DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.11.005

空间异质环境下带交错扩散项的 Lotka-Volterra 模型分岔解的稳定性①

徐　茜

北京联合大学 基础部，北京 100101

摘要：主要研究空间异质环境下带交错扩散项的 Lotka-Volterra 方程组分岔解的局部渐近稳定性. 由分岔方向及细致的谱分析，证明了分岔平衡解是局部渐近稳定的.

关　键　词：谱分析；稳定性；分岔解

中图分类号：O175.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2018)11－0035－06

本文主要研究下列空间异质环境下 Lotka-Volterra 交错扩散方程组

$$\begin{cases} u_t = \Delta[(1+k\rho(x)v)u] + u(a-u-c(x)v) & x \in \Omega,\ t>0 \\ v_t = \Delta v + v(b+d(x)u-v) & x \in \Omega,\ t>0 \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0 & x \in \partial\Omega,\ t>0 \\ u(\cdot,\ 0) = u_0(x) \geqslant 0,\ v(\cdot,\ 0) = v_0(x) \geqslant 0 & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中：Ω 是 $\mathbb{R}^N(N \leqslant 3)$ 中的有界区域；$c(x)>0$ 和 $d(x) \geqslant 0$ 都是连续函数，$\rho(x)>0$ 是光滑函数并且 $\partial_\nu \rho = 0$，$x \in \partial\Omega$；u 和 v 是被捕食者和捕食者；a，k 是正常数，b 是实数，a，b 代表被捕食者和捕食者的出生率. 交错扩散项 $\Delta[\rho(x)vu] = \nabla[u\nabla(\rho(x)v) + \rho(x)v\nabla u]$ 描述 u 扩散到 $\rho(x)v$ 浓度低的区域的一种趋势. 已有一些文章研究了关于空间异质环境对种群浓度的影响. 文献[1－3]对于一些扩散的 Lotka-volterra 方程组研究了种内之间的退化效果；文献[4－7]研究了对于一些带扩散项的竞争方程组，空间异质环境下的出生率问题；文献[8]对于方程组(1)所对应的平衡解的方程组，证明了当 ρ，c，d 是常数的时候，方程组由分岔参数 b 分岔出来的正解的集合 Γ_p 形成一个有界的曲线，并且当 a 和 $|b|$ 小，k 很大时，$\rho(x)$，$d(x)$ 使得 Γ_p 关于 b 形成一个 $\subset$ 型的曲线；文献[9]研究了带两个趋化参数的趋化模型非常数平衡解的存在性. 本文主要研究文献[8]中得到的分岔平衡解在分岔点 $(0,\ b^*,\ b^*)$ 处的稳定性.

1　预备知识

方程组(1)所对应的平衡解问题为：

$$\begin{cases} \Delta[(1+k\rho(x)v)u] + u(a-u-c(x)v) = 0 & x \in \Omega \\ \Delta v + v(b+d(x)u-v) = 0 & x \in \Omega \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

① 收稿日期：2017－11－20

基金项目：国家自然科学基金项目(11471221，11501031).

作者简介：徐　茜(1982－)，女，副教授，主要从事反应扩散方程的研究.

令

$$U=(1+k\rho(x)v)u$$

则方程组(2)变为

$$\begin{cases}\Delta U+\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\left(a-\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}-c(x)v\right)=0 & x\in\Omega\\ \Delta v+v\left(b+\dfrac{d(x)U}{1+k\rho(x)v}-v\right)=0 & x\in\Omega\\ \partial_\nu U=\partial_\nu v=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{3}$$

易知方程组(3)有半平凡解集为 $\Gamma_v=\{(0,b,b):b>0\}$. 定义空间

$$X:=W_\nu^{2,p}(\Omega)\times W_\nu^{2,p}(\Omega)$$

$$Y:=L^p(\Omega)\times L^p(\Omega)(p>N)$$

其中

$$W_v^{2,p}(\Omega)=\{u\in W^{2,p}(\Omega):\partial_v u\mid_{\partial\Omega}=0\}$$

对于固定的$(k,\rho(x),c(x),d(x))$,引进集合如下:

$$S_v:=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:\lambda_1\left(\frac{bc(x)-a}{1+bk\rho(x)}\right)=0,a\geqslant 0\right\}$$

为了后面证明的需要,先给出引理1.

引理1[8] 任意固定$(k,\rho(x),c(x),d(x))$,则存在一个单调递增的光滑函数 $b=b^*(a)$ 满足

$$b^*(0)=0,\lim_{a\to\infty}b^*(a)=\infty$$

使得

$$S_v=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:b=b^*(a),a\geqslant 0\}$$

定义正函数 φ^* 为下列线性椭圆方程解

$$-\Delta\varphi^*+\frac{b^*c(x)-a}{1+b^*k\rho(x)}\varphi^*=0\qquad x\in\Omega\qquad \partial_\nu\varphi^*\mid_{\partial\Omega}=0\qquad \|\varphi^*\|_{L^2(\Omega)}=1\tag{4}$$

引理2[8] 任意固定$(k,\rho(x),c(x),d(x))$,则下列结论成立:

方程组(3)从Γ_v处分岔当且仅当$b=b^*>0$,存在一个正数δ^*和函数$\psi^*\in X$使得在$(U,v,b)=(0,b^*,b^*)\in X\times\mathbb{R}$附近所有正解有如下形式:

$$\{(U(s),v(s),b(s))=(s(\varphi^*+s\overline{U}(s)),b^*+s(\psi^*+s\overline{v}(s)),b(s)\in X\times\mathbb{R}:0<s\leqslant\delta^*)\}$$

其中

$$\psi^*=(-\Delta+b^*)^{-1}\left(\frac{b^*d(x)}{1+b^*k\rho(x)}\varphi^*\right)>0,(\overline{U}(s),\overline{v}(s),b(s))$$

是有界函数满足

$$b(0)=b^*\qquad \int_\Omega\overline{U}\varphi^*\,\mathrm{d}x=0$$

且

$$\overline{b}(0)<0\qquad \overline{b}(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}b(s)$$

2 在分岔点$(0,b^*,b^*)$附近的分岔平衡解的局部渐近稳定性

在方程组(1)中,令

$$U=(1+k\rho(x)v)u$$

则方程组(1)变为

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\right)_t = \Delta U + \dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\left(a - \dfrac{U}{1+k\rho(x)v} - c(x)v\right) & x\in\Omega,\ t>0 \\
v_t = \Delta v + v\left(b + \dfrac{d(x)U}{1+k\rho(x)v} - v\right) & x\in\Omega,\ t>0 \\
\partial_\nu U = \partial_\nu v = 0 & x\in\partial\Omega,\ t>0 \\
U(\cdot,0) = (1+k\rho(x)v_0)u_0(x)\geqslant 0,\ v(\cdot,0)=v_0(x)\geqslant 0 & x\in\Omega
\end{cases}
\tag{5}
$$

在$(U(s), v(s))$处线性化方程组(5)，相应的特征值问题为

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{1+k\rho(x)v(s)}\sigma U - \dfrac{k\rho(x)U(s)}{(1+k\rho(x)v(s))^2}\sigma v = \Delta U + \\
\dfrac{a}{1+k\rho(x)v(s)}U - \dfrac{2U(s)}{(1+k\rho(x)v(s))^2}U - \dfrac{c(x)v(s)}{1+k\rho(x)v(s)}U - \\
\dfrac{ak\rho(x)U(s)}{(1+k\rho(x)v(s))^2}v + \dfrac{2k\rho(x)U^2(s)}{(1+k\rho(x)v(s))^3}v - \dfrac{c(x)U(s)}{(1+k\rho(x)v(s))^2}v,\ x\in\Omega \\
\sigma v = \Delta v + bv - 2v(s)v + \dfrac{d(x)U(s)}{(1+k\rho(x)v(s))^2}v + \dfrac{d(x)v(s)}{1+k\rho(x)v(s)}U,\ x\in\Omega \\
\partial_\nu U = \partial_\nu v = 0,\ x\in\partial\Omega
\end{cases}
\tag{6}
$$

定义算子 $H: X\times\mathbb{R}\longrightarrow Y$ 为

$$
H(U,v,b) = \begin{pmatrix} H_1(U,v,b) \\ H_2(U,v,b) \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} \Delta U + \dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\left(a - \dfrac{U}{1+k\rho(x)v} - c(x)v\right) \\ \Delta v + v\left(b + \dfrac{d(x)U}{1+k\rho(x)v} - v\right) \end{pmatrix}
$$

经过简单计算可得：

$$
H_{(U,v)}(0,b^*,b^*)\begin{pmatrix} U \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta U + \dfrac{a-b^*c(x)}{1+b^*k\rho(x)}U \\ \Delta v + \dfrac{b^*d(x)}{1+b^*k\rho(x)}U - bv \end{bmatrix}
$$

由式(4)可得

$$
\operatorname{Ker}\{H_{(U,v)}(0,b^*,b^*)\} = \operatorname{span}\{(\varphi^*,\psi^*)\}
$$

其中

$$
\psi^* = (-\Delta + b^*)^{-1}\left(\frac{b^*d(x)}{1+b^*k\rho(x)}\varphi^*\right) > 0
$$

方程组(6)可被改写为

$$
H_{(U,v)}(U(s),v(s),b)\begin{pmatrix} U \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+k\rho(x)v(s)} & -\dfrac{k\rho(x)U(s)}{(1+k\rho(x)v(s))^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma U \\ \sigma v \end{pmatrix}
$$

引进一算子 $L: X\times\mathbb{R}\longrightarrow Y$ 为

$$
L(U(s),v(s),b) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+k\rho(x)v(s)} & -\dfrac{k\rho(x)U(s)}{(1+k\rho(x)v(s))^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} H_{(U,v)}(U(s),v(s),b)
$$

则方程组(6)可记为

$$
L(U(s),v(s),b)\begin{pmatrix} U \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma U \\ \sigma v \end{pmatrix}
$$

根据文献[10]中定理 2.1 和式(4.5)定义函数如下:

$$l_1: X \longrightarrow \mathbb{R}, \langle [f, g], l_1 \rangle = \int_\Omega f\varphi^* \mathrm{d}x \tag{7}$$

定理 1 对任意固定的$(a, k, \rho(x), c(x), d(x))$，由引理 2 定义的方程组(5)的分岔解$(U(s), v(s))$是局部渐近稳定的.

证 首先证明 0 是$L(0, b^*, b^*)$的第一特征值. 对任意固定的$(U, v) \in X$满足

$$L(0, b^*, b^*)\begin{pmatrix} U \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+k\rho(x)b^*} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} H_{(U,v)}(0, b^*, b^*)\begin{pmatrix} U \\ v \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+k\rho(x)b^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta U + \dfrac{a-b^*c(x)}{1+b^*k\rho(x)}U \\ \Delta v + \dfrac{b^*d(x)}{1+b^*k\rho(x)}U - bv \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1+k\rho(x)b^*)\left(\Delta U + \dfrac{a-b^*c(x)}{1+b^*k\rho(x)}U\right) \\ \Delta v + \dfrac{b^*d(x)}{1+b^*k\rho(x)}U - bv \end{pmatrix} = 0 \tag{8}$$

由φ^*和ψ^*的定义易知

$$L(0, b^*, b^*)\begin{pmatrix} \varphi^* \\ \psi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此 0 是$L(0, b^*, b^*)$的一个特征值，下面证明 0 是$L(0, b^*, b^*)$的第一特征值. 反证法，假设 0 不是$L(0, b^*, b^*)$的第一特征值，则存在$L(0, b^*, b^*)$的一个正的特征值λ_1及相应的特征函数$(U_1 v_1) \in X$使得

$$L(0, b^*, b^*)\begin{pmatrix} U_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 U_1 \\ \lambda_1 v_1 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} (1+k\rho(x)b^*)\left(\Delta U_1 + \dfrac{a-b^*c(x)}{1+b^*k\rho(x)}U_1\right) = \lambda_1 U_1 & x \in \Omega \\ \Delta v_1 + \dfrac{b^*d(x)}{1+b^*k\rho(x)}U_1 - b^*v_1 = \lambda_1 v_1 & x \in \Omega \\ \partial_\nu U_1 = \partial_\nu v_1 = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{9}$$

如果$U_1 = 0$且$v_1 \neq 0$，则方程组(9)的第二个方程推出

$$\Delta v_1 - b^* v_1 = \lambda_1 v_1 (\lambda_1 > 0)$$

进而

$$v_1 = (-\Delta + b^*)^{-1}(-\lambda_1 v_1)$$

这是矛盾的，因为当$-\lambda_1 v_1$为负时$(-\Delta + b^*)^{-1}(-\lambda_1 v_1)$是负的，因此$U_1 \neq 0$，则方程组(9)的第一个方程为

$$\Delta U_1 + \frac{a-b^*c(x)}{1+b^*k\rho(x)}U_1 = \frac{\lambda_1}{1+b^*k\rho(x)}U_1$$

由式(4)及单个椭圆方程定理，0 是式(4)的第一特征值与$\lambda_1 > 0$矛盾，因此 0 是$L(0, b^*, b^*)$的第一特征值且其它特征值都是负的. 应用文献[11]中的命题 I.7.2，对$0 < s < \delta$，存在扰动特征值$\sigma(s)$及连续可微函数$\varphi_1(s), \varphi_2(s) \in X \cap \mathrm{Range}(L_{(U,v)}(0, b^*, b^*))$满足

$$L(U(s),\ v(s),\ b(s))\begin{pmatrix}\varphi^{*}+\varphi_1(s)\\ \psi^{*}+\varphi_2(s)\end{pmatrix}=\sigma(s)\begin{pmatrix}\varphi^{*}+\varphi_1(s)\\ \psi^{*}+\varphi_2(s)\end{pmatrix}$$

及

$$\sigma(0)=\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$$

类似地，存在扰动特征值 $\sigma(b)$ 及连续可微函数 $\varphi_1(b),\varphi_2(b)\in X\cap \mathrm{Range}(L_{(U,v)}(0,\ b^{*},\ b^{*}))$ 满足

$$L(0,\ b,\ b)\begin{pmatrix}\varphi^{*}+\varphi_1(b)\\ \psi^{*}+\varphi_2(b)\end{pmatrix}=\sigma(b)\begin{pmatrix}\varphi^{*}+\varphi_1(b)\\ \psi^{*}+\varphi_2(b)\end{pmatrix} \tag{10}$$

及

$$\sigma(b^{*})=\varphi_1(b^{*})=\varphi_2(b^{*})=0$$

在式(10) 中对 b 进行求导及利用

$$\sigma(b^{*})=\varphi_1(b^{*})=\varphi_2(b^{*})=0$$

可推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}L(0,\ b^{*},\ b^{*})\begin{pmatrix}\varphi^{*}\\ \psi^{*}\end{pmatrix}+L(0,\ b^{*},\ b^{*})\begin{pmatrix}\varphi_1'(b^{*})\\ \varphi_2'(b^{*})\end{pmatrix}=\sigma'(b^{*})\begin{pmatrix}\varphi^{*}\\ \psi^{*}\end{pmatrix}$$

其中

$$\sigma'(b)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\sigma(b)$$

由式(7) 可推出

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}L(0,\ b^{*},\ b^{*})\begin{pmatrix}\varphi^{*}\\ \psi^{*}\end{pmatrix},\ l_1\right\rangle=\sigma'(b^{*}) \tag{11}$$

由式(8) 可计算如下方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}L(0,\ b^{*},\ b^{*})\begin{pmatrix}\varphi^{*}\\ \psi^{*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-ak\rho(x)-c(x)}{1+kb^{*}\rho(x)}\varphi^{*}\\ \dfrac{d(x)}{(1+kb^{*}\rho(x))^{2}}\varphi^{*}-\psi^{*}\end{pmatrix} \tag{12}$$

由式(11) 及(12) 可得到

$$\sigma'(b^{*})=\int_{\Omega}\frac{-ak\rho(x)-c(x)}{1+kb^{*}\rho(x)}(\varphi^{*})^{2}\mathrm{d}x<0 \tag{13}$$

由文献[11] 中的公式得到

$$-\bar{\sigma}(0)=\bar{b}(0)\sigma'(b^{*})$$

其中

$$\bar{\sigma}(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sigma(s)$$

由引理 2 及式(13) 可知 $\bar{\sigma}(0)<0$. 由此可推出当 $s>0$ 且很小时 $\sigma(s)<0$，因此引理 2 得到的分岔解 $(U(s),v(s))$ 是局部渐近稳定的.

参考文献：

[1] DU Y，PENG R，WANG M. Effect of a Protection Zone in the Diffusive Leslie Predator-Prey Model [J]. J Differential Equations，2009，246(10)：3932－3956.

[2] DU Y，SHI J P. A Diffusive Predator-Prey Model with a Protection Zone [J]. J Differential Equations，2006，229(1)：63－91.

[3] DU Y，SHI J P. Some Recent Results on Diffusive Predator-Prey Models in Spatially Heterogeneous Environment [J]. Fields Inst Comm，2006(48)：1－41.

[4] HUTSON V, LOU Y, MISCHAIKOW K. Spatial Heterogeneity of Resources Versus Lotka-Volterra Dynamics [J]. J Differential Equations, 2002, 185(1): 97-136.

[5] HUTSON V, LOU Y, MISCHAIKOW K. Convergence in Competition Models with Small Diffusion Coefficients [J]. J Differential Equations, 2005, 211(1): 135-161.

[6] HUTSON V, LOU Y, MISCHAIKOW K, et al. Competing Species Near a Degenerate Limit [J]. SIAM J Math Anal, 2006, 35(2): 453-491.

[7] HUTSON V, MISCHAIKOW K, POLáčIK P. The Evolution of Dispersal Rates in a Heterogeneous Time-Periodic Environment [J]. J Math Biol, 2001, 43(6): 501-533.

[8] KUTO K. Bifurcation Branch of Stationary Solutions for a Lotka-Volterra Cross-Diffusion System in a SpatiallyHeterogeneous Environment [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10(2): 943-965.

[9] 徐 茜, 赵 烨. 带两个趋化参数的趋化模型非常数平衡解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2014, 39(11): 11-16.

[10] SHI J P. Persistence and Bifurcation of Degenerate Solutions [J]. J Funct Anal, 1999, 169(2): 494-531.

[11] KIELHöFER H. Bifurcation Theory: An Introduction with Applications to PDEs [M]. New York: Springer, 2004, 176-178.

The Stability of Bifurcating Solution for a Spatially Heterogeneous Lotka-Volterra Model with Cross Diffusion

XU Qian

Department of Basic Courses, Beijing Union University, Beijing 100101, China

Abstract: In this paper, we concern with the local asymptotical stability of the bifurcating solution for the Lotka-Volterra system with cross diffusion in a spatially heterogeneous environment. By applying a detailed spectral analysis based on the bifurcating direction we prove that the bifurcating steady state solution is locally asymptotically stable.

Key words: spectral analysis; stability; bifurcating solution

责任编辑 张 构