DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.10.017

约束对应的图像拓扑下拟变分不等式解的稳定性①

何基好[1,2]，　向淑文[2]，　贾文生[2]，　卢大远[2]，　邓喜才[3]

1. 贵州大学 计算机科学与技术学院，贵阳 550025；2. 贵州大学 数学与统计学院，贵阳 550025；
3. 贵州师范学院 数学与计算机系，贵阳 550018

摘要：以往关于拟变分不等式解的稳定性的研究，都采用约束映射之间的一致度量. 现采用约束映射图像之间的 Hausdorff 度量，并在此弱图像拓扑下，得到了拟变分不等式解的稳定性，即在 Baire 分类的意义下，大多数的拟变分不等式的解均是本质的.

关　键　词：拟变分不等式；约束映射；图像拓扑；通有稳定性

中图分类号：**O177.91**　　　**文献标志码**：**A**　　　**文章编号**：1673-9868(2018)10-0103-04

设 E 是赋范线性空间，X 为 E 中的非空闭子集. 设 $G: X \longrightarrow 2^X$ 为非空的集值映射(即对任何 $x \in X$，$G(x)$ 是 X 的非空子集)，$f: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ 是泛函，则拟变分不等式问题(QVIP)为：求 $\bar{x} \in X$，满足 $\bar{x} \in G(\bar{x})$，且使得 $f(x, y) \leqslant 0 (y \in G(\bar{x}))$，其中 $\bar{x}$ 是(QVIP)的解.

文献[1-2]在研究与随机脉冲和控制相关的问题时提出了拟变分不等式. 关于拟变分不等式解的存在性及其求解算法已经有相当多的成果[3-6]. 数学问题解的稳定性在理论、算法和应用上是非常重要的. 但是，除了少数的数学问题外，大多数的数学问题都不能保证解的稳定性. 人们自然要问，在什么情况下，解是稳定的？一类问题中的大多数问题都有稳定解？人们已经取得许多结论(如文献[7]). 需要指出的是，以上关于拟变分不等式解的研究是基于约束映射所构成的空间一致拓扑. 正如文献[8]指出，集值映射的图像拓扑允许比一致拓扑有更大的扰动，因为它同时考虑集值映射和可行策略集的扰动. 文献[9-11]研究了图像拓扑意义下一些非线性问题解的稳定性. 受到以上文献的启发，本文将图像拓扑引入到拟变分不等式问题中，利用非线性问题解的稳定性的研究模式得到拟变分不等式解的稳定性.

设 X 为赋范线性空间 E 中的一个非空凸紧集，记 Φ 为所有满足下列条件的函数 $f: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ 的全体：

(h_1) $f(x, y)$ 在 $X \times X$ 上是下半连续的；

(h_2) $\forall x \in X$，$y \longmapsto f(x, y)$ 是凹的；

(h_3) $\forall y \in X$，$f(y, y) \leqslant 0$；

(h_4) $\sup\limits_{(x, y) \in (X \times X)} |f(x, y)| < +\infty$.

---

① 收稿日期：2017-11-29
基金项目：国家自然科学基金项目(11161008，11561013，11761023)；教育部博士点基金项目(20115201110002).
作者简介：何基好(1976-)，男，博士研究生，主要从事博弈论与非线性分析的研究.
通信作者：向淑文，教授，博士研究生导师.

记 Ψ 为所有满足下列条件的集值映射 $G: X \longrightarrow 2^X$ 的全体：

(h_5) $\forall x \in X$，$G(x)$ 是非空凸紧集；

(h_6) G 在 X 上是上半连续的.

记 $M = \Phi \times \Psi$，对任意的 $u_1 = (f_1, G_1)$，$u_2 = (f_2, G_2)$，在 M 上定义 u_1, u_2 之间的距离为

$$\rho(u_1, u_2) = \sup_{(x, y) \in (X \times X)} | f_1(x, y) - f_2(x, y) | + h(\mathrm{Graph}(G_1), \mathrm{Graph}(G_2))$$

其中 h 为 X 上的 Hausdorff 距离.

注 1　显然 ρ 是度量. 另外，此处的 ρ 不同于文献[7]中定义的度量 ρ'，

$$\rho'(u_1, u_2) = \sup_{(x, y) \in (X \times X)} | f_1(x, y) - f_2(x, y) | + \sup_{x \in X} h(G_1(x), G_2(x))$$

定理 1　(M, ρ) 是完备度量空间.

证　设 $\{u_n\}$ 是 M 中的任意一个 Cauchy 列，则对 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 n_1，使得对 $\forall m, n > n_1$，有

$$\rho(u_m, u_n) = \sup_{(x, y) \in (X \times X)} | f_m(x, y) - f_n(x, y) | + h(\mathrm{Graph}(G_m), \mathrm{Graph}(G_n)) < \varepsilon$$

因 X 为赋范线性空间 E 中的一个非空凸紧集，由文献[12]的定理 1.5.4，对 $\forall (x, y) \in (X \times X)$，存在函数 $f(x, y)$，使得 $f_n(x, y) \to f(x, y)(n \to \infty)$. 又因 $\mathrm{Graph}(G_n)$ 为 $K(X \times X)$ 中的 Cauchy 列，由文献[13]，存在非空紧集 $D^2 \in K(X \times X)$，使得 $\mathrm{Graph}(G_n) \to D^2$.

设 D^2 在 X 上的投影为 A，定义集值映射为 $G: A \longrightarrow 2^A$，且

$$G(x) = \{y \in X: (x, y) \in D^2\} \qquad \forall x \in X$$

则 $\mathrm{Graph}(G) = D^2$，从而 $\mathrm{Graph}(G_n) \to \mathrm{Graph}(G)$.

$\forall x \in X$，有 $(x, y_n) \in \mathrm{Graph}(G_n)$，即 $y_n \in G_n(x)$. 由于 $G_n(x)$ 为紧的，不妨设 $y_n \to y$.

由文献[13]和 $\mathrm{Graph}(G_n) \to \mathrm{Graph}(G)$，有 $(x, y) \in \mathrm{Graph}(G)$，$y \in G(x)$，进一步得到 G 在 $x \in X$ 处存在.

令 $u = (f, G)$，故 $u_n \to u$. 容易得到，$\forall x \in X$，$y \to f(x, y)$ 是凹的. 由文献[12]的定理 2.2.1，且 D^2 为紧的，从而 G 在 A 上是上半连续且紧的. 由 $(x_n, y_n) \to (x, y)$，故存在正整数 $n_2(n_2 > n_1)$. 对 $\forall n > n_2$，再由 $f_n \to f$，有

$$f(x_n, y_n) > f_n(x_n, y_n) - \varepsilon > f_n(x, y) - 2\varepsilon > f(x, y) - 3\varepsilon$$

由 ε 的任意性，$f(x, y)$ 在 (x, y) 处是下半连续的.

对 $\forall y_1, y_2 \in G(x)$，有 $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathrm{Graph}(G)$. 对 $\forall x \in X$，存在 $(x, y_n^1), (x, y_n^2) \in \mathrm{Graph}(G_n)$，使得 $y_n^1 \to y_1$，$y_n^2 \to y_2$.

因 $G_n(x)$ 为凸集，有 $\lambda y_n^1 + (1 - \lambda) y_n^2 \in G_n(x)$，即

$$(x, \lambda y_n^1 + (1 - \lambda) y_n^2) \in \mathrm{Graph}(G_n)$$

由文献[13]，令 $n \to \infty$，有

$$(x, \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2) \in \mathrm{Graph}(G)$$

即 $\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 \in G(x)$，故 $G(x)$ 为凸集.

对 $\forall y \in G(x)$，由 $\mathrm{Graph}(G_n) \to \mathrm{Graph}(G)$，$G_n(y_n)$ 与 $G(y)$ 都是非空紧集，存在 $y_n \in G_n(y_n)$，使得 $y_n \to y$，且 $f_n(y_n, y_n) \leqslant 0$. 由 f_n 和 f 下半连续，有

$$f(y, y) < f_n(y, y) + \frac{\varepsilon}{2} < f_n(y_n, y_n) + \varepsilon \leqslant \varepsilon$$

由 ε 的任意性，故 $f(y, y) \leqslant 0$. 于是 $u = (f, G) \in M$. 因此，(M, ρ) 是一个完备度量空间.

对任意 $u = (f, G) \in M$，由文献[12]的系 3.2.1，存在 $x^* \in X$，使得 $x^* \in G(x^*)$，且 $\forall y \in G(x^*)$，有 $f(x^*, y) \leqslant 0$. 记

$$F(u) = \{x \in X: x \in G(x), f(x, y) \leqslant 0, \forall y \in G(x)\}$$

为拟变分不等式 u 的解的全体，则 F 是一个由 M 到 X 的集值映射，且这样定义的映射 F 具有下面的性质：

定理 2　F 在 M 上是一个上半连续紧值映射.

证　因 $u_n \to u$，则 $f_n \to f$，$\mathrm{Graph}(G_n) \to \mathrm{Graph}(G)$. 由 $x_n \in F(u_n)$，知 $x_n \in G_n(x_n)$，即 $(x_n, x_n) \in \mathrm{Graph}(G_n)$.

由 $u_n \to u$，知 $\mathrm{Graph}(G_n) \to \mathrm{Graph}(G)$. 于是由文献[13] 知，序列 $\{(x_n, x_n)\}$ 必有聚点 $(x, x) \in \mathrm{Graph}(G)$，即有子列 $\{(x_{n_k}, x_{n_k})\}$，$(x_{n_k}, x_{n_k}) \to (x, x) \in \mathrm{Graph}(G)$，从而 $x \in G(x)$.

对 $\forall y \in G(x)$，有 $(x, y) \in \mathrm{Graph}(G)$. 由 $u_n \to u$，知 $\mathrm{Graph}(G_n) \to \mathrm{Graph}(G)$，且 $G_n(x)$ 与 $G(x)$ 都是非空紧集，则存在 $y_n \in G_n(x)$，使得 $y_n \to y$，且 $f_n(x, y_n) \leqslant 0$.

由 $f_n \to f$，f_n 和 f 下半连续，则有

$$f(x, y) < f(x, y_n) + \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x, y_n) + \varepsilon \leqslant \varepsilon$$

由 ε 的任意性，故 $f(x, y) \leqslant 0$. 因此，$x \in G(x)$，$\forall y \in G(x)$，$f(x, y) \leqslant 0$，$x \in F(u)$.

对集值映射 F，定义拟变分不等式 u 的本质解概念如下：

定义 1　(i) 对 $\forall u \in M$，且 $x \in F(u)$，如果对 x 的任意开邻域 $U(x)$，存在 u 的开邻域 $O(u)$，使得 $\forall u' \in O(u)$，存在 $x' \in F(u')$，而 $x' \in U(x)$，则称 x 是拟变分不等式 u 的本质解；

(ii) 如果对 $\forall x \in F(u)$，x 都是本质解，则称拟变分不等式 u 是本质的.

由定义 1 及集值映射下半连续和连续的定义，易知有下面的结论：

引理 1　(i) $u \in M$ 是本质的当且仅当 F 在 $u \in M$ 处下半连续；

(ii) 若 F 在 M 上是上半连续的，则 F 在 u 处连续当且仅当 u 是本质的.

证　只证明 (i).

必要性　若 $u \in M$，对 X 中任意开集 U，$U \cap F(u) \neq \varnothing$，取 $x \in U \cap F(u)$，则 U 是 x 的开邻域. 因 u 是本质的，故 $x \in F(u)$ 必是本质的. 则存在 u 的开邻域 $O(u)$，使得 $u' \in O(u)$，有 $x' \in F(u')$，而 $x' \in U$，于是，$U \cap F(u') \neq \varnothing$. 因此，$F$ 在 u 处下半连续.

充分性　对 $\forall u \in M$，$\forall x \in F(u)$，x 的任意开邻域 $U(x)$，有 $U(x) \cap F(u) \neq \varnothing$. 因 F 在 u 处下半连续，故存在 u 的开邻域 $O(u)$，使得 $u' \in O(u)$，有 $U(x) \cap F(u') \neq \varnothing$. 取 $x' \in U(x) \cap F(u')$，则 $x' \in F(u')$，而 $x' \in U(x)$，则 x 必是本质的，则 u 是本质的.

由本质解的定义、文献[12] 的定理 2.3.1、定理 1、定理 2 及引理 1，得到以下稳定性的结论：

定理 3　存在 M 中的稠密剩余集 Q，使得对 $\forall u \in Q$，F 在 u 处下半连续，且拟变分不等式 u 是本质的. 即在 Baire 分类的意义下，大多数的拟变分不等式都是本质的.

证　因 (M, ρ) 是完备度量空间，故 (M, ρ) 是 Baire 空间、F 在 M 上是一个 usco 映射、由文献[12] 的定理 2.3.1，存在 M 中的稠密剩余集 Q，使得对 $\forall u \in Q$，F 在 u 处下半连续，再由引理 1，拟变分不等式 u 都是本质的.

参考文献：

[1] BENSOUSSAN A, LION J L. Controle Impulsionnel et Inequalities Quasi-Variational Stationaires [J]. C R Acad Sci Paris, 1973, 276(9): 1279-1284.

[2] BENSOUSSAN A, LION J L. Nouvelleformulation de Problems de Controle Impulsionnel et Applications [J]. C R Acad Sci Paris, 1973, 276(2): 1189-1192.

[3] 岳瑞雪，陈荣波，高　英. 变分不等式的解与非光滑向量优化问题拟近似解的关系 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(1)：98-102.

[4] 令狐云龙. 广义非凸变分不等式解的存在性和多步迭代投影算法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(6)：10-14.

[5] 张石生，康世焜，向淑文. 关于一类一般形式的非线性拟变分不等式问题 [J]. 成都科技大学学报(自然科学版)，1990

(5)：81－87.
[6] 丁协平. 一类拟变分不等式解的存在唯一性和算法[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，1992，16(2)：15－20.
[7] 罗　群，俞　建. 拟变分不等式解集的极小本质集及应用[J]. 高等应用数学学报(A辑)，2004，19(1)：81－88.
[8] 向淑文，杨　辉. 集值映射的图像拓扑与不动点的通有稳定性[J]. 应用数学学报，2001，24(2)：221－226.
[9] 周永辉，向淑文. 图像意义下不动点的Tikhonov良定性及其对策论中的应用[J]. 四川大学学报(自然科学版)，2007，44(4)：774－778.
[10] 周永辉，向淑文. 图像拓扑下的Ky Fan引理解集的本质连通区及其在对策论上的应用[J]. 应用数学学报，2005，28(2)：281－287.
[11] 彭定涛，曹素元. 上图像拓扑与多目标优化问题加权解的通有稳定性[J]. 运筹学学报，2006，10(4)：81－88.
[12] 俞　建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京：科学出版社，2008.
[13] KLEIN E，THOMPSON A C. Theory of Correspondences[M]. New York：A Wiley-Inter Science Publication，1984.

The Stability of Solutions to Quasi-Variational Inequalities of Constrained Correspondence Graph Topology

HE Ji-hao[1,2]，　XIANG Shu-wen[2]，　JIA Wen-sheng[2]，
LU Da-yuan[2]，　DENG Xi-cai[3]

1. College of Computer Science and Technology，Guizhou University，Guiyang 550025，China；
2. School of Mathematics and Statistics，Guizhou University，Guiyang 550025，China；
3. Department of Mathematics and Computer，Guizhou Normal College，Guiyang 550018，China

Abstract：On the stability of solutions to quasi-variational inequalities，previous researchers usually investigated it with uniform metric topology between constraint mappings. In the present study，the Hausdorff distance of graph between constrained mappings is used，and the stability of solutions to quasi-variational inequalities is obtained under this weak-graph topology，i. e.，in the sense of the Baire category，the solutions to most quasi-variational inequalities are essential.

Key words：quasi-variational inequality；constrained mapping；graph topology；generic stability

责任编辑　廖　坤
崔玉洁