DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.10.018

一类多目标优化问题弱有效解的必要最优性条件①

欧小庆[1]， 李金富[2]， 刘 佳[2]， 廖 霞[2]， 陈加伟[2]

1. 重庆人文科技学院 管理学院，重庆 401524；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 标量化方法是研究多目标优化问题的最优性条件与算法的重要手段，最优性理论是优化理论的重要研究内容之一. 建立了一类标量化函数的相关性质，并借助标量化技巧与 Clarke 次微分，在假设次微分约束规格成立的条件下，建立了一类非光滑多目标优化问题的局部弱有效解的 Karush-Kuhn-Tucker 必要最优性条件.

关 键 词： 多目标优化；局部弱有效解；必要最优性条件；约束规格

中图分类号：O232 **文献标志码：A** **文章编号：** 1673-9868(2018)10-0107-05

弱有效解是经济、决策理论、多目标优化理论以及最优控制与博弈论中的重要概念之一. 关于多目标优化问题弱有效解的研究常常涉及目标函数与约束函数的凸性[1-5]. 众所周知，最优性必要条件对研究多目标优化问题的对偶性与算法设计起着至关重要的作用. 非光滑优化问题的 Lagrange 乘子规则已经被许多作者依据不同的次微分广泛地研究了[4-9]. Clarke 次微分[6]（也被称作 Clarke 广义梯度）是导出非光滑优化问题优化条件的重要工具. 各种次微分，比如 Michel-Penot 次微分[10]、Mordukhovich 次微分[11]、凸化集[9]，都是在非光滑优化中建立优化条件的好工具. 文献[12－13]研究了带有一般不等约束的非光滑标量优化问题的约束规格与 Lagrange 乘子的性质，并在适当的约束限定性条件下通过 Clarke 次微分得到了最优性条件. 本文将利用 Clarke 次微分研究非光滑约束多目标优化的局部弱有效的必要最优化性条件.

1 预备知识

设 X 为实 Banach 空间，X^* 为其拓扑对偶空间，Y 为有限维空间，C 与 D 分别是 X 与 Y 中的非空闭凸子集，K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点凸锥并且 $\mathrm{int}\, K \neq \emptyset$，$K$ 的对偶锥定义为

$$K^* = \{\xi \in X^* : \langle \xi, v \rangle \geqslant 0\}$$

特别地，K^* 是一个弱* 闭凸锥，记 K 的凸包为 $\mathrm{co}\, K$，$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n\}$ 和 $\mathbb{R}^n_{++} = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n\}$. 设 $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 与 $g: X \longrightarrow Y$ 为向量值映射.

若 $h: X \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $\bar{x} \in X$ 处为局部 Lipschitz 连续函数，h 在 $\bar{x} \in X$ 处沿方向 $v \in X$ 的 Clarke 广义导数[6] 定义为

$$h^0(\bar{x}; v) = \limsup_{x \to \bar{x},\, t \to 0+} \frac{h(x + tv) - h(x)}{t}$$

h 在 x_0 处的 Clarke 次微分定义为

$$\partial h(x_0) = \{\xi \in X^* : \langle \xi, v \rangle \leqslant h^0(x_0, v), \ \forall v \in X\}$$

---

① 收稿日期：2017-09-04

基金项目：国家自然科学基金项目(11571055)；重庆市基础与前沿研究项目(cstc2016jcyjA0239，cstc2015jcyjBX0131).

作者简介：欧小庆(1983-)，女，讲师，主要从事系统决策与管理优化的研究.

通信作者：陈加伟，副教授.

特别地，Clarke 广义导数与次微分满足

$$h^0(x;v)=\max\{\langle\zeta,v\rangle:\zeta\in\partial h(x)\}$$

集合 $C\subset X$ 在 $x_0\in C$ 处的 Clarke 法锥定义为

$$N(C;x_0)=\{\xi\in X^*:\langle\xi,v\rangle\leqslant 0,\ \forall v\in T(C;x_0)\}\tag{1}$$

其中 $T(C;x_0)$ 为集合 C 在 $x_0\in C$ 处的 Clarke 切锥,

$$T(C;x_0)=\{v\in X: 对\ \forall t_n\downarrow 0,\ \forall x_n\to x_0,\ x_n\in C, 存在\ v_n\to v\ 使得\ x_n+t_nv_n\in C\}$$

本文考虑如下(MP)约束多目标优化问题：求最小的 $f(x)$，使得 $g(x)\in D(x\in C)$.

记问题(MP)的可行集为 M. 易知，$M=g^{-1}(D)\cap C$，其中

$$g^{-1}(D)=\{x\in X:g(x)\in D\}$$

如果存在一个数 $\delta>0$，使得

$$(f(M\cap B(x_0;\delta))-f(x_0))\cap(-\mathrm{int}\,K)=\varnothing$$

则称 $x_0\in M$ 为问题(MP)的一个局部弱 Pareto 有效解，其中 $B(x_0;\delta)$ 是以 x_0 为球心，δ 为半径的开球. 如果将 $B(x_0;\delta)$ 替换为 $\mathbb{R}^n$，则可以得到弱有效解的定义. 假设 f,g 都在 $x_0\in M$ 处局部 Lipschitz 连续.

定义 1[13] 如果对于 $\forall y^*\in N(D,g(x_0))\backslash\{0\}$，有

$$0\notin\partial(y^*\circ g)(x_0)+N(C,x_0)$$

则称问题(MP)在 $x_0\in M$ 处满足次微分约束规格(CQ).

命题 1[4,7] 对于 $e\in\mathrm{int}\,K$，函数 $\xi_K(y)=\inf\{t\in\mathbb{R}:y\in te-K\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是连续、正齐次与次可加的，$\xi_K(0)=0$，并且严格 $\mathrm{int}\,K$ 单调的(即如果 $y_2-y_1\in\mathrm{int}\,K$，则 $\xi_K(y_1)<\xi_K(y_2)$).

由文献[8]的定理 3.1，我们可以得到如下结论：

命题 2 $x_0\in M$ 是问题(MP)的一个弱有效解当且仅当 $\xi_K(f(x)-f(x_0))\geqslant 0(\forall x\in M)$.

2 主要结果

借助标量化函数 ξ_K 与 Clarke 次微分，讨论一类非光滑约束多目标优化问题的局部弱有效解的 Karush-Kuhn-Tucker 必要最优性条件.

定理 1 设 x_0 是问题(MP)的一个局部弱有效解，并且问题(MP)在 x_0 处满足次微分约束规格(CQ). 则存在 $\overline{\mu}\in N(D,g(x_0))$，使得

$$0\in\partial\varphi(x_0)+\partial(\overline{\mu}\circ g)(x_0)+N(C,x_0)\tag{2}$$

其中 $\varphi(x)=\xi_K(f(x)-f(x_0))$.

证 因为 x_0 是问题(MP)的一个局部弱有效解，则由命题 2 知

$$\xi_K(f(y)-f(x_0))\geqslant 0\qquad\forall y\in M\cap B(x_0;\delta)$$

由于 $\varphi(x_0)=0$，故 x_0 为优化问题的一个局部解：$\min\limits_{x\in M}\varphi(x)$. 应用文献[10]的定理 3.2(i)可得(2)式.

下面研究命题 1 中函数 ξ_K 的一些性质.

命题 3 $\xi_K^0(0;v)=\xi_K(v)(\forall v\in\mathbb{R}^n)$.

证 由于 ξ_K 是正齐次与次可加的，则它是凸函数. 故 ξ_K 是 Clarke 正则的，并且有

$$\xi_K^0(0;v)=\xi_K'(0;v)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\xi_K(0+tv)-\xi_K(0)}{t}=\xi_K(v)$$

即 $\xi_K^0(0;v)=\xi_K(v)(\forall v\in\mathbb{R}^n)$.

命题 4 $\partial\xi_K(0)\subset K^*$.

证 假设存在 $\xi\in\partial\xi_K(0)$，并且 $\xi\notin K^*$. 存在 $v\in K$ 使得 $\langle\xi,v\rangle<0$，并且有

$$\langle\xi,-v\rangle>0\tag{3}$$

因为 $\xi\in\partial\xi_K(0)$，结合命题 3 可得到

$$\langle \xi, -v \rangle \leqslant \xi_K(-v) - \xi_K(0) = \xi_K(-v) \tag{4}$$

由于 $\xi_K(-v) = \inf\{t \in \mathbb{R}: -v \in te - K\}$ 与 $v \in K$，则有 $v \in 0 \cdot e - K$. 因此 $\xi_K(-v) \leqslant 0$. 结合(4)式，可得到 $\langle \xi, -v \rangle \leqslant 0$，与(3)式矛盾.

下面我们通过一个例子说明命题 3 与命题 4.

例 1　设 $K = \mathbb{R}^2_+$，$e = (1, 1)$. 于是有 $\xi_K(v_1, v_2) = \max\{v_1, v_2\}$，故

$$\partial \xi_K(0) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2: \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \leqslant \max\{v_1, v_2\}\}$$

断言

$$\partial \xi_K(0) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2: \alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$$

事实上，若 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \partial \xi_K(0)$，则有

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \leqslant \max\{v_1, v_2\}$$

取 $v_1 = v_2 = 1$，得到 $\alpha_1 + \alpha_2 \leqslant 1$；取 $v_1 = v_2 = -1$，得到 $-\alpha_1 - \alpha_2 \leqslant -1$. 故 $\alpha_1 + \alpha_2 \geqslant 1$，从而 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

断言 $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$. 反之，不失一般性，假设 $\alpha_1 < 0$. 取 $v = (-1, 0)$，则有

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = -\alpha_1 > 0 = \max\{v_1, v_2\}$$

与 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \partial \xi_K(0)$ 矛盾！ 故 $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$，从而 $\partial \xi_K(0) \subset K^* = \mathbb{R}^2_+$. 易知 $(1, 0), (0, 1) \in \partial \xi_K(0)$. 对 $\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$，有

$$\xi_K^0(0; v) = \max_{\alpha \in \partial \xi_K(0)} (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \max\{v_1, v_2\} = \xi_K(v)$$

定理 2　设 x_0 为问题(MP)的一个局部弱有效解，并且问题(MP)在 x_0 处满足次微分约束规格(CQ). 则存在 $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_n) \in K^*$，$\bar{\lambda} \neq 0$，$\bar{\mu} \in N(D, g(x_0))$，使得

$$0 \in \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \partial f_i(x_0) + \partial(\bar{\mu} \circ g)(x_0) + N(C, x_0) \tag{5}$$

证　因为 x_0 是问题(MP)的局部弱有效解，由定理 1 可知，存在 $\bar{\mu} \in N(D, g(x_0))$，使得

$$0 \in \partial \varphi(x_0) + \partial(\bar{\mu} \circ g)(x_0) + N(C, x_0) \tag{6}$$

其中 $\varphi(x) = \xi_K(f(x) - f(x_0))$. 由于 ξ_K 为凸函数，故它是 Clarke 正则的. 结合文献[6]的定理 2.3.9，我们得到

$$\partial \varphi(x_0) \subset \mathrm{co}\Big\{\sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i: \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \partial \xi_K(0), \xi_i \in \partial f_i(x_0)\Big\} \tag{7}$$

再由(6)式可知，存在 $\bar{\gamma} \in \partial \varphi(x_0)$，使得

$$0 \in \bar{\gamma} + \partial(\bar{\mu} \circ g)(x_0) + N(C, x_0) \tag{8}$$

并且

$$\bar{\gamma} \in \mathrm{co}\Big\{\sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i: \alpha \in \partial \xi_K(0), \xi_i \in \partial f_i(x_0)\Big\}$$

因此，存在 $\eta_1, \cdots, \eta_m \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^m \eta_k = 1$，使得

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^m \eta_k \Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k)} \xi_i^{(k)}\Big)$$

其中

$$\alpha^{(k)} = (\alpha_1^{(k)}, \cdots, \alpha_n^{(k)}) \in \partial \xi_K(0) \qquad \xi_i^{(k)} \in \partial f_i(x_0)$$

则

$$\bar{\gamma} \in \sum_{k=1}^m \eta_k \Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k)} \partial f_i(x_0)\Big) = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{k=1}^m \eta_k \alpha_i^{(k)}\Big) \partial f_i(x_0) \tag{9}$$

不妨设 $\bar{\lambda}_i = \sum_{k=1}^m \eta_k \alpha_i^{(k)}$，则有

$$\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_n)=\sum_{k=1}^{m}\eta_k(\alpha_1^{(k)},\cdots,\alpha_n^{(k)})=\sum_{k=1}^{m}\eta_k\alpha^{(k)}\in\partial\xi_K(0)$$

由于 $\partial\xi_K(0)$ 是凸的，结合(8)，(9)式可以得到

$$0\in\sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_i\partial f_i(x_0)+\partial(\bar{\mu}\circ g)(x_0)+N(C,x_0)$$

结合命题4，有 $\partial\xi_K(0)\subset K^*$，从而 $\bar{\lambda}\in K^*$. 因为 $\bar{\lambda}\in\partial\xi_K(0)$，我们有

$$\langle\bar{\lambda},v\rangle\leqslant\xi_K(v)-\xi_K(0)=\xi_K(v)\qquad\forall v\in\mathbb{R}^n$$

令 $v=-e$，得到 $-e\in-1\cdot e-K$. 由于

$$\xi_K(-e)=\inf\{t\in\mathbb{R}:-e\in te-K\}$$

于是有 $\xi_K(-e)\leqslant-1$，则 $\langle\bar{\lambda},-e\rangle\leqslant\xi_K(-e)\leqslant-1$，故 $\bar{\lambda}\neq0$. 综上所述，存在 $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_n)\in K^*$，$\bar{\lambda}\neq0$ 与 $\bar{\mu}\in N(D,g(x_0))$，使得(5)式成立.

特别地，如果 $\mathbb{R}_+^n\subset K$，下面的结论成立：

推论1 设 x_0 是问题(MP)的局部弱有效解，问题(MP)在 x_0 处满足次微分约束规格(CQ)，并且 $\mathbb{R}_+^n\subset K$. 则存在 $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_n)\in K^*\subset\mathbb{R}_+^n$，$\bar{\lambda}\neq0$ 和 $\bar{\mu}\in N(D,g(x_0))$，使得(5)式成立.

在条件 $\mathbb{R}_+^n\subset\operatorname{int}K\cup\{0\}$ 下，我们得到问题(MP)的强 Kasush-Kuhn-Tucker 必要最优性条件：

定理3 设 x_0 是问题(MP)的局部弱有效解，问题(MP)在 x_0 处满足次微分约束规格(CQ)，并且 $\mathbb{R}_+^n\subset\operatorname{int}K\cup\{0\}$，则存在 $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_n)\in\mathbb{R}_{++}^n$ 和 $\bar{\mu}\in N(D,g(x_0))$，使得

$$0\in\sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_i\partial f_i(x_0)+\partial(\bar{\mu}\circ g)(x_0)+N(C,x_0)\tag{10}$$

证 由定理2可知，存在 $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_n)\in K^*$，$\bar{\lambda}\neq0$，$\bar{\mu}\in N(D,g(x_0))$，使得(10)式成立. 下面我们说明 $\bar{\lambda}_i>0(\forall i=1,\cdots,n)$. 断言 $K^*\subset\mathbb{R}_{++}^n\cup\{0\}$. 假设存在 $\bar{\alpha}=(\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_n)\in K^*$ 和 k,j，使得 $\bar{\alpha}_k=0$，$\bar{\alpha}_j>0$. 因为 $\mathbb{R}_+^n\subset\operatorname{int}K\cup\{0\}$，则有 $K^*\subset\mathbb{R}_+^n$. 用 ε_k 表示第 k 个分量为1的单位向量($k=1,\cdots,n$). 因为 $\mathbb{R}_+^n\subset\operatorname{int}K\cup\{0\}$，故 $\varepsilon_k\in\operatorname{int}K$ 成立($k=1,\cdots,n$). 因此，存在充分小的 $t>0$，使得

$$v=\varepsilon_k-t\varepsilon_j\in K$$

并且

$$\langle v,\bar{\alpha}\rangle=\langle\varepsilon_k,\bar{\alpha}\rangle-t\langle\varepsilon_j,\bar{\alpha}\rangle=-t\bar{\alpha}_j<0$$

与 K^* 的定义矛盾. 故 $K^*\subset\mathbb{R}_{++}^n\cup\{0\}$. 由于 $\bar{\lambda}\in\partial\xi_K(0)\subset K^*$ 和 $\bar{\lambda}\neq0$，于是有 $\bar{\lambda}\in\mathbb{R}_{++}^n$.

参考文献：

[1] 陈加伟，李 军，王景南. 锥约束非光滑多目标优化问题的对偶及最优性条件[J]. 数学物理学报，2012，32(1)：1-12.

[2] 周志昂. 强 G-预不变凸向量优化问题的最优性条件[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，35(1)：65-68.

[3] 欧小庆，李金富，刘 佳，等. 一类约束多目标优化问题弱有效解的一个择一定理[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(1)：109-113.

[4] 赵克全，戎卫东，杨新民. 新的非线性分离定理及其在向量优化中的应用[J]. 中国科学(数学)，2017，47(4)：533-544.

[5] CHEN J W，CHO Y J，KIM J，et al. Multiobjective Optimization Problems with Modified Objective Functions and Cone Constraints and Applications[J]. J Glob Optim，2011，49(1)：137-147.

[6] CLARKE F H. Optimization and Nonsmooth Analysis[M]. New York：Wiley Interscience，1983.

[7] KHAN A A，TAMMER C，ZALINESCU C. Set-valued Optimization：An Introduction with Applications[M]. Berlin：Springer，2015.

[8] GONG X H. Scalarization and Optimality Conditions for Vector Equilibrium Problems [J]. Nonlinear Anal, 2010, 73(11): 3598-3612.

[9] JEYAKUMAR V, LUC D T. Nonsmooth Calculus, Minimality, and Monotonicity of Convexificators [J]. J Optim Theory Appl, 1999, 101(3): 599-621.

[10] MICHEL P, PENOT J P. Calcul Sous-Différentiel Pour Des Fonctions Lipschitziennes et Nonlipschitziennes [J]. C R Math Acad Sci, 1984, 298(12): 269-272.

[11] MORDUKHOVICH B S, SHAO Y. On Nonconvex Subdifferential Calculus in Banach Spaces [J]. J Convex Anal, 1995 (2): 211-227.

[12] JOURANI A, THIBAULT L. Approximations and Metric Regularity in Mathematical Programming in Banach Spaces [J]. Math Oper Res, 1993, 18(2): 390-401.

[13] JOURANI A. Constraint Qualifications and Lagrange Multipliers in Nondifferentiable Programming Problems [J]. J Optim Theory Appl, 1994, 81(3): 533-548.

Necessary Optimality Conditions for a Class of Nonsmooth Constrained Multiobjective Optimization Problems

OU Xiao-qing[1], LI Jin-fu[2], LIU Jia[2],
LIAO Xia[2], CHEN Jia-wei[2]

1. College of Management, Chongqing College of Humanities, Science & Technology, Chongqing 401524, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The scalarization method is an important means for the study of optimality and algorithms of multi-objective optimization problems, and optimality theory is one of the important contents in the optimization theory. In this paper, we first establish some properties of a class of scalarization functions. Then, with the scalarization method and Clarke subdifferentials, we establish the Karush-Kuhn-Tucker necessary optimality conditions for the local weakly efficient solution of a nonsmooth constrained multi-objective optimization problem under the assumption of subdifferential constraint qualification.

Key words: multiobjective optimization; local weakly efficient solution; necessary optimality condition; constraint qualification

责任编辑　廖　坤
崔玉洁