第 40 卷第 11 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2018年11月
Vol. 40　No. 11　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Nov.　2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.11.007

非平衡有向网络上求解分布式经济分配问题的原始-对偶算法[①]

肖　丽[1]，　包骏杰[1]，　石　熙[1]，　周琳琳[2]

1. 重庆第二师范学院 数学与信息工程学院，重庆 400065；
2. 重庆凯源石油天然气有限责任公司，重庆 401120

摘要：受电力系统经济分配问题的启发，研究了分布式经济分配问题，其主要目标是在 m 个智能体组成的非平衡有向网络上最小化 m 个局部凸代价函数之和. 网络中的每个智能体都仅仅知道自己私有的局部凸代价函数，并且同时受到耦合线性约束和局部不等式约束的影响. 此外，特别关注每个智能体仅允许通过不平衡有向网络与其内部邻居进行交互的情况. 为了分布式地解决上述问题，提出一种新的只需要智能体进行本地计算和本地通信的完全分布式原始-对偶次梯度算法. 当网络拓扑是强连通的且权重矩阵是行随机时，理论分析证明本文的算法可以渐进收敛到全局优化问题的最优解. 最后，给出了电力系统中分布式经济分配问题的数值仿真，验证了所提出算法的有效性和分析过程的正确性.

关　键　词：非平衡有向网络；经济分配；分布式优化；原始-对偶算法；渐进收敛

中图分类号：O224　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2018)11－0048－07

分布式凸优化问题是指在缺乏全局优化问题的完整信息的情况下，系统中的多智能体协作地求解全局代价函数的最优解. 这类问题的解决需要设计完全分布式的优化算法，也就是优化算法由没有中央协调器的智能体来实现. 分布式优化问题最近取得了许多重要成果[1－12]，基于一致的分布式策略正成为解决优化问题的主流. 这已经产生了许多优化算法，包括分布式次梯度下降算法[1]、分布式对偶平均算法[2]、分布式 nesterov 梯度算法[3]等. 随后，这一系列工作被扩展到各种现实条件下的分布式优化，如随机次梯度误差[4]、随机通信网络[5]等. 实际上，上述分布式优化算法[2－5]的实现都需要构建一系列双随机矩阵，阻碍了这些算法的开发和实际应用，特别是在随时间变化的一般非平衡有向实际网络环境中，因为双随机矩阵的条件难以以分布式方式满足. 为了解决上述非平衡问题，最近的文献[6－8]分别从不同的角度解决非平衡性. 值得注意的是，尽管文献[6－8]中的算法避免了构造双随机矩阵，但它们都要求所有智能体准确地知道其入度邻居的出度信息进而必须构造列随机权重矩阵. 然而，构造列随机矩阵在某些方案(例如基于广播的通信方案)中可能是不现实的.

当网络是非平衡有向且相应的权重矩阵是行随机时，Mai 和 Abed[9]提出了一种改进的分布式次梯度投影方法，用于求解具有全局约束集的分布式优化问题. 在代价函数是凸且光滑的情况下，理论分析证明了文献[9]中的算法渐进收敛于优化问题的最优解. 遗憾的是，文献[9]中的算法不能解决带有耦合线性约束和局部不等式约束的分布式优化问题. 因此，Doan 和 Beck[10]开发了一种分布式拉格朗日网络资源分配方法，该方法能够很好解决带有耦合线性约束和局部不等式约束的分布式优化问题. 但是，在文献[10]中，网络拓扑结构是无向的，这在实际网络环境中是不切实际的.

---

① 收稿日期：2018－05－18
基金项目：重庆市自然科学基金项目(cstc2018jcyjAX0810)；重庆市教委科学技术研究项目(KJ1714355，KJ1501408).
作者简介：肖　丽(1981－)，女，副教授，博士，主要从事多智能体系统、分布式优化及应用研究.

综上所述，在非平衡有向网络上研究带有耦合线性约束和局部不等式约束的分布式优化问题并将其应用于电力系统中分布式经济分配上将会是一项非常有意义的工作. 因此，本文的主要贡献可以归纳为以下3个方面：① 在非平衡有向网络上提出一种新颖的分布式原始-对偶次梯度算法解决带有耦合线性约束和局部不等式约束的分布式优化问题，与文献[10]相比，本文算法适用于非平衡有向网络；② 虽然文献[9]同样考虑了行随机矩阵，但是本文算法能够处理带有耦合线性约束和局部不等式约束的分布式优化问题；③ 本文算法最终渐进收敛到全局优化问题的最优解.

1 预备工作

我们用 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^{m\times m}$ 分别表示 m 维实向量集和 $m\times m$ 实矩阵集. 本文出现的所有向量都是列向量. 定义 $x_i(t)$ 为智能体 i 在 t 时刻的估计. 符号$()^{\mathrm{T}}$ 定义为一个矩阵或向量的转置. 对于一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，a_{ij} 为其第 i 行第 j 列的元素. 定义 $\mathbf{1}_m$ 为元素全为 1 的 m 维列向量. 符号 $\boldsymbol{I}_m$ 为 $m\times m$ 单位矩阵. 我们用 $\|\cdot\|$ 表示一个矩阵或者向量的欧拉范数. 定义向量 $\boldsymbol{e}_i=[0,\cdots,0,1_i,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$. 一个非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是行随机的如果 $\boldsymbol{A}\mathbf{1}_m=\mathbf{1}_m$ 成立，$\boldsymbol{A}$ 是列随机的如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}_m=\mathbf{1}_m$，$\boldsymbol{A}$ 是双随机的如果 $\boldsymbol{A}$ 既是行随机又是列随机. 给定一个任意、恰当、闭、凸函数 $f(\boldsymbol{x})$，对任意的 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$，定义 $f^{\dagger}(\boldsymbol{y})=\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-f(\boldsymbol{x})$ 为其共轭函数.

我们用 $G=\{V,E,\boldsymbol{A}\}$ 表示一个非平衡有向加权网络，其中 $V=\{1,\cdots,m\}$ 表示智能体集合，$E\subseteq V\times V$ 表示边的集合；$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times m}(a_{ij}\geqslant 0)$ 表示网络 G 的加权邻接矩阵. 具体地，如果$(j,i)\in E$，$\forall i,j\in V$ 成立，那么它意味着智能体 i 可以直接接收从智能体 j 传来的信息，也就是 $a_{ij}>0$. 用 $N_i^{in}=\{j\mid (j,i)\in E\}$ 表示智能体 i 的入度邻居集合. 有向网络中一条从智能体 i_1 到智能体 i_k 的路径可以表示为一系列有向连通边$(i_1,i_2),(i_2,i_3),\cdots,(i_{k-1},i_k)$，其中$(i_{j-1},i_j)\in E$ 且 $j=2,\cdots,k$. 在一个有向网络中如果智能体集中任意两个智能体之间总存在一条有向路径，则将这个有向网络称为强连通的.

1.1 问题模型

总的来说，本文主要考虑如下分布式约束优化问题

$$\min f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^m f_i(x_i),\ \text{s.t.}\sum_{i=1}^m x_i=P,\ l_i^{\min}\leqslant x_i\leqslant l_i^{\max} \tag{1}$$

$\forall i=1,\cdots,m$，其中 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^m$. 每一个智能体 i 只可以获取自身的局部凸代价函数 $f_i:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$. 耦合线性约束集定义为 $M=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m\mid\sum_{i=1}^m x_i=P\}$，不等式约束集定义为 $X=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m\mid l_i^{\min}\leqslant x_i\leqslant l_i^{\max}\}$. 假定 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_m$ 为 X_i 的笛卡儿积且 $S=M\cap X$ 表示优化问题(1)的可行解集. 我们令 $\boldsymbol{x}^*=[\boldsymbol{x}_1^*,\cdots,,\boldsymbol{x}_m^*]^{\mathrm{T}}$，$X^*$ 和 $f(\boldsymbol{x}^*)=f^*$ 分别为优化问题(1)的最优解、最优解集和最优值.

1.2 问题转化

优化问题(1)的拉格朗日函数 $L:X\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为如下形式

$$L(\boldsymbol{x},\lambda)=\sum_{i=1}^m f_i(x_i)+\lambda(\sum_{i=1}^m x_i-P) \tag{2}$$

其中 λ 是等式约束 $\sum_{i=1}^m x_i-P=0$ 的拉格朗日乘子. 基于共轭函数的定义，对于一个给定的 $\lambda\in\mathbb{R}$，优化问题(1)的对偶函数可以转化为如下形式

$$D(\lambda)=\min_{\boldsymbol{x}\in X}L(\boldsymbol{x},\lambda)=$$
$$\min[\sum_{i=1}^m f_i(x_i)+\lambda(\sum_{i=1}^m x_i-P)]=\sum_{i=1}^m(-f_i^{\dagger}(-\lambda)-\lambda\frac{P}{m})=\sum_{i=1}^m D_i(\lambda) \tag{3}$$

其中 $D_i(\lambda)=-f_i^{\dagger}(-\lambda)-\lambda\dfrac{P}{m}$ 是一个凹函数. 因此，优化问题(1)的对偶问题可以表示为

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}}D(\lambda) \tag{4}$$

其中 $D(\lambda)$ 可能不可微. 给定一个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且假设(3) 式中相应的最小值为 $\tilde{\boldsymbol{x}}$，那么 $D(\lambda)$ 的次梯度为

$$\nabla D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\boldsymbol{x}}_i - P \tag{5}$$

注意 $\boldsymbol{x}^*$ 为最优解. 那么，由假设 1 可知，问题(4) 必定存在一个对偶最优解 λ^* 满足强对偶性成立，即 $f(\boldsymbol{x}^*) = D(\lambda^*)$. 此外，一对最优解$(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*)$ 被称为拉格朗日函数 L 在集合 $S \times \mathbb{R}$ 上的鞍点，即

$$L(\boldsymbol{x}^*, \lambda) \leqslant L(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*) \leqslant L(\boldsymbol{x}, \lambda^*), \ \forall \boldsymbol{x} \in S, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{6}$$

1.3　分布式原始-对偶算法

注意到根据(3) 式求解(4) 式等价于求解下列最小化问题

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} Q(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} Q_i(\lambda) \tag{7}$$

其中 Q_i 是一个凸代价函数

$$Q_i(\lambda) = -D_i(\lambda) = f_i^{\dagger}(-\lambda) + \lambda \frac{P}{m} \tag{8}$$

在假设 1—3 的基础上，我们提出了求解问题(7) 的分布式优化算法. 具体地，对于任意的 $t = 0, 1, \cdots$，我们用 $x_i(t)$ 和 $\lambda_i(t)$ 两个状态分别去估计原始最优解 $\boldsymbol{x}_i^*$ 和对偶最优解 λ^*，用 $\boldsymbol{z}_i(t)$ 去消除网络的非平衡性. 假设每个智能体 i 的初始值为 $x_i(0) \in X_i$，$\lambda_i(0) \in \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{z}_i(0) = \boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^m$. 由此，变量 $x_i(t)$，$\lambda_i(t)$ 和 $\boldsymbol{z}_i(t)$ 的更新规则如下

$$x_i(t+1) = \arg\min_{x_i \in X_i} f_i(x_i) + \lambda_i(t)(x_i - \frac{P}{m}) \tag{9}$$

$$\lambda_i(t+1) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j(t) - \alpha(t) \frac{\nabla Q_i(t)}{\boldsymbol{z}_{ii}(t)} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{z}_i(t+1) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{z}_j(t) \tag{11}$$

其中：$\alpha(t)$ 是步长，$\boldsymbol{z}_i(t) = [\boldsymbol{z}_{i1}(t), \cdots, \boldsymbol{z}_{im}(t)]^{\mathrm{T}}$，$\nabla Q_i(t)$ 是函数 $Q_i(\lambda)$ 在 $\lambda = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j(t)$ 上的次梯度. 此外，我们有如下的假设.

假设 1　非平衡有向网络 G 是强连通的.

假设 2　对于任意的 $i = 1, \cdots, m$，函数 f_i 是可微的且其次梯度 ∇f_i 是利普希茨连续的，利普希茨系数为 σ_i. 也就是说，对于任意的 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$，$\nabla f_i$ 满足如下的不等式

$$\| \nabla f_i(\boldsymbol{y}) - \nabla f_i(\boldsymbol{x}) \| \leqslant \sigma_i \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \|$$

假设 3　权重矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是行随机的且其对角元素是正的.

假设 4　步长 $\alpha(t)$ 是正的且满足 $\sup_{t \geqslant 0} \alpha(t) \leqslant 1$，$\sum_{t=0}^{\infty} \alpha(t) = \infty$ 和 $\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^2(t) < \infty$.

2　收敛性分析

注意到算法(11) 是一个一致迭代过程，其最终迭代到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个左 perron 向量估计 $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \cdots, \pi_m]^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{1}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} = 1$. 针对这个 perron 向量，我们有如下的两个引理.

引理 1　让假设 1 和 3 成立，那么 $\boldsymbol{\pi}$ 是一个严格正向量且满足

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{1}_m \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

引理 1 是 Perron-Frobenius 定理的一个主要结论. 此外，引理 1 收敛速度是几何的.

引理 2[9]　设假设 1 和 3 成立，考虑到算法(10) 和(11)，那么对任意的 $i, j \in V$ 和 $t \geqslant 0$，存在 $C > 0$ 和 $\gamma \in (0, 1)$ 满足下面的不等式成立

$$|[A^t]_{ji} - \pi_i| \leqslant C\gamma^t, \ | z_{ii}(t) - \pi_i | \leqslant C\gamma^t \tag{13}$$

其次，算法(10) 可以转化为如下形式

$$\lambda_i(t+1)=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j(t)+\varepsilon(t),\ \forall i \in V \tag{14}$$

其中

$$\varepsilon(t)=\frac{-\alpha(t)\,\nabla Q_i(t)}{z_{ii}(t)}$$

因此，我们有

$$\|\varepsilon(t)\|=\|-\alpha(t)\frac{\nabla Q_i(t)}{z_{ii}(t)}\|\leqslant \alpha(t)\frac{L}{z_{ii}(t)} \tag{15}$$

其中用到条件 $\|\nabla Q_i(t)\|\leqslant L$，$\forall i \in V$(根据假设2可知 L 存在). 注意到 $z_{ii}(t)>0$，$\forall t \geqslant 0$ 且

$$\lim_{t\to\infty} z_{ii}(t)=\pi_i>0$$

可以得到$\{z_{ii}^{-1}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ 是一个正有界序列. 根据假设4，可以得到

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(t)=0$$

由(15)式可知$\lim\limits_{t\to\infty}\|\varepsilon(t)\|=0$. 定义 $\bar{\lambda}(t)=\sum\limits_{i=1}^{m}\pi_i\lambda_i(t)$.

由文献[9]易得如下引理3,4.

引理3 若假设1－4成立，根据算法(10)和(11)，可以得到下面条件成立

$$\lim_{t\to\infty}\|\lambda_i(t)-\bar{\lambda}(t)\|=0,\ \forall i \in V,\ t \geqslant 0 \tag{16}$$

证 由上面分析可知，$\lim\limits_{t\to\infty}\|\varepsilon(t)\|=0$ 成立. 因此，引理3的证明可以直接从文献[9]获得.

下面给出一个重要引理，这个引理对算法的收敛性分析起到了至关重要的作用.

引理4 若假设1－4成立，考虑算法(10)和(11)，那么存在 $\gamma \in (0,1)$ 和 $t_0>0$ 满足对任意 $u \in \mathbb{R}$ 和 $t \geqslant t_0$ 下面的不等式成立

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\pi_i\|\lambda_i(t+1)-u\|^2 \leqslant& \sum_{i=1}^{m}\pi_i\|\lambda_i(t)-u\|^2-2\alpha(t)(Q(\bar{\lambda}(t))-Q(u))+\\ &B_1\alpha(t)\gamma^t+B_2\alpha(t)\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)-\bar{\lambda}(t)+B_3\alpha^2(t)\end{aligned} \tag{17}$$

其中

$$B_1=2LC\sup_{a,b\in X}\|a-b\|(\sup_{t\geqslant 0}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{z_{ii}(t)})$$

$$B_2=2L\sup_{t\geqslant 0}\sum_{i=1}^{m}\frac{\pi_i}{z_{ii}(t)}$$

和

$$B_3=L^2\sup_{t\geqslant 0}\sum_{i=1}^{m}\frac{\pi_i}{z_{ii}^2(t)}$$

证 定义 $v_i(t)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\lambda_j(t)$. 对任意的 $u \in \mathbb{R}$，从算法(11)可以很容易得到

$$\|\lambda_i(t+1)-u\|^2 \leqslant \|v_i(t)-u\|^2-\frac{2\alpha(t)}{z_{ii}(t)}\nabla Q_i(t)^{\mathrm{T}}(v_i(t)-u)+\frac{\alpha^2(t)L^2}{z_{ii}^2(t)} \tag{18}$$

其中使用条件

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=1$$

和

$$\|\nabla Q_i(t)\|\leqslant L$$

得到(18)式. (18)式右边的第一项上界为

$$\|v_i(t)-u\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m}a_{ij}\|\lambda_j(t)-u\|^2 \tag{19}$$

(18) 式右边的第二项的上界为

$$-\frac{2\alpha(t)}{z_{ii}(t)}\nabla Q_i(\lambda_i(t))^{\mathrm{T}}(v_i(t)-u)\leqslant\frac{2\alpha(t)}{z_{ii}(t)}(L\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\|\lambda_j(t)-\bar{\lambda}(t)\|-(Q_i(\bar{\lambda}(t))-Q_i(u)))\tag{20}$$

其中使用 Q_i 的凸性和次梯度有界性得到式(20)．从(18)－(20) 式可以得到

$$\|\lambda_i(t+1)-u\|^2\leqslant\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\|\lambda_j(t)-u\|^2-\frac{2\alpha(t)}{z_{ii}(t)}(Q_i(\bar{\lambda}(t))-Q_i(u))+\frac{2L\alpha(t)}{z_{ii}(t)}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\|\lambda_j(t)-\bar{\lambda}(t)\|+\frac{\alpha^2(t)L^2}{z_{ii}^2(t)}\tag{21}$$

(21) 式两边同时乘以 π_i 然后在 i 求和得

$$\sum_{i=1}^{m}\pi_i\|\lambda_i(t+1)-u\|^2\leqslant\sum_{i=1}^{m}\pi_i\|\lambda_i(t)-u\|^2-2\alpha(t)\sum_{i=1}^{m}\frac{\pi_i}{z_{ii}(t)}(Q_i(\bar{\lambda}(t))-Q_i(u))+2L\alpha(t)\sum_{i=1}^{m}\frac{\pi_i}{z_{ii}(t)}\sum_{j=1}^{m}\|\lambda_j(t)-\bar{\lambda}(t)\|+\sum_{i=1}^{m}\frac{\pi_i\alpha^2(t)L^2}{z_{ii}^2(t)}\tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}$．又因为

$$-2\alpha(t)\sum_{i=1}^{m}\frac{\pi_i}{z_{ii}(t)}(Q_i(\bar{\lambda}(t))-Q_i(u))\leqslant-2\alpha(t)(Q(\bar{\lambda}(t))-Q(u))+B_1\alpha(t)\gamma^t\tag{23}$$

此外，

$$2L\alpha(t)\sum_{i=1}^{m}\frac{\pi_i}{z_{ii}(t)}\sum_{j=1}^{m}\|\lambda_j(t)-\bar{\lambda}(t)\|\leqslant B_2\alpha(t)\sum_{j=1}^{m}\|\lambda_j(t)-\bar{\lambda}(t)\|\tag{24}$$

根据(22)－(24) 式，可以很容易得到引理 4 的结果．

本文的第一个主要结果在下面的定理中指出．

定理 1　若假设 1－4 成立，序列$\{x_i(t)\}$和$\{\lambda_i(t)\}$由算法(9)－(11) 更新，可以推出$\lim\limits_{t\to\infty}\lambda_i(t)=\lambda^*$对任意 $i\in V$ 都成立．

证　定理 1 的证明可以分为两部分．第一部分需要证明对偶状态的平均 $\bar{\lambda}(t)$ 随着 $t\to\infty$ 渐进收敛到对偶最优解 λ^*．根据引理 3 可知每个对偶状态 $\lambda_i(t)$ 随着 $t\to\infty$ 都渐进收敛到对偶状态的平均 $\bar{\lambda}(t)$．因此，第二部分通过结合第一部分和引理 3 进而得定理 1 的结论．因为引理 4 得到的结论与文献[9] 的定理 1 结论类似，所以可以参照文献[9] 直观得到第一部分结论．因此，本文定理 1 的余下证明在这里省略．

接下来，给出本文的第二个主要结果．

定理 2　若假设 1－4 成立，序列$\{x_i(t)\}$和$\{\lambda_i(t)\}$由算法(9)－(11) 更新，可以推出$\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)=x_i^*$对任意 $i\in V$ 都成立．

证　对于拉格朗日对偶问题(4)，可以推出至少存在一个对偶最优解 λ^* 和原问题(1) 的唯一最优解 x_i^* 满足 $x_i^*=x_i(\lambda^*)$ 对任意 $i\in V$ 都成立．由定理 1 可知$\lim\limits_{t\to\infty}\lambda_i(t)=\lambda^*$ 对任意 $i\in V$ 都成立．因此，由$\lim\limits_{t\to\infty}\lambda_i(t)=\lambda^*$ 可以得到每个原始状态 $x_i(t)$ 都随着 $t\to\infty$ 渐进收敛到一个唯一最优解 x_i^*，也就是$\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)=x_i^*$ 对任意 $i\in V$ 都成立．证明结束．

3　数值仿真

通过电力系统中分布式经济调度问题的仿真实例来验证所提出算法的有效性和分析过程的正确性．研究 IEEE-14 总线系统的经济调度问题，该总线系统结构可以参照文献[12]．系统的通信结构由一个非平衡有向网络表示．在仿真中，假设每个发电机 i 存在其自身的代价函数 $Y_i(P_i)=a_iP_i+b_iP_i^2$，其中 a_i 和 b_i 是每个发电机 i 可调控的代价增益．考虑实际环境，不同发电机产生的功率可能不相同，因此所产生的功率都具有有限界限$[0, P_i^{\max}]$．假设每个发电机都知道系统总需求 $P=300$ MW．最后，每个发电机参数 a_i，b_i 和 $P_i^{\max}$ 的取值参照文献[10]．

基于以上的参数设计，算法(9)－(11) 的仿真结果如图 1 和图 2 所示．从图中可以看出本文算法成

功地为每个发电机分配最优功率，并且每个拉格朗日乘子收敛到对偶最优解．具体的最优功率分配为：$P_1^* = 66.24$ MW，$P_2^* = 71.62$ MW，$P_3^* = 47.15$ MW，$P_4^* = 54.99$ MW 和 $P_5^* = 60.00$ MW；对偶最优解 $\lambda^* = -7.301$．

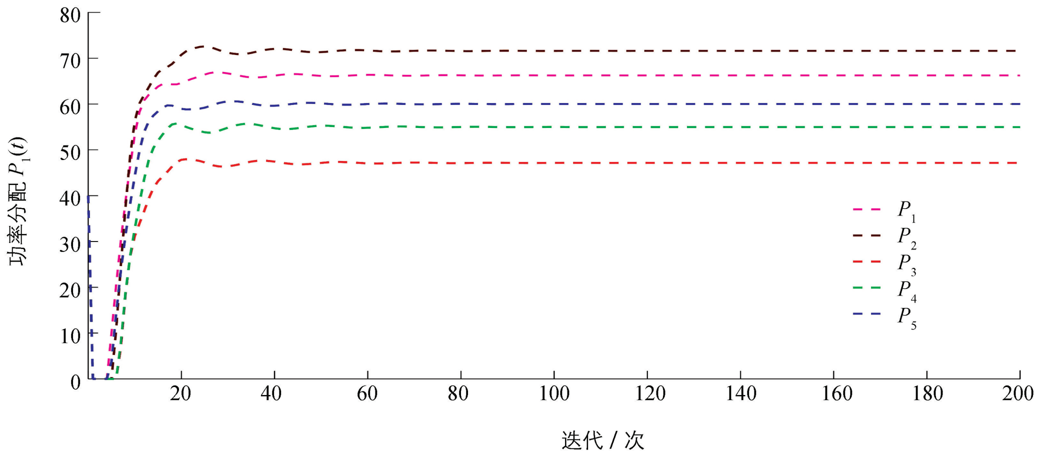

图 1　每个发电机的最优功率分配

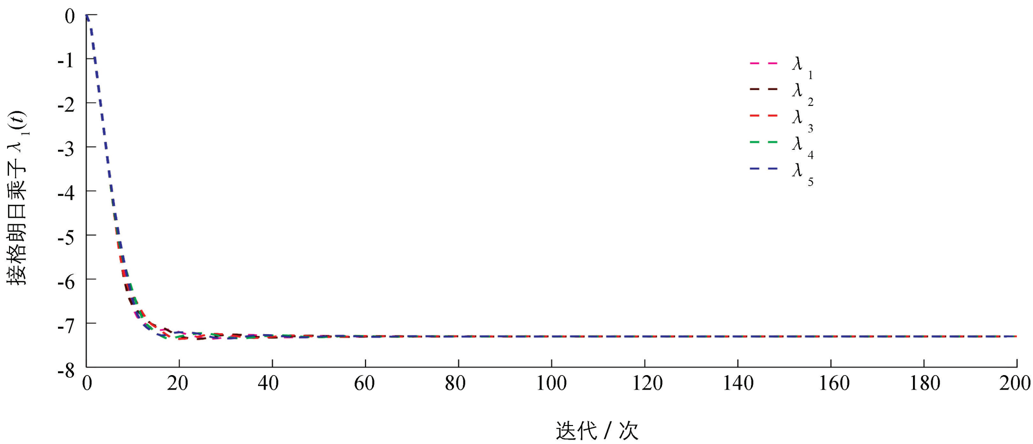

图 2　最优拉格朗日乘子

4　结　论

本文开发并分析了一种完全分布式的原始-对偶算法，用于处理带有耦合线性约束和不等式约束的分布式经济分配问题．本文算法采用了行随机权重矩阵并且被证明是适用于非平衡有向网络．在代价函数是凸且利普希茨连续的假设下，所提出的算法渐进收敛到全局优化问题的精确最优解．此外，通过电力系统中分布式经济分配问题的仿真实例验证了算法的性能．在未来的研究中，将本文的工作扩展到智能体在时变非平衡有向网络上的事件触发，异步和量化通信的情况是非常有意义的．

参考文献：

[1] NEDIC A，OZDAGLAR A. Distributed Subgradient Methods for Multi-Agent Optimization [J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2009，54(1)：48－61.

[2] DUCHI J C，AGARWAL A，WAINWRIGHT M J. Dual Averaging for Distributed Optimization：Convergence Analysis and Network Scaling [J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2012，57(3)：592－606.

[3] CHEN A I，OZDAGLAR A. A Fast Distributed Proximal-Gradient Method [C]// 2012 50th Annual Allerton Conference on Communication，Control，and Computing (Allerton). Monticello：IEEE Press，2012：601－608.

[4] SUNDHAR RAM S，NEDIC A，VEERAVALLI V V. Distributed Stochastic Subgradient Projection Algorithms for

Convex Optimization [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2010, 147(3): 516－545.

[5] MATEI I, BARAS J S. Performance Evaluation of the Consensus-Based Distributed Subgradient Method Under Random Communication Topologies [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2011, 5(4): 754－771.

[6] NEDIC A, OLSHEVSKY A. Distributed Optimization over Time-Varying Directed Graphs [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(3): 601－615.

[7] 张　豪，韩易言，吕庆国，等. 时变网络拓扑图下智能电网中基于优化算法的分布式调度响应 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(7)：177－180.

[8] XI C, KHAN U A. DEXTRA: A Fast Algorithm for Optimization Over Directed Graphs [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(10): 4980－4993.

[9] MAI V S, ABED E H. Distributed Optimization Over Weighted Directed Graphs Using Row Stochastic Matrix [C]// 2016 American Control Conference. Boston, MA: IEEE Press, 2016: 7165－7170.

[10] DOAN T T, BECK C L. Distributed Lagrangian Methods for Network Resource Allocation [C]// 2017 IEEE Conference on Control Technology and Applications. Mauna Lani: IEEE Press, 2017: 650－655.

[11] 张文光，陈　俊，姚钰辉，等. 分布式网络环境中基于 MapReduce 的 WordCount 实现 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2015，33(1)：93－97.

[12] KAR S, HUG G. Distributed Robust Economic Dispatch in Power Systems: A Consensus ＋ Innovations Approach [C] // Proceedings of 2012 IEEE Power and Energy Society. General Meeting. New York: IEEE Computer Society Press, 2012: 1－8.

A Primal-Dual Algorithm for Solving Distributed Economic Allocation Problem Over a Directed Unbalanced Network

XIAO　Li[1]，　BAO Jun-jie[1]，　SHI　Xi[1]，　ZHOU Lin-lin[2]

1. Department of Mathematics and Information Engineering, Chongqing University of Education, Chongqing 400065, China;

2. Chongqing Kaiyuan Petroleum and Natural Gas Company Limited, Chongqing 401120, China

Abstract: Inspired by the economic allocation problem in power systems, this paper studies the distributed economic allocation problem in power systems where the main goal is to minimize a sum of local convex cost functions over a directed unbalanced network composed of agents. Each agent in the network privately knows its own local convex cost function and is subjected to both coupling linear constraint and individual inequality constraints. Moreover, we particularly focus on the scenario where each agent is only allowed to interact with its in-neighbors over a directed unbalanced network. In order to solve the above problems distributedly, we propose a new fully distributed primal-dual subgradient algorithm that only requires the agent to perform local computing and local communication. Most of the existing algorithms require all agents to possess the out-degree information of their in-neighbors, which is impractical and hardly inevitable as interpreted in the paper. When the network topology is strongly connected and the weight matrix is row stochastic, theoretical analysis proves that our algorithm can converge to the optimal solution of the global optimization problem. Finally, we present a numerical simulation of the distributed economic allocation problem in power systems to verify the effectiveness of the proposed algorithm and the correctness of the analysis process.

Key words: directed unbalanced network; economic allocation; distributed optimization; primal-dual algorithm; asymptotic convergence

责任编辑　张　构