde{u}_0) = c^-$ 和 $J_\lambda(\tilde{v}_0) = d^-$. 事实上，由鞍点定理可知，对每个 $n > k + m$，有 $J_{\lambda,n}(\tilde{u}_n) = c_n^-$ 以及

$$\langle J'_{\lambda,n}(\tilde{u}_n), \phi\rangle = 0 \qquad \forall \phi \in E_n \tag{17}$$

由引理 4 知$\{\tilde{u}_n\}$ 在 $X_0(\Omega)$ 中有界. 于是，存在 $\tilde{u}_0 \in X_0(\Omega)$，使得：

$$\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}_0 \qquad x \in X_0(\Omega)$$
$$\tilde{u}_n \to \tilde{u}_0 \qquad x \in L^2(\Omega)$$

固定整数 p 满足 $p > k + m$. 在(17) 式中取 $\phi \in E_p$，则对任意 $n > p$，有

$$\langle J'_{\lambda,n}(\tilde{u}_n), \phi\rangle = \lambda\int_\Omega \tilde{u}_n \phi \mathrm{d}x - \langle \tilde{u}_n, \phi\rangle_{X_0} + \int_\Omega f(x, \tilde{u}_n)\phi \mathrm{d}x + \int_\Omega h\phi \mathrm{d}x = 0 \tag{18}$$

对(18) 式取极限，得

$$\lambda\int_\Omega \tilde{u}_0 \phi \mathrm{d}x - \langle \tilde{u}_0, \phi\rangle_{X_0} + \int_\Omega f(x, \tilde{u}_0)\phi \mathrm{d}x + \int_\Omega h\phi \mathrm{d}x = 0$$

这表明$\langle J'_\lambda(\tilde{u}_0), \phi\rangle = 0$ 对每个 $\phi \in E_p$ 成立. 因为 $\bigcup\limits_{p>k+m} E_p$ 在 $X_0(\Omega)$ 中稠密，因此 $J'_\lambda(\tilde{u}_0) = 0$，这蕴含 $\tilde{u}_0$ 为泛函 J_λ 在 $X_0(\Omega)$ 中的临界点.

接下来，我们证明 $J_\lambda(\tilde{u}_0) = c^-$. 令 $P_n: X_0(\Omega) \longrightarrow \mathrm{span}\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$ 为正交投影. 于是，$P_n(\tilde{u}_0) \in E_n$，且当 $n \to \infty$ 时，$P_n(\tilde{u}_0) \to \tilde{u}_0 (x \in X_0(\Omega))$. 显然 $\tilde{u}_n - P_n\tilde{u}_0 \in E_n$. 在(17) 式中取 $\phi = \tilde{u}_n - P_n\tilde{u}_0$，得

$$\langle J'_{\lambda,n}(\tilde{u}_n), \tilde{u}_n - P_n\tilde{u}_0\rangle = 0 \qquad n > k + m \tag{19}$$

注意到 $\tilde{u}_n - P_n\tilde{u}_0 \to 0 (x \in L^2(\Omega))$，且$\{\tilde{u}_n\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中关于 n 一致有界，因此，当 $n \to \infty$ 时，$\lambda\int_\Omega \tilde{u}_0(\tilde{u}_n - P_n\tilde{u}_0)\mathrm{d}x \to 0$. 于是，由(19) 式得，当 $n \to \infty$ 时，$\langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_n - P_n\tilde{u}_0\rangle_{X_0} \to 0$. 故

$$\langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_n\rangle_{X_0} - \langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_0\rangle_{X_0} + \langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_0 - P_n\tilde{u}_0\rangle_{X_0} \to 0 \tag{20}$$

根据 $P_n \tilde{u}_0 \to \tilde{u}_0 (x \in X_0(\Omega))$，及$\{\tilde{u}_n\}$ 在 $X_0(\Omega)$ 中有界知，(20) 式中最后一项$\langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_0 - P_n\tilde{u}_0\rangle_{X_0} \to 0$，这蕴含$\langle \tilde{u}_n, \tilde{u}_n\rangle_{X_0} \to \langle \tilde{u}_0, \tilde{u}_0\rangle_{X_0}$，即 $\| \tilde{u}_n \|_{X_0} \to \| \tilde{u}_0 \|_{X_0}$. 结合 $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}_0 (x \in X_0(\Omega))$，得 $\tilde{u}_n \to \tilde{u}_0 (x \in X_0(\Omega))$. 因此，$J_\lambda(\tilde{u}_n) \to J_\lambda(\tilde{u}_0)$，这表明 $J_\lambda(\tilde{u}_0) = c^-$.

再次利用鞍点定理得，对每个 $n > k + m$，存在$\{\tilde{v}_n\} \subset X_0(\Omega)$，使得 $J_{\lambda,n}(\tilde{v}_n) = d_n^-$，$\langle J'_{\lambda,n}(\tilde{v}_n), \phi\rangle = 0 (\forall \phi \in E_n)$.

重复上面的讨论可知，存在 $\tilde{v}_0 \in X_0(\Omega)$ 为 J_λ 的临界点，使得 $\tilde{v}_n \to \tilde{v}_0 (x \in X_0(\Omega))$，且 $J_\lambda(\tilde{v}_0) = d^-$. 因为 $d^- \leqslant D_V - 1 < D_V \leqslant c^-$，则 $\tilde{u}_0 \neq \tilde{v}_0$.

最后，我们给出与紧性有关的两个引理的证明.

引理 4 的证明　令 $u_i = v_i + w_i$，其中 $v_i \in V \oplus Z$，$w_i \in W_i$. 联合(7)，(8) 式得

$$\begin{aligned}\langle J'_{\lambda,i}(u_i), w_i - v_i\rangle = &\lambda\int_\Omega (w_i - v_i)(v_i + w_i)\mathrm{d}x - \langle v_i + w_i, w_i - v_i\rangle_{X_0} + \\ &\int_\Omega f(x, v_i + w_i)(w_i - v_i)\mathrm{d}x + \int_\Omega h(w_i - v_i)\mathrm{d}x \leqslant \\ &\left(\lambda\int_\Omega w_i^2\mathrm{d}x - \|w_i\|_{X_0}^2\right) - \left(\lambda\int_\Omega v_i^2\mathrm{d}x - \|v_i\|_{X_0}^2\right) + \\ &\int_\Omega f(x, v_i + w_i)(w_i - v_i)\mathrm{d}x + \int_\Omega h(w_i - v_i)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{21}$$

根据(4) 式和(6) 式知，(21) 式的最后两项有如下估计：

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |f(x, v_i + w_i)||v_i - w_i|\mathrm{d}x \leqslant \\ &\int_\Omega \delta|v_i + w_i||v_i - w_i|\mathrm{d}x + \int_\Omega M_\delta|v_i - w_i|\mathrm{d}x \leqslant \\ &\delta\tau_2^2(\|v_i\|_{X_0}^2 + \|w_i\|_{X_0}^2) + M_\delta\tau_2(\|v_i\|_{X_0} + \|w_i\|_{X_0})\end{aligned} \tag{22}$$

和

$$\int_\Omega |h||v_i - w_i|\mathrm{d}x \leqslant \tau_2\|h\|_{L^2}(\|v_i\|_{X_0} + \|w_i\|_{X_0}) \tag{23}$$

当 $n \to \infty$ 时，$J'_{\lambda,i}(u_i) \to \infty$. 故当 i 充分大时，有

$$|\langle J'_{\lambda,i}(u_i), w_i - v_i\rangle| \leqslant \|w_i - v_i\|_{X_0} \leqslant (\|v_i\|_{X_0} + \|w_i\|_{X_0})$$

因此，结合(21)，(22) 和(22) 式可知

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+m}} - \delta\tau_2^2\right)\|w_i\|_{X_0}^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_k} - 1 - \delta\tau_2^2\right)\|v_i\|_{X_0}^2 \leqslant \tag{24}$$

$$(M_\delta\tau_2 + \tau_2\|h\|_{L^2} + 1)(\|v_i\|_{X_0} + \|w_i\|_{X_0}) \tag{25}$$

取

$$\delta < \min\left\{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+m}}, \frac{\lambda}{\lambda_k} - 1\right\}\tau_2^{-2}$$

则(24) 式蕴含$\{u_i\}$ 有界.

引理 2 的证明　由引理 4 的证明过程可知，对固定的 n，若$\{u_i\} \subset E_n$ 为(PS) 序列，则$\{u_i\}$ 在 E_n 中有界. 注意到 $\dim E_n < \infty$，立即可得$\{u_i\}$ 有收敛子列.

参考文献：

[1] CAFFARELLI L，VALDINOCI E. Uniform Estimates and Limiting Arguments for Nonlocal Minimal Surfaces [J]. Calc Var Partial Differential Equations，2011，41(1－2)：203－240.

[2] SIRE Y，VALDINOCI E. Fractional Laplacian Phase Transitions and Boundary Reactions：a Geometric Inequality and a Symmetry Result [J]. J Funct Anal，2009，256(6)：1842－1864.

[3] LASKIN N. Fractional Quantum Mechanics and Lévy Path Integrals [J]. Phys Lett A，2000，268(4－6)：298－305.

[4] ELEONORA D N，GIAMPIERO P，ENRICO V. Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces [J]. Bull Sci Math，2012，136(5)：521－573.

[5] SERVADEI R，VALDINOCI E. Mountain Pass Solutions for Non-Local Elliptic Operators [J]. J Math Anal Appl，2012，389(2)：887－898.

[6] SERVADEI R，VALDINOCI E. Variational Methods for Non-Local Operators of Elliptic Type [J]. Discrete Contin Dyn Syst，2013，33(5)：2105－2137.

[7] 郭灵钟，姚　娟，索洪敏，等. 半线性分数阶椭圆型算子方程近共振问题的多重解 [J]. 遵义师范学院学报，2014，16(1)：87－91.

[8] 梁志霞，欧增奇. 拟线性椭圆方程近共振问题解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(2)：64-69.
[9] PAIVA F O，MASSA E. Semilinear Elliptic Problems Near Resonance with a Nonprincipal Eigenvalue [J]. J Math Anal Appl，2008，342(1)：638-650.
[10] SUO H M，TANG C L. Multiplicity Results for Some Elliptic Systems Near Resonance with a Nonprincipal Eigenvalue [J]. Nonlinear Anal，2010，73(7)：1909-1920.
[11] SUO H M，TANG C L. Degenerate Semilinear Elliptic Problems Near Resonance with a Nonprincipal Eigenvalue [J]. Bull Korean Math Soc，2012，49(4)：669-684.
[12] KE X F，TANG C L. Multiple Solutions for Semilinear Elliptic Equations Near Resonance at Higher Eigenvalues [J]. Nonlinear Anal，2011，74(3)：805-813.
[13] KE X F，TANG C L. Existence and Multiplicity of Solutions for Asymptotically Linear Noncooperative Elliptic Systems [J]. J Math Anal Appl，2011，375(2)：631-647.
[14] MASSA E，ROSSATO R A. Multiple Solutions for an Elliptic System Near Resonance [J]. J Math Anal Appl，2014，420(2)：1228-1250.
[15] 陈清明，李 春，欧增奇. 拟线性椭圆方程在近共振处解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(8)：87-91.

Multiplicity Results for Fractional Elliptic Equations with Near Resonance

SONG Shu-zhi， CHEN Shang-jie

School of Mathematics and Statistics，Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China

Abstract：The present paper considers the multiplicity of the solution for fractional elliptic equations when the parameter of the linear term approximates to the non-principal eigenvalue from the right. On the one hand，we establish the existence of the first solution of saddle point geometry by calculating the energy level of the functional on different eigenspaces. On the other hand，we obtain the second solution by applying the saddle theorem and the Galerkin approximation method and by evaluating the energy level on the eigenspace when the linear part is near resonance.

Key words：fractional elliptic equation；near resonance；saddle point geometry；Galerkin approximation

责任编辑 廖 坤
崔玉洁