DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.11.009

平稳序列的次最大值和次最小值与其位置的渐近性质[①]

卜雪妍，　陈守全

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：讨论了含有极值指标的平稳序列的次最大值与其位置在长相依条件下的渐近性质，并给出了次最大值和次最小值与它们的位置的渐近性质.

关 键 词：点过程；相依条件；最大值的位置；渐近独立

中图分类号：O211.4　**文献标志码**：A　**文章编号**：1673-9868(2018)11-0061-06

极值理论的研究在人类生活中具有非常重要的地位和作用，常用于预测一些极端随机现象和小概率事件. 如今，由于极值理论的应用日益成熟、理论本身的发展以及经济金融领域频繁发生危机，对人类的生活和社会造成了重大影响，使得极值理论的价值和优越性进一步得以体现，逐步走向了金融风险管理领域. 而且，极值统计量和它们的位置关系的研究作为极值理论研究的一部分，在极值分析中有着非常重要的作用，主要被应用在对环境和财经的数据处理分析中，当我们所研究的数据部分丢失时，应怎样选取数据确保这组数据达到我们预期的概率. 类似的问题促使研究者们对极值顺序统计量位置的渐进分布进行深入研究.

对于平稳序列，文献[1]已经证明了最大值和其首次出现的位置在独立同分布的情况下渐近独立以及最大值的位置渐近服从均匀分布；文献[2]得到了在弱混合条件下，平稳序列的最大值与最小值位置的联合渐近分布；文献[3]讨论了平稳高斯向量序列最大值与最小值联合的几乎处处收敛；文献[4]讨论了高斯三角阵的最大值与最小值的密度函数的渐近性质. 到目前为止，对于次最大值与次最小值的渐近性质尚未研究，因此，本文在已有研究的基础上对平稳序列的次最大值和它的位置的渐近性质以及次最大值和次最小值位置的渐近性质作进一步研究.

设$\{X_n\}_{n\geqslant 1}$是严格的平稳序列，且存在实数列$\{a_n>0\}_{n\geqslant 1}$和$\{b_n\}$，使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$有

$$P\{a_n^{-1}(M_n-b_n)\leqslant x\}\to G(x) \tag{1}$$

其中G表示非退化的分布函数. 如果对每个$\tau>0$，存在$\{u_n^{(\tau)}\}_{n\geqslant 1}$使得

$$\lim_{n\to\infty} n(1-F(u_n^{(\tau)}))\to\tau$$

和

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n\leqslant u_n^{(\tau)})\to\exp\{-\theta\tau\}$$

成立，那么就说$\{X_n\}$有极值指标θ，$0<\theta\leqslant 1$，因此(1)式成立当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} n(1-F(u_n(x)))\to\tau(x)=-\frac{1}{\theta}\log G(x),\ x\in\mathbb{R}$$

① 收稿日期：2017-11-01

基金项目：国家自然科学基金项目(11571283).

作者简介：卜雪妍(1993-)，女，硕士研究生，主要从事极值分析的研究.

通信作者：陈守全，博士，副教授.

用 $M_n^{(k)}(I)$ 和 $m_n^{(r)}(I)$ 分别表示该序列的第 k 个最大值和第 r 个最小值，$\overline{L}_n^{(k)}$ 和 $\underline{L}_n^{(r)}$ 分别表示第 k 个最大值的位置和第 r 个最小值的位置，即：

$$\overline{L}_n^{(k)}=\min\{1\leqslant j\leqslant n: M_n^{(k)}=X_j\}$$
$$\underline{L}_n^{(r)}=\min\{1\leqslant j\leqslant n: m_n^{(r)}=X_j\}$$

1 预备知识

下面先定义平稳序列超过水平 $u_n(x)=a_nx+b_n$ 所构成的点过程 N_n

$$N_n(\mathbb{B})=\sum_{i=1}^{n} I_{\{i/n\in\mathbb{B},\ x_i>u_n(x)\}}$$

其中 $\mathbb{B}$ 是(0，1]上的 Borel 集. 根据上述定义显然有

$$P\{N(\mathbb{B})=0\}=P\{M_n(\mathbb{B})\leqslant u_n\}$$

如果对于任意的 τ，$n(1-F(u_n))=np\{x_i>u_n\}\to\tau$，文献[1]中的条件 $D(u_n(\tau))$ 和 $D'(u_n(\tau))$ 成立，那么点过程 N_n 收敛到参数为 τ 的泊松过程 N.

文献[1]中对平稳序列在相依条件下的最大值分布做了研究，文献[5-6]证明了平稳序列在相依条件下最大值和最小值是渐近独立的. 下面将对文献[1，5-6]的条件进行推广，使得$\{M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(1)}, M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)}\}$ 和$\{M_n^{(1)}(J)\leqslant u_n^{(3)}, M_n^{(2)}(J)\leqslant u_n^{(4)}\}$ 渐近独立. 对于$\{1,2,\cdots,n\}$中的子集 I, J, E, F 且有 $I\cup J=\{1,2,\cdots,n\}$，$E\cup F=\{1,2,\cdots,n\}$ 和 $I\cap J=E\cap F=\varnothing$，使得$\{\{M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(1)}, M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)}, M_n^{(1)}(J)\leqslant u_n^{(3)}, M_n^{(2)}(J)\}\leqslant u_n^{(4)}\}$ 和$\{m_n^{(1)}(E)>v_n^{(1)}, m_n^{(2)}(E)>v_n^{(2)}, m_n^{(1)}(F)>v_n^{(3)}, m_n^{(2)}(F)>v_n^{(4)}\}$ 渐近独立，其中 $u_n^{(k)}, v_n^{(k)}$，$k=1,2,3,4$ 满足

$$n(1-F(u_n^{(k)}))\to\tau_k,\ n(F(v_n^{(k)}))\to\eta_k$$

定义 1 如果对于给定的实数序列$\{(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, u_n^{(3)}, u_n^{(4)})\}$，且 $u_n^{(i)^*}\in\{(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, u_n^{(3)}, u_n^{(4)})\}$ 使得

$$\alpha_{n,l}=\sup_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_p<j_1<\cdots<j_q\leqslant n\\ j_1-i_p>l}}\left|P(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s}\leqslant u_{ni_s}^*\},\bigcap_{s=1}^{q}\{X_{j_s}\leqslant u_{nj_s}^*\})-\right.$$
$$\left.P(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s}\leqslant u_{ni_s}^*\})P(\bigcap_{s=1}^{q}\{X_{j_s}\leqslant u_{nj_s}^*\})\right|\to 0$$

其中 $l_n=o(n)$. 那么就说序列$\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 $D_4(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, u_n^{(3)}, u_n^{(4)})$.

定义 2 假设$\{u_n^{(k)}\}_{n\geqslant 1}$，$\{v_n^{(k)}\}_{n\geqslant 1}$，$k=1,2,3,4$ 是两个实数序列，如果

$$\alpha_{n,l}^{(1^*)}=\sup_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_p<j_1<\cdots<j_q\leqslant n\\ j_1-i_p>l}}\left|P(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s}\leqslant u_n^{(i_s)^*}\},\bigcap_{s=1}^{q}\{X_{j_s}\leqslant u_n^{(i_s)^*}\})-\right.$$
$$\left.P(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s}\leqslant u_n^{(i_s)^*}\})P(\bigcap_{s=1}^{q}\{X_{j_s}\leqslant u_n^{(i_s)^*}\})\right|$$
$$\alpha_{n,l}^{(2^*)}=\sup_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_p<j_1<\cdots<j_q\leqslant n\\ j_1-i_p>l}}\left|P(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s}>v_n^{(i_s)^*}\},\bigcap_{s=1}^{q}\{X_{j_s}>v_n^{(i_s)^*}\})-\right.$$
$$\left.P(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s}>v_n^{(i_s)^*}\})P(\bigcap_{s=1}^{q}\{X_{j_s}>v_n^{(i_s)^*}\})\right|$$
$$\alpha_{n,l}^{(3^*)}=\sup_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_p<j_1<\cdots<j_q\leqslant n\\ j_1-i_p>l}}\left|P(\bigcap_{s=1}^{p}\{v_n^{(i_s)^*}<X_{i_s}\leqslant u_n^{(i_s)^*}\},\bigcap_{s=1}^{q}\{v_n^{(i_s)^*}<X_{j_s}\leqslant u_n^{(i_s)^*}\})-\right.$$
$$\left.P(\bigcap_{s=1}^{p}\{v_n^{(i_s)^*}<X_{i_s}\leqslant u_n^{(i_s)^*}\})P(\bigcap_{s=1}^{q}\{v_n^{(i_s)^*}<X_{j_s}\leqslant u_n^{(i_s)^*}\})\right|$$
$$\alpha_{n,l}^*=\sup_{i=1,2,3}\alpha_{n,l}^{(i)^*}\to 0$$

其中 $l_n=o(n)$，$u_n^{(i)^*}\in\{u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, u_n^{(3)}, u_n^{(4)}\}$，$v_n^{(j)^*}\in\{v_n^{(1)}, v_n^{(2)}, v_n^{(3)}, v_n^{(4)}\}$. 那么我们就说序列$\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 $D((u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, u_n^{(3)}, u_n^{(4)}), (v_n^{(1)}, v_n^{(2)}, v_n^{(3)}, v_n^{(4)}))$.

定义 3 如果

$$\limsup_{n\to\infty} k_n \sum_{i=1}^{[n/k_n]}\sum_{j=1}^{[n/k_n]} P\{X_i > u_n^{(i)^*},\ X_j \leqslant v_n^{(j)^*}\} = 0$$

其中 $u_n^{(i)^*} \in \{u_n^{(1)},\ u_n^{(2)},\ u_n^{(3)},\ u_n^{(4)}\}$，$v_n^{(j)^*} \in \{v_n^{(1)},\ v_n^{(2)},\ v_n^{(3)},\ v_n^{(4)}\}$. $\{k_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个整数序列，且当 $n\to\infty$ 时，$k_n\to\infty$，那么序列$\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 $C_2((u_n^{(1)},\ u_n^{(2)},\ u_n^{(3)},\ u_n^{(4)}),\ (v_n^{(1)},\ v_n^{(2)},\ v_n^{(3)},\ v_n^{(4)}))$.

对任意的 $I\subset R_n=\{1,\ \cdots,\ n\}$，$J\subset R_n=\{1,\ \cdots,\ n\}$，$I\cup J=R_n$，$I\cap J=\varnothing$，下面的引理说明了在条件 $D_4(u_n^{(1)},\ u_n^{(2)},\ u_n^{(3)},\ u_n^{(4)})$ 下$\{M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(1)},\ M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)}\}$ 和$\{M_n^{(1)}(J)\leqslant u_n^{(3)},\ M_n^{(2)}(J)\leqslant u_n^{(4)}\}$ 渐近独立，这是得到次最大值和它的位置的渐近性质的关键.

引理 1　假设平稳序列$\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 $D_4(u_n^{(1)},\ u_n^{(2)},\ u_n^{(3)},\ u_n^{(4)})$，且存在整数序列$\{k_n\}_{n\geqslant 1}$ 和$\{l_n\}_{n\geqslant 1}$ 使得

$$k_n l_n/n \to 0 k_n\alpha_{\{} n,\ l_n\} \to 0$$

其中 $\alpha_{n,l}$ 是条件 $D_4(u_n^{(1)},\ u_n^{(2)},\ u_n^{(3)},\ u_n^{(4)})$ 的系数，则有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\{M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(1)},\ M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)},\ M_n^{(1)}(J)\leqslant u_n^{(3)},\ M_n^{(2)}(J)\}\leqslant u_n^{(4)}\} -$$
$$P\{M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(1)},\ M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)}\}P\{M_n^{(1)}(J)\leqslant u_n^{(3)},\ M_n^{(2)}(J)\leqslant u_n^{(4)}\}=0$$

引理 2　假设$\{u_n^{(k)}\}_{n\geqslant 1}$，$\{v_n^{(k)}\}_{n\geqslant 1}$，$k=1,2,3,4$ 是实数序列，如果对于 $k\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，有

$$n(1-F(u_n^{(k)}))\to\tau_k,\ n(F(v_n^{(k)}))\to\eta_k \tag{2}$$

其中 $\tau_k,\eta_k<\infty$. 且平稳序列$\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 $\alpha_{n,l_n}^{*}=o(1)$，整数序列$\{k_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足

$$k_n l_n/n\to 0,\ k_n\alpha_{n,l_n}^{*}\to 0,\ k_n\to\infty \tag{3}$$

其中 $J_1,J_2,\cdots,J_{\{}k_n\}$ 为$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 中不相交的子集，则有

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{i=1}^{k_n}\{v_n^{(i)^*}<m_n^{(2)}(J_i)<M_n^{(2)}(J_i)\leqslant u_n^{(i)^*}\})-$$
$$\prod_{i=1}^{k_n} P(v_n^{(i)^*}<m_n^{(2)}(J_i)<M_n^{(2)}(J_i)\leqslant u_n^{(i)^*})=0$$

其中 $u_n^{(i)^*}\in\{u_n^{(1)},\ u_n^{(2)},\ u_n^{(3)},\ u_n^{(4)}\}$，$v_n^{(j)^*}\in\{v_n^{(1)},\ v_n^{(2)},\ v_n^{(3)},\ v_n^{(4)}\}$.

引理 3　假设序列$\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 和$\{-X_n\}_{n\geqslant 1}$ 分别有极值指标 θ_1 和 θ_2，且平稳序列$\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足条件 $D((u_n^{(1)},\ u_n^{(2)},\ u_n^{(3)},\ u_n^{(4)}),\ (v_n^{(1)},\ v_n^{(2)},\ v_n^{(3)},\ v_n^{(4)}))$ 和 $C_2((u_n^{(1)},\ u_n^{(2)},\ u_n^{(3)},\ u_n^{(4)}),\ (v_n^{(1)},\ v_n^{(2)},\ v_n^{(3)},\ v_n^{(4)}))$ 其中 $u_n^{(k)},v_n^{(k)}$ 满足(2) 式，$\{k_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足(3) 式，则

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(1)},\ M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)},\ M_n^{(1)}(J)\leqslant u_n^{(3)},\ M_n^{(2)}(J)\leqslant u_n^{(4)},$$
$$m_n^{(1)}(E)>v_n^{(1)},\ m_n^{(2)}(E)>v_n^{(2)},\ m_n^{(1)}(F)>v_n^{(3)},\ m_n^{(2)}(F)>v_n^{(4)})-$$
$$P(M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(1)},\ M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)},\ M_n^{(1)}(J)\leqslant u_n^{(3)},\ M_n^{(2)}(J)\leqslant u_n^{(4)})\times$$
$$P(m_n^{(1)}(E)>v_n^{(1)},\ m_n^{(2)}(E)>v_n^{(2)},\ m_n^{(1)}(F)>v_n^{(3)},\ m_n^{(2)}(F)>v_n^{(4)})=0$$

证　不妨设 $t_1<t_2$，取 $I_1=\{1,\ \cdots,\ [nt_1]\}$，$I_2=\{[nt_1]+1,\ \cdots,\ [nt_2]\}$ 和 $I_3=\{[nt_2]+1,\ \cdots,\ n\}$，则利用引理 2，

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(1)},\ M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)},\ M_n^{(1)}(J)\leqslant u_n^{(3)},\ M_n^{(2)}(J)\leqslant u_n^{(4)},$$
$$m_n^{(1)}(E)>v_n^{(1)},\ m_n^{(2)}(E)>v_n^{(2)},\ m_n^{(1)}(F)>v_n^{(3)},\ m_n^{(2)}(F)>v_n^{(4)})$$
$$=\lim_{n\to\infty} P(v_n^{(1)}<m_n^{(1)}(I_1)<m_n^{(2)}(I_1)<M_n^{(2)}(I_1)<M_n^{(1)}(I_1)<u_n^{(1)})\times$$
$$P(v_n^{(1)}<m_n^{(1)}(I_2)<m_n^{(2)}(I_2)<M_n^{(2)}(I_2)<M_n^{(1)}(I_2)<u_n^{(2)})\times$$
$$P(v_n^{(2)}<m_n^{(1)}(I_3)<m_n^{(2)}(I_3)<M_n^{(2)}(I_3)<M_n^{(1)}(I_3)<u_n^{(2)}) \tag{4}$$

由题设条件易知，对于任意的 $k\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$C_2(u_n^{(k)},\ v_n^{(k)})$ 和 $D(u_n^{(k)},\ v_n^{(k)})$ 成立，则(4) 式等于

$$\lim_{n\to\infty} P(v_n^{(1)}<m_n^{(1)}(I_1)<m_n^{(2)}(I_1))\times P(M_n^{(2)}(I_1)<M_n^{(1)}(I_1)<u_n^{(1)})\times$$
$$P(v_n^{(1)}<m_n^{(1)}(I_2)<m_n^{(2)}(I_2))\times P(M_n^{(2)}(I_2)<M_n^{(1)}(I_2)<u_n^{(2)})\times$$
$$P(v_n^{(2)}<m_n^{(1)}(I_3)<m_n^{(2)}(I_3))\times P(M_n^{(2)}(I_3)<M_n^{(1)}(I_3)<u_n^{(2)}) \tag{5}$$

因此，利用平稳性以及序列$\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 和$\{-X_n\}_{n\geqslant 1}$ 分别有极值指标 θ_1 和 θ_2，得到(5) 式等于

$$(t_1(\tau_2-\tau_1+1))((1-t_1)(\tau_4-\tau_3)+1)(t_2(\eta_2-\eta_1+1))((1-t_2)(\eta_4-\eta_3)+1)\times$$
$$\exp(-\theta_1t_1\tau_2-\theta_1(1-t_1)\tau_4-\theta_2t_2\eta_2-\theta_2(1-t_2)\eta_4) \tag{6}$$

另一方面，由于$\{X_n\}_{n\geqslant1}$和$\{-X_n\}_{n\geqslant1}$分别满足条件$D_4(u_n^{(1)},u_n^{(2)},u_n^{(3)},u_n^{(4)})$和$D_4(-v_n^{(1)},-v_n^{(2)},-v_n^{(3)},-v_n^{(4)})$，利用引理1，

$$P(M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(1)},M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)},M_n^{(1)}(J)\leqslant u_n^{(3)},M_n^{(2)}(J)\leqslant u_n^{(4)})\times$$
$$P(m_n^{(1)}(E)>v_n^{(1)},m_n^{(2)}(E)>v_n^{(2)},m_n^{(1)}(F)>v_n^{(3)},m_n^{(2)}(F)>v_n^{(4)})=$$
$$P(M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(1)},M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)})\times P(M_n^{(1)}(J)\leqslant u_n^{(3)},M_n^{(2)}(J)\leqslant u_n^{(4)})\times$$
$$P(m_n^{(1)}(E)>v_n^{(1)},m_n^{(2)}(E)>v_n^{(2)})P(m_n^{(1)}(F)>v_n^{(3)},m_n^{(2)}(F)>v_n^{(4)})+o(1) \tag{7}$$

因此(7)式也收敛到(6)式，从而结论成立.

2　主要结果及其证明

下面将给出$\overline{L_n}^{(2)}/n$和$a_n^{-1}(M_n^{(2)}-b_n)$的渐近性质以及次最大值和次最小值与其位置的渐近性质.

定理1　假设$\{X_n\}_{n\geqslant1}$是一平稳序列，有极值指标θ，且存在常数序列$\{a_n\}_n\geqslant1$和$\{b_n\}_n\geqslant1$使得

$$\lim_{n\to\infty}P\{M_n^{(1)}\leqslant a_nx+b_n\}\to G^\theta(x)$$

其中G是非退化的分布函数. 如果对于每个$x_k\in\mathbb{R}$，$u_n^{(k)}=a_n^{-1}x_k+b_n$，$k=1,2,3,4$，且$\{X_n\}_{n\geqslant1}$满足条件$D_4(u_n^{(1)},u_n^{(2)},u_n^{(3)},u_n^{(4)})$和$D'(u_n^{(k)})$，则

$$\lim_{n\to\infty}P\{\overline{L_n}^{(2)}/n\leqslant t,a_n^{-1}(M_n^{(2)}-b_n)\leqslant x\}\to tG^\theta(x)(1-\log G(x)) \tag{8}$$

其中x是实数，$0<t\leqslant1$.

也就是说，次最大值和其位置是渐近独立的，且位置是渐近地服从均匀分布.

证　由于

$$n(1-F(u_n^{(k)}))\to\tau_k$$

所以

$$\tau_k=-\log G(x_k)$$

令$I=\{1,2,\cdots,[nt]\}$，$J=\{[nt]+1,\cdots,n\}$，$0<t\leqslant1$；令$M^{(1)}(I)$，$M^{(2)}(I)$分别表示区间I上的最大值和第二最大值；令$M^{(1)}(J)$，$M^{(2)}(J)$分别表示区间J上的最大值和第二最大值. 设

$$X_n^{(1)}=a_n(M_n^{(1)}(I)-b_n)\qquad X_n^{(2)}=a_n(M_n^{(2)}(I)-b_n)$$
$$Y_n^{(1)}=a_n(M_n^{(1)}(J)-b_n)\qquad Y_n^{(2)}=a_n(M_n^{(2)}(J)-b_n)$$

的联合分布函数为$H_n(x_1,x_2,x_3,x_4)$，则对于任意的$x_1>x_2$，$x_3>x_4$

$$H_n(x_1,x_2,x_3,x_4)=P\{M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(1)},M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)},M_n^{(1)}(J)\leqslant u_n^{(3)},M_n^{(2)}(J)\leqslant u_n^{(4)}\}$$

其中$u_n^{(k)}=a_n^{-1}x_k+b_n$. 易知

$$H_n(x_1,x_2,x_3,x_4)=P\{N_n^{(1)}(I')=0,N_n^{(2)}(I')\leqslant1,N_n^{(3)}(J')=0,N_n^{(4)}(J')\leqslant1\}$$

其中$I'=(0,t]$，$J'=(t,1]$. 利用引理1和文献[1]中的推论5.5.2，取$B_1=I'$，$B_2=J'$，则

$$\lim_{n\to\infty}H_n(x_1,x_2,x_3,x_4)=P\{N_n^{(1)}(I')=0,N_n^{(2)}(I')\leqslant1\}\times P\{N_n^{(3)}(J')=0,N_n^{(4)}(J')\leqslant1\}=$$
$$\exp\{\theta t\tau_2\}(t(\tau_2-\tau_1)+1)\exp\{\theta(1-t)\tau_4\}((1-t)(\tau_4-\tau_3)+1)=$$
$$H_t(x_1,x_2)H_{\{}1-t\}(x_3,x_4)=H(x_1,x_2,x_3,x_4) \tag{9}$$

其中

$$H_t(x_1,x_2)=G^{\theta t}(x_2)(\log G^t(x_1)-\log G^t(x_2)+1)$$

由(9)式知$(X_n^{(1)},X_n^{(2)},Y_n^{(1)},Y_n^{(2)})$依分布收敛到$(X_1,X_2,Y_1,Y_2)$，其联合分布函数$H$是绝对连续的. 因此

$$\lim_{n\to\infty}P\{\overline{L_n}^{(2)}/n\leqslant t,a_n(M_n^{(2)}-b_n)\leqslant x_2\}=$$
$$\lim_{n\to\infty}P\{M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)},M_n^{(2)}(I)\geqslant M_n^{(1)}(J)\}+P\{M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(2)},M_n^{(1)}(J)>M_n^{(1)}(I)\geqslant M_n^{(2)}(J)\}=$$
$$\lim_{n\to\infty}P\{X_n^{(2)}\leqslant x_2,X_n^{(2)}\geqslant Y_n^{(1)}\}+P\{X_n^{(1)}\leqslant x_2,X_n^{(1)}\leqslant x_2,Y_n^{(1)}>X_n^{(1)}\geqslant Y_n^{(2)}\}=$$
$$P\{X_2\leqslant x_2,X_2\geqslant Y_1\}+P\{X_1\leqslant x_2,X_1\leqslant x_2,Y_1>X_1\geqslant Y_2\}=$$

$$tG^{\theta}(1-\log G(x))$$

定理 2　假设平稳序列$\{X_n\}_{n\geqslant 1}$和$\{-X_n\}_{n\geqslant 1}$的极值指标分别为θ_1和θ_2. 且存在常数序列$\{a_n>0\}_{n\geqslant 1}$，$\{b_n\}_{n\geqslant 1}$，$\{c_n>0\}_{n\geqslant 1}$和$\{d_n\}_{n\geqslant 1}$使得

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n^{(1)}\leqslant a_n x_1+b_n\}\to G^{\theta_1}(x_1)$$

和

$$\lim_{n\to\infty} P\{m_n^{(1)}\leqslant c_n y_1+d_n\}\to 1-(1-H(y_1))^{\theta_2}$$

成立，其中G和H为非退化的分布函数. 如果对于每个$x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$，$u\{(k)\}_n=a_n x_k+b_n$，$v\{(k)\}_n=c_n x_k+d_n$，$k\in\{1,2,3,4\}$，$\{X_n\}_{n\geqslant 1}$满足条件$D((u_n^{(1)},u_n^{(2)},u_n^{(3)},u_n^{(4)}),(v_n^{(1)},v_n^{(2)},v_n^{(3)},v_n^{(4)}))$和$C_2((u_n^{(1)},u_n^{(2)},u_n^{(3)},u_n^{(4)}),(v_n^{(1)},v_n^{(2)},v_n^{(3)},v_n^{(4)}))$，且整数序列$\{k_n\}_{n\geqslant 1}$满足(3)式，那么

$$\lim_{n\to\infty} P\{\overline{L_n}^{(2)}/n\leqslant t_1,\ a_n^{-1}(M_n^{(2)}-b_n)\leqslant x_2,\ \underline{L_n}^{(2)}/n>t_2,\ a_n^{-1}(m_n^{(2)}-b_n)>y_2\}\to$$
$$t_1(1-t_2)G^{\theta_1}(x_2)(1-\log G(x_2))(1-H(y_2))^{\theta_2}(1-\log(1-H(y_2))) \tag{10}$$

证　由于$n(1-F(u_n^{(k)}))\to\tau_k$，$n(F(v_n^{(k)}))\to\eta_k$，所以

$$\tau_k=-\log G(x_k)\qquad \eta_k=-\log(1-H(y_1))$$

用I,J,E,F分别表示区间$\{1,2,\cdots,[nt_1]\}$，$\{[nt_1]+1,\cdots,n\}$，$\{1,2,\cdots,[nt_2]\}$和$\{[nt_2]+1,\cdots,n\}$；$M^{(1)}(I),M^{(2)}(I),M^{(1)}(J),M^{(2)}(J)$分别表示$X_i$中在区间$I,J$上的最大值和第二最大值；$m^{(1)}(E)$，$m^{(2)}(E),m^{(1)}(F),m^{(2)}(F)$表示$X_i$中在区间$E,F$上的最小值和第二最小值. 设随机变量

$$X_n^{(1)}=a_n(M_n^{(1)}(I)-b_n)\qquad X_n^{(2)}=a_n(M_n^{(2)}(I)-b_n)$$
$$Y_n^{(1)}=a_n(M_n^{(1)}(J)-b_n)\qquad Y_n^{(2)}=a_n(M_n^{(2)}(J)-b_n)$$
$$X_n^{'(1)}=c_n(M_n^{(1)}(E)-d_n)\qquad X_n^{'(2)}=c_n(M_n^{(2)}(E)-d_n)$$
$$Y_n^{'(1)}=c_n(M_n^{(1)}(F)-d_n)\qquad Y_n^{'(2)}=c_n(M_n^{(2)}(F)-d_n)$$

的分布函数为$H_n^{'}(x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4)$，则对任意的$x_1>x_2$，$x_3>x_4$，$y_1>y_2$，$y_3>y_4$有

$$H_n^{'}(x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4)=$$
$$P(M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(1)},M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)},M_n^{(1)}(J)\leqslant u_n^{(3)},M_n^{(2)}(J)\leqslant u_n^{(4)},$$
$$m_n^{(1)}(E)>v_n^{(1)},m_n^{(2)}(E)>v_n^{(2)},m_n^{(1)}(F)>v_n^{(3)},m_n^{(2)}(F)>v_n^{(4)})$$

其中$u_n^{(k)}=a_n^{-1}x_k+b_n$，$v_n^{(k)}=c_n^{-1}x_k+d_n$. 易知

$$H_n^{'}(x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4)=$$
$$P\{N_n^{(1)}(I^{'})=0,N_n^{(2)}(I^{'})\leqslant 1,N_n^{(3)}(J^{'})=0,N_n^{(4)}(J^{'})\leqslant 1$$
$$N_n^{(1)}(E^{'})=0,N_n^{(2)}(E^{'})\leqslant 1,N_n^{(3)}(F^{'})=0,N_n^{(4)}(F^{'})\leqslant 1\}$$

其中：$I^{'}=(0,t_1]$，$J^{'}=(t_1,1]$，$E^{'}=(0,t_2]$，$F^{'}=(t_2,1]$. 由文献[1]中的推论 5.5.2 和引理 3，

$$\lim_{n\to\infty} H_n(x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4)=$$
$$P\{N_n^{(1)}(I^{'})=0,N_n^{(2)}(I^{'})\leqslant 1\}\times P\{N_n^{(3)}(J^{'})=0,N_n^{(4)}(J^{'})\leqslant 1\}\times$$
$$P\{N_n^{(1)}(E^{'})=0,N_n^{(2)}(E^{'})\leqslant 1\}\times P\{N_n^{(3)}(F^{'})=0,N_n^{(4)}(F^{'})\leqslant 1\}=$$
$$(\exp\{-\theta_1 t_1\tau_2\}(t_1(\tau_2-\tau_1)+1)\exp\{\theta_1(1-t_1)\tau_4\}((1-t_1)(\tau_4-\tau_3)+1)$$
$$\exp\{-\theta_2 t_2\eta_2\}(t_2(\eta_2-\eta_1)+1)\exp\{\theta_2(1-t_2)\eta_4\}((1-t_2)(\eta_4-\eta_3)+1))=$$
$$H_{t_1}^{'}(x_1,x_2)H_{1-t_1}(x_3,x_4)\ H_{t_2}^{'}(y_1,y_2)H_{1-t_2}^{'}(y_3,y_4)=H^{'}(x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4)$$

其中

$$H_{t_1}^{'}(x_1,x_2)=G^{\theta_1 t_1}(x_2)(\log G^{t_1}(x_1)-\log G^{t_1}(x_2)+1)$$

由于

$$P\{\overline{L_n}^{(2)}/n\leqslant t_1,a_n(M_n^{(2)}-b_n)\leqslant x_2,\underline{L_n}^{(2)}/n>t_2,a_n^{-1}(m_n^{(2)}-b_n)>y_2\}=$$
$$P\{M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)},M_n^{(2)}(I)\geqslant M_n^{(1)}(J),m_n^{(2)}(F)<m_n^{(1)}(E),m_n^{(2)}(F)>v_n^{(2)}\}+$$
$$P\{M_n^{(2)}(I)\leqslant u_n^{(2)},M_n^{(2)}(I)\geqslant M_n^{(1)}(J),m_n^{(1)}(E)<m_n^{(1)}(F)<m_n^{(2)}(E),m_n^{(1)}(F)>v_n^{(2)}\}+$$

$$P\{M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(2)},M_n^{(1)}(J)>M_n^{(1)}(I)\geqslant M_n^{(2)}(J),m_n^{(2)}(F)<m_n^{(1)}(E),m_n^{(2)}(F)>v_n^{(2)}\}+$$
$$P\{M_n^{(1)}(I)\leqslant u_n^{(2)},M_n^{(1)}(J)>M_n^{(1)}(I)\geqslant M_n^{(2)}(J),m_n^{(1)}(E)<m_n^{(1)}(F)<m_n^{(2)}(E),m_n^{(1)}(F)>v_n^{(2)}\}=$$
$$P\{X_n^{(2)}\leqslant x_2,X_n^{(2)}\geqslant Y_n^{(1)},Y'^{(2)}_n<X'^{(1)}_n,Y'^{(2)}_n>y_2\}+P\{X_n^{(2)}\leqslant x_2,X_n^{(2)}\geqslant Y_n^{(1)},X'^{(1)}_n<Y'^{(1)}_n<$$
$$X'^{(2)}_n,Y'^{(1)}_n>y_2\}+P\{X_n^{(1)}\leqslant x_2,Y_n^{(1)}>X_n^{(1)}\geqslant Y_n^{(2)},Y'^{(2)}_n<X'^{(1)}_n,Y'^{(2)}_n>y_2\}+$$
$$P\{X_n^{(1)}\leqslant x_2,Y_n^{(1)}>X_n^{(1)}\geqslant Y_n^{(2)},X'^{(1)}_n<Y'^{(1)}_n<X'^{(2)}_n,Y'^{(1)}_n>y_2\}$$

利用点过程的性质($X_n^{(1)}$,$X_n^{(2)}$,$Y_n^{(1)}$,$Y_n^{(2)}$,$X'^{(1)}_n$,$X'^{(2)}_n$,$Y'^{(1)}_n$,$Y'^{(2)}_n$)依分布收敛到(X_1,X_2,Y_1,Y_2,X'_1,X'_2,Y'_1,Y'_2),其分布函数 H 绝对连续.因此,

$$\lim_{n\to\infty}P\{\overline{L_n}^{(2)}/n\leqslant t_1,a_n^{-1}(M_n^{(2)}-b_n)\leqslant x_2,\underline{L_n}^{(2)}/n>t_2,a_n^{-1}(m_n^{(2)}-b_n)>y_2\}=$$
$$P\{X_2\leqslant x_2,X_2\geqslant Y_1,Y'_2<X'_1,Y'_2>y_2\}+P\{X_2\leqslant x_2,X_2\geqslant Y_1,X'_1<Y'_1<X'_2,Y'_1>y_2\}+$$
$$P\{X_1\leqslant x_2,Y_1>X_1\geqslant Y_2,Y'_2<X'_1,Y'_2>y_2\}+$$
$$P\{X_1\leqslant x_2,Y_1>X_1\geqslant Y_2,X'_1<Y'_1<X'_2,Y'_1>y_2\}=$$
$$t_1(1-t_2)G^{\theta_1}(x)(1-\log G(x))(1-H(y))^{\theta_2}(1-\log(1-H(y)))$$

参考文献:

[1] LEADBETTER M R,LINDGREN G,ROOTZEN H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes [M]. New York:Springer,1983.

[2] PEREIRA L,FERREIRA H. The Asymptotic Locations of the Maximum and Minimum of Stationary Sequences [J]. Journal of Statistical Planning and Inference,2002,104(2):287-295.

[3] 龚志云,彭作祥.平稳高斯向量序列最大值与最小值联合的几乎处处收敛 [J].西南大学学报(自然科学版),2007,29(9):29-33.

[4] 谭 樱,陈守全.高斯三角阵列最大值与最小值联合密度函数的渐近性 [J].西南大学学报(自然科学版),2016,38(9):130-136.

[5] DAVIS R A. Maxima and Minima of Stationary Sequences [J]. The Annals of Probability,1979,7(3):453-460.

[6] DAVIS R A. Limit Laws for the Maximum and Minimum of Stationary Sequences [J]. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete,1982,61(1):31-42.

[7] PEREIRA L. Asymptotic Location of Largest Values of a Stationary Random Field [J]. Communication in Statistics-Theory and Methods,2013,42(24):4513-4524.

[8] HSING T,HUSLER J,LEADBETTER M R. On the Exceedance Point Process for a Stationary Sequence [J]. Probability Theory and Related Fields,1988,78(1):97-112.

The Asymptotic Properties of Locations of the Second Maximum and Minimum of Stationary Sequences

BU Xue-yan, CHEN Shou-quan

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we discuss the asymptotic independence of the normalized second maximum and its location under a long-range dependence condition. Further, we give the asymptotic independence of the joint locations of the second maximum and the joint locations of the second minimum.

Key words: point process; dependence conditions; location of maxima; asymptotic independence

责任编辑 张 枸