DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.11.010

具有变时滞的高阶随机 Hopfield 神经网络在有限时间内的控制同步①

蒲 浩[1]， 蒋海军[2]， 胡 成[2]， 冉 杰[1]， 张转周[1]

1. 遵义师范学院 数学学院，贵州 遵义 563002；2. 新疆大学 数学与系统科学学院，乌鲁木齐 830046

摘要：研究了具有变时滞的高阶随机 Hopfield 神经网络在有限时间内的控制同步. 通过李雅普诺夫函数，有限时间内稳定性理论，随机微分方程理论和一些不等式方法，基于 p-范数得到了新的有限时间内同步的充分条件. 本文结论是对之前相关结论的推广.

关 键 词：高阶 Hopfield 神经网络；随机扰动项；变时滞；有限时间内同步；p-范数

中图分类号：O175.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2018)11-0067-07

自从约翰·霍普菲尔德在 1982 年提出 Hopfield 神经网络模型[1]以来，其理论在信号与图像处理、联想记忆及组合优化等问题中有着重要的应用[2-3]，得到了许多有关 Hopfield 神经网络稳定性或者同步的结论[4-5]. 然而，在过去的一些关于 Hopfield 神经网络稳定性或者同步的文章中，系统是在无限时间内实现稳定或者同步[6-8].

在神经网络系统中出于高效的目的，需要神经网络系统在有限的时间内实现稳定或者同步，如在工程领域等. 自从文献[9]在 1991 年提出神经网络在有限时间内稳定的理论以来，许多研究者对神经网络在有限时间内的稳定性问题或者同步问题广泛研究，得到了很多有效的理论[10-12]. 在神经网络系统实现稳定或同步的过程中，由于信号在不同的神经元之间传递的速度是有限的，出现了影响系统稳定或者同步的常见因素时滞. 除了时滞对神经网络系统的影响之外，来自系统之外的噪声对系统的稳定性或者同步也有影响，为此在神经网络系统中需要考虑随机扰动对系统的影响[13]. 在理论研究和工程领域中，相对于一阶神经网络模型，高阶神经网络在网络收敛速度、容错能力、储存水平、逼近能力都具有较强的功能[14]. 然而对于高阶随机 Hopfield 神经网络在有限时间内的同步问题研究得较少.

受此启发，本文研究了具有变时滞的高阶随机 Hopfield 神经网络在有限时间内的控制同步，在恰当的外部控制输入 $U_i(t)$ 下，得到了神经网络在有限时间内同步的充分条件.

1 模型和预备知识

考虑如下具有变时滞的高阶随机 Hopfield 神经网络模型

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_i(t)=[&-a_i x_i(t)+\sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t))+\\&\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{ijl} g_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))g_l(x_l(t-\tau_{il}(t)))+I_i]\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{1}$$

其中：$i\in I=\{1,2,\cdots,n\}$；$x_i(t)$ 表示第 i 个神经元在 t 时刻的状态变量；$f_j(\cdot)$，$g_j(\cdot)$ 表示激活函数；

① 收稿日期：2017-06-05

基金项目：国家自然科学基金项目(71461027)；贵州省教育厅青年科技人才成长项目(黔教合 KY 字[2018]313 号，黔教合 KY 字[2018]315 号，黔教合 KY 字[2017]255 号，黔教合 KY 字[2017]256 号).

作者简介：蒲 浩(1986-)，男，讲师，主要从事神经网络的研究.

b_{ij}, c_{ijl} 分别表示突触的一阶和二阶连接强度；$a_i > 0$ 表示第 i 个神经元的衰减率；$\tau_{ij}(t)$ 表示 t 时刻神经网络中的变时滞且满足 $0 \leqslant \tau_{ij}(t) \leqslant \tau$ 和 $\dot{\tau}_{ij}(t) \leqslant \rho < 1$；$I_i$ 表示外界对神经网络的输入量.

系统(1) 的初值条件为

$$x_i(s) = \varphi_i(s),\ s \in [-\tau,\ 0],\ i \in I$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}(s) = (\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \cdots,\ \varphi_n(s))^{\mathrm{T}} \in C = ([-\tau,\ 0],\ \mathbb{R}^n)$ 指的是把 $[-\tau,\ 0]$ 映射到 $\mathbb{R}^n$ 上的所有连续函数组成的一个集合. p-范数在本文中的形式为

$$\|\boldsymbol{\varphi}\| = (\sup_{s \in [-\tau,\ 0]} \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(s)|^p)^{\frac{1}{p}},\ \|\boldsymbol{x}\| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

对于系统(1)，我们假设

(H_1) 存在实数 $M_j > 0$, $\underline{L}_j$, $\overline{L}_j$ 及 $N_j > 0$，使得 $|g_j(x)| \leqslant M_j$, $\underline{L}_j \leqslant \dfrac{f_j(y) - f_j(x)}{y - x} \leqslant \overline{L}_j$, $|g_j(y) - g_j(x)| \leqslant N_j |y - x|$ 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant n$ 成立.

定义

$$L_j = \max_{1 \leqslant j \leqslant n}\{|\underline{L}_j|,\ |\overline{L}_j|\}$$

$$H_i = \begin{cases} b_{ii}\overline{L}_i & b_{ii} \geqslant 0 \\ b_{ii}\underline{L}_i & b_{ii} < 0 \end{cases} \tag{3}$$

把系统(1) 作为主驱动系统，为了同步，引入如下的响应系统

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y_i(t) = [&-a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{ijl} g_j(y_j(t - \tau_{ij}(t))) g_l(y_l(t - \tau_{il}(t))) + \\ &I_i + U_i(t)]\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t,\ e_j(t),\ e_j(t - \tau_{ij}(t)))\mathrm{d}\omega_j(t) \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $e_j(t) = y_j(t) - x_j(t)$. 响应系统(4) 的初值条件是 $y_i(s) = \phi_i(s)$, $s \in [-\tau,\ 0]$, $i \in I$，其中：$\boldsymbol{\phi}(s) = (\phi_1(s),\ \phi_2(s),\ \cdots,\ \phi_n(s))^{\mathrm{T}} \in C([-\tau,\ 0],\ \mathbb{R}^n)$，$U_i(t)$ 为外部输入控制，$\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_1(t),\ \cdots,\ \omega_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 为定义在完备概率空间 $(\Omega,\ F,\ F_t,\ P)$ 上具有自然滤波 $\{F_t\}_{t \geqslant 0}$ 的 n 维独立布朗运动，且有 $E\{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t)\} = 0$, $E\{[\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t)]^2\} = \mathrm{d}t$；$\sigma_{ij}(t,\ e_j(t),\ e_j(t - \tau_{ij}(t)))\mathrm{d}\omega_j(t)$, $i, j \in I$ 表示随机扰动.

(H_2) 存在实数 $d_{ij} > 0$ 和 $p_{ij} > 0$，使得 $\sigma_{ij}^2(t,\ u,\ v) \leqslant d_{ij}u^2 + p_{ij}v^2$，对任意的 $u, v \in R$, $i, j \in I$ 成立.

为了书写方便记

$$\xi_{ij} = \sum_{l=1}^{n}[(|c_{ijl}| + |c_{ilj}|)M_l]^{p\delta_{ijp}} + \frac{p-1}{2}\sum_{j=1}^{n}(p_{ij}^{p\vartheta_{ij(p-1)}} + p_{ij}^{p\vartheta_{ijp}})$$

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij},\ \lambda_i = a_i + pH_i + u_i + \sum_{j=1,\ i \neq j}^{n}\sum_{k=1}^{p-1} |b_{ij}|^{p\gamma_{ijk}} L_j^{p\gamma_{ijk}} + \sum_{j=1,\ i \neq j}^{n} |b_{ji}|^{p\gamma_{jip}} L_i^{p\gamma_{jip}}$$

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p-1}[(|c_{ijl}| + |c_{ilj}|)M_l]^{p\delta_{ijk}}$$

$$\omega_i = \frac{(p-1)}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p-2}(d_{ij}^{p\zeta_{ijk}} + p_{ij}^{p\vartheta_{ijk}}) + \frac{(p-1)}{2}\sum_{j=1}^{n}(d_{ji}^{p\zeta_{ji(p-1)}} + d_{ji}^{p\zeta_{jip}})$$

(H_3) 不等式 $\lambda_i - \mu_i - \dfrac{\sigma_i}{1-\rho} - \omega_i \geqslant 0$, $i \in I$ 成立.

本文要通过构造一个恰当的外部输入控制 $U_i(t)$，实现驱动系统(1) 和响应系统(4) 在有限的时间内同步

$$\begin{aligned} U_i(t) = -\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon t}}{p}\{&(F_i(\varepsilon) + a)|e_i(t)|^{1-p+\theta}\mathrm{e}^{\frac{\theta\varepsilon t}{p}} + \\ &a(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_{ij}}{1-\rho}\mathrm{e}^{\varepsilon t}\int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t}\mathrm{e}^{\varepsilon s}|e_j(s)|^p\mathrm{d}s)^{\frac{\theta}{p}}\frac{1}{|e_i(t)|^{p-1}}\Big\} \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $a > 0$ 是一个常数，$F_i(\varepsilon) = \lambda_i - \mu_i - \dfrac{\sigma_i \mathrm{e}^{\tau\varepsilon}}{1-\rho} - \omega_i - \varepsilon$, $i \in I$.

根据系统(1) 和系统(4) 知误差系统为

$$\mathrm{d}e_i(t)=[-a_i(y_i(t)-x_i(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(f_j(y_j(t))-f_j(x_j(t)))+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}c_{ijl}(g_j(y_j(t-\tau_{ij}(t)))\times g_l(y_l(t-\tau_{il}(t)))-g_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))g_l(x_l(t-\tau_{il}(t))))+U_i(t)]\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t,e_j(t),e_j(t-\tau_{ij}(t)))\mathrm{d}\omega_i(t),\ i\in I \tag{6}$$

定义 1　对于驱动系统(1) 和响应系统(4)，若存在一个有限的时间常数 $T>0$，使得

$$\lim_{t\to T}E\|\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{x}(t)\|=0$$

同时当 $t>T$ 时 $\|\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{x}(t)\|=0$，则驱动系统(1) 和响应系统(4) 以概率 1 在有限时间 $(t_0,T]$ 内同步.

2　辅助引理

引理 1[15]　(Harder) 如果 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是正实数且 $0<\theta<p$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

引理 2[16]　若 $\boldsymbol{x}(t)$ 是一个关于时间 $t(t\geqslant 0)$ 的 n 维 Itô's 过程，且满足随机微分方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{g}_1(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}_2(t)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t)$$

若 $V(t,\boldsymbol{x}(t))\in C^{1,2}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$，则 $V(t,\boldsymbol{x}(t))$ 是一个实数值的 Itô's 过程，且满足随机微分方程

$$\mathrm{d}V(t,\boldsymbol{x}(t))=LV(t,\boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}t+V_{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{g}_2(t)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t) \tag{7}$$

$$LV(t,\boldsymbol{x}(t))=V_t(t,\boldsymbol{x}(t))+V_{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{g}_1(t)+\frac{1}{2}\mathrm{trace}(\boldsymbol{g}_2^{\mathrm{T}}V_{\boldsymbol{xx}}(t,\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{g}_2(t)) \tag{8}$$

其中：$V_t(t,\boldsymbol{x})=\dfrac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}$，$V_{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x})=\left(\dfrac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)$，$V_{\boldsymbol{xx}}(t,\boldsymbol{x})=\left(\dfrac{\partial^2 V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}$，$C^{1,2}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+)$ 指的是关于 t 一阶连续可微和关于 $\boldsymbol{x}$ 二阶连续可微的所有非负函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 构成的集合.

引理 3　如果存在实数 $a>0$ 和 $0<\theta<1$，且正定连续函数 $V(t)$ 满足 $LV(t)\leqslant -aV^{\theta}(t)$，$t\geqslant t_0$，则对任意给定的 t_0，$V(t)$ 满足 $(EV(t))^{1-\theta}\leqslant V^{1-\theta}(t_0)-a(1-\theta)(t-t_0)$，$t_0\leqslant t\leqslant T$，且当 $t>T$ 时 $V(t)=0$，其中 $T=t_0+\dfrac{V^{1-\theta}(t_0)}{a(1-\theta)}$.

证　由引理 2 可知

$$V(t)=V(t_0)+\int_{t_0}^{t}LV(s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}V_x(s)g_2(s)\mathrm{d}\omega(s)$$

对其两边取数学期望则有

$$EV(t)=EV(t_0)+\int_{t_0}^{t}ELV(s)\mathrm{d}s\leqslant EV(t_0)-a\int_{t_0}^{t}EV^{\theta}(s)\mathrm{d}s$$

则 $D^+EV(t)\leqslant -aEV^{\theta}(t)$. 由数学期望 Jensen 不等式 $EV^{\theta}(t)\geqslant(EV(t))^{\theta}$，有 $D^+EV(t)\leqslant -a(EV(t))^{\theta}$，即有 $(EV(t))^{1-\theta}\leqslant V^{1-\theta}(t_0)-a(1-\theta)(t-t_0)$，$t_0\leqslant t\leqslant T$，且当 $t>T$ 时 $V(t)=0$，其中 $T=t_0+\dfrac{V^{1-\theta}(t_0)}{a(1-\theta)}$.

3　主要结果

定理 1　如果 $(H_1)-(H_3)$ 成立，则驱动系统(1) 和响应系统(4) 在恰当的外部输入控制 $U_i(t)$ 下，在有限时间 $(t_0,T]$ 内同步，

$$T=t_0+\frac{V^{1-\theta}(t_0)}{a(1-\theta)}$$

证　构造如下形式的 Lyapunov 泛函

$$V(t)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mid e_i(t)\mid^p+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_{ij}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}}{1-\rho}\int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t}\mathrm{e}^{\varepsilon s}\mid e_j(s)\mid^p\mathrm{d}s \tag{9}$$

结合误差系统(6)，假设(H_1)－(H_2)及引理 2 中的(8)式可以得到下面的式子

$$\begin{aligned}LV(t)=&\sum_{i=1}^{n}\{\varepsilon\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mid e_i(t)\mid^p+p\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mid e_i(t)\mid^{p-1}[[-a_i(y_i(t)-x_i(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(f_j(y_j(t))-f_j(x_j(t)))+\\&\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}c_{ijl}(g_j(y_j(t-\tau_{ij}(t)))(g_l(y_l(t-\tau_{il}(t)))-g_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))g_l(x_l(t-\tau_{il}(t)))+\\&U_i(t)]+\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_{ij}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}}{1-\rho}\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mid e_j(t)\mid^p-\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_{ij}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}(1-\dot{\tau}_{ij}(t))}{1-\rho}\mathrm{e}^{\varepsilon(t-\tau_{ij}(t))}\mid e_j(t-\tau_{ij}(t))\mid^p\}+\\&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\varepsilon t}p(p-1)\mid e_i(t)\mid^{p-2}\sigma_{ij}^2(t,e_j(t),e_j(t-\tau_{ij}(t)))\leqslant\\&\sum_{i=1}^{n}\{\varepsilon\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mid e_i(t)\mid^p+a_ip\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mid e_i(t)\mid^p+H_ip\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mid e_i(t)\mid^p+\sum_{j=1,i\neq j}^{n}p\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mid e_i(t)\mid^{p-1}\times\\&\mid b_{ij}\mid L_j\mid e_j(t)\mid+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}p\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mid e_i(t)\mid^{p-1}[(\mid c_{ijl}\mid+\mid c_{ilj}\mid)M_l]\times\\&\mid e_j(t-\tau_{ij}(t))\mid+\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_{ij}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}}{1-\rho}\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mid e_j(t)\mid^p-\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mid e_j(t-\tau_{ij}(t))\mid^p\}+\\&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\varepsilon t}p(p-1)\mid e_i(t)\mid^{p-2}(d_{ij}\mid e_j(t)\mid^2+p_{ij}\mid e_j(t-\tau_{ij}(t))\mid^2)\end{aligned}$$

对于实数 $a_i>0(1\leqslant i\leqslant p)$，有不等式 $p\prod_{i=1}^{p}a_i\leqslant\sum_{i=1}^{p}a_i^p$ 成立，若存在正实数 γ_{ijk}，δ_{ijk}，ζ_{ijk}，ϑ_{ijk} 且满足

$$\sum_{k=1}^{p}\gamma_{ijk}=1\qquad\sum_{k=1}^{p}\delta_{ijk}=1\qquad\sum_{k=1}^{p}\zeta_{ijk}=1\qquad\sum_{k=1}^{p}\vartheta_{ijk}=1$$

则

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\mid b_{ij}\mid L_j\mid e_j(t)\mid p\mid e_i(t)\mid^{p-1}\leqslant\\&\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\sum_{k=1}^{p-1}\mid b_{ij}\mid^{p\gamma_{ijk}}L_j^{p\gamma_{ijk}}\mid e_i(t)\mid^p+\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\mid b_{ij}\mid^{p\gamma_{ijp}}L_j^{p\gamma_{ijp}}\mid e_j(t)\mid^p\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\mid c_{ijl}\mid+\mid c_{ilj}\mid)pM_l\mid e_i(t)\mid^{p-1}\mid e_j(t-\tau_{ij}(t)\mid\leqslant\\&\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p-1}[(\mid c_{ijl}\mid+\mid c_{ilj}\mid)M_l]^{p\delta_{ijk}}\mid e_i(t)\mid^p+\\&\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}[(\mid c_{ijl}\mid+\mid c_{ilj}\mid)M_l]^{p\delta_{ijp}}\mid e_j(t-\tau_{ij}(t))\mid^p\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}p\mid e_i(t)\mid^{p-2}d_{ij}\mid e_j(t)\mid^2=\\&\sum_{j=1}^{n}p[\prod_{k=1}^{p-2}d_{ij}^{\zeta_{ijk}}\mid e_i(t)\mid](d_{ij}^{\zeta_{ij(p-1)}}\mid e_j(t)\mid)(d_{ij}^{\zeta_{ijp}}\mid e_j(t)\mid)\leqslant\\&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p-2}d_{ij}^{p\zeta_{ijk}}\mid e_i(t)\mid^p+\sum_{j=1}^{n}(d_{ij}^{p\zeta_{ij(p-1)}}+d_{ij}^{p\zeta_{ijp}})\mid e_j(t)\mid^p\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}p\mid e_i(t)\mid^{p-2}p_{ij}\mid e_j(t-\tau_{ij}(t))\mid^2\leqslant\\&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p-2}p_{ij}^{p\vartheta_{ijk}}\mid e_i(t)\mid^p+\sum_{j=1}^{n}(p_{ij}^{p\vartheta_{ij(p-1)}}+p_{ij}^{p\vartheta_{ijp}})\mid e_j(t-\tau_{ij}(t))\mid^p\end{aligned}\tag{13}$$

由(10)－(13)式可知

$$
\begin{aligned}
LV(t) \leqslant & \sum_{i=1}^{n}\{\varepsilon \mathrm{e}^{\varepsilon t} \mid e_i(t) \mid^p + a_i p \mathrm{e}^{\varepsilon t} \mid e_i(t) \mid^p + H_i p \mathrm{e}^{\varepsilon t} \mid e_i(t) \mid^p + \mathrm{e}^{\varepsilon t} \sum_{j=1,\, i\neq j}^{n} \sum_{k=1}^{p-1} \mid b_{ij} \mid^{p\gamma_{ijk}} L_j^{p\gamma_{ijk}} \mid e_i(t) \mid^p + \\
& \mathrm{e}^{\varepsilon t} \sum_{j=1,\, i\neq j}^{n} \mid b_{ij} \mid \{p\gamma_{ijp}\} L_j^{p\gamma_{ijp}} \mid e_j(t) \mid^p + \mathrm{e}^{\varepsilon t} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p-1} [(\mid c_{ijl} \mid + \mid c_{ilj} \mid) M_l]^{p\delta_{ijk}} \mid e_i(t) \mid^p + \\
& \mathrm{e}^{\varepsilon t} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} [(\mid c_{ijl} \mid + \mid c_{ilj} \mid) M_l]^{p\delta_{ijp}} \mid e_j(t-\tau_{ij}(t)) \mid^p + \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_{ij} \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}}{1-\rho} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \mid e_j(t) \mid^p - \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \times \\
& \mid e_j(t-\tau_{ij}(t)) \mid^p - p \mathrm{e}^{\varepsilon t} \mid e_i(t) \mid^{p-1} \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon t}}{p} [(F_i(\varepsilon) + a) \mid e_i(t) \mid^{1-p+\theta} \mathrm{e}^{\frac{\theta\varepsilon t}{p}} + \\
& a(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_{ij}}{1-\rho} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t} \mathrm{e}^{\varepsilon s} \mid e_j(s) \mid^p \mathrm{d}s)^{\frac{\theta}{p}} \frac{1}{\mid e_i(t) \mid^{p-1}}] + \frac{(p-1)}{2} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p-2} \mid e_i(t) \mid^p \times \\
& d_{ij}^{p\zeta_{ijk}} + \frac{(p-1)}{2} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \sum_{j=1}^{n} \mid e_j(t) \mid^p (d_{ij}^{p\zeta_{ij(p-1)}} + d_{ij}^{p\zeta_{ijp}}) + \frac{(p-1)}{2} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p-2} \mid e_i(t) \mid^p p_{ij}^{p\vartheta_{ijk}} + \\
& \frac{(p-1)}{2} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \sum_{j=1}^{n} \mid e_j(t-\tau_{ij}(t)) \mid^p (p_{ij}^{p\vartheta_{ij(p-1)}} + p_{ij}^{p\vartheta_{ijp}})
\end{aligned}
\tag{14}
$$

定义函数族

$$
F_i(\varepsilon_i) = \lambda_i - \mu_i - \frac{\sigma_i \mathrm{e}^{\tau\varepsilon_i}}{1-\rho} - \omega_i - \varepsilon_i,\ i \in I
$$

$$
\dot{F}_i(\varepsilon_i) = -\frac{\sigma_i}{1-\rho} \tau \mathrm{e}^{\varepsilon_i \tau} - 1 < 0
$$

由假设(H_3)知 $F_i(0) \geqslant 0$，$i \in I$. 因此，ε_i 是方程 $F_i(\varepsilon_i) = \lambda_i - \mu_i - \frac{\sigma_i \mathrm{e}^{\tau\varepsilon_i}}{1-\rho} - \omega_i - \varepsilon_i$，$i \in I$ 的唯一正解. 记

$$
\varepsilon = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\varepsilon_i\} \qquad F_i(\varepsilon) = \lambda_i - \mu_i - \frac{\sigma_i \mathrm{e}^{\tau\varepsilon}}{1-\rho} - \omega_i - \varepsilon \geqslant 0
$$

成立.

由(14)式和 $F_i(\varepsilon) \geqslant 0$ 可知

$$
LV(t) \leqslant -a(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{\varepsilon t\theta}{p}} \mid e_i(t) \mid^\theta + (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_{ij}}{1-\rho} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t} \mathrm{e}^{\varepsilon s} \mid e_j(s) \mid^p \mathrm{d}s)^{\frac{\theta}{p}}) \tag{15}
$$

根据引理(1)可知

$$
\sum_{i=1}^{n} \mid e_i(t) \mid^\theta \geqslant (\sum_{i=1}^{n} \mid e_i(t) \mid^p)^{\frac{\theta}{p}} \tag{16}
$$

则由(15)和(16)式可知

$$
LV(t) \leqslant -a[(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \mid e_i(t) \mid^p)^{\frac{\theta}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_{ij}}{1-\rho} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t} \mathrm{e}^{\varepsilon s} \mid e_j(s) \mid^p \mathrm{d}s)^{\frac{\theta}{p}}] \tag{17}
$$

当 $a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$ 且 $0 < r < 1$ 时，不等式 $(a+b)^r \leqslant a^r + b^r$ 成立，则有

$$
\begin{aligned}
& (\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \mid e_i(t) \mid^p)^{\frac{\theta}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_{ij}}{1-\rho} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t} \mathrm{e}^{\varepsilon s} \mid e_j(s) \mid^p \mathrm{d}s)^{\frac{\theta}{p}} \geqslant \\
& (\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \mid e_i(t) \mid^p + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_{ij}}{1-\rho} \mathrm{e}^{\varepsilon t} \int_{t-\tau_{ij}(t)}^{t} \mathrm{e}^{\varepsilon s} \mid e_j(s) \mid^p \mathrm{d}s)^{\frac{\theta}{p}}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

成立.

由(17)式和(18)式可知

$$
LV(t) \leqslant -a(V(t))^{\frac{\theta}{p}}
$$

成立.

由引理(4)可知

$$(EV(t))^{1-\frac{\theta}{p}} \leqslant V^{1-\frac{\theta}{p}}(t_0) - a(1-\frac{\theta}{p})(t-t_0),\ t \in (t_0,\ T],\ T = t_0 + \frac{V^{1-\frac{\theta}{p}}(t_0)}{a\left(1-\frac{\theta}{p}\right)} \tag{19}$$

由(9)式和(19)式及数学期望的定义可知

$$(E\sum_{i=1}^{n} |e_i(t)|^p)^{1-\frac{\theta}{p}} \leqslant (EV(t))^{1-\frac{\theta}{p}} \leqslant V^{1-\frac{\theta}{p}}(t_0) - a(1-\frac{\theta}{p})(t-t_0)$$

$$\lim_{t\to T}(V^{1-\frac{\theta}{p}}(t_0) - a(1-\frac{\theta}{p})(t-t_0)) = 0$$

可知

$$\lim_{t\to T} E\|y-x\| = 0$$

且当 $t > T$ 时 $\|y-x\| = 0$. 说明驱动系统(1)和响应系统(4)在有限时间$(t_0,\ T]$内是同步的.

4 数值例子

下面给出一个例子，说明本文结论是正确的. 在驱动系统(1)中，$i,j,l = 1,2$，$g_1 = g_2 = f_1 = f_2 = \tanh(x)$，$a_1 = a_2 = 1$，$\tau_{ij}(t) = \tau_{il}(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$，经过计算可知

$$\rho = \frac{1}{4} \qquad L_j = 1 \qquad N_j = 1 \qquad M_j = 1$$

$$(b_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -1.7 & -0.6 \\ 0.5 & -2.5 \end{pmatrix}$$

$$c_{111} = 1.3 \qquad c_{121} = -0.15 \qquad c_{211} = -1.48 \qquad c_{221} = 0.2$$

$$c_{112} = -1.48 \qquad c_{122} = -0.4 \qquad c_{212} = 0.2 \qquad c_{222} = -2$$

在响应系统(4)中取

$$(p_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad (d_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.8 & 0.9 \end{pmatrix}$$

当 $p = 2$ 时，

$$\begin{aligned} &\lambda_1 - \mu_1 - \frac{\sigma_1}{1-\rho} - \omega_1 = a_1 + 2H_1 + u_1 + |b_{12}|L_2 + |b_{21}| - \frac{5}{3}(|c_{111}| + |c_{121}| + \\ &|c_{112}| + |c_{122}|) - 2(p_{12} + p_{11}) - \frac{1}{2}(3d_{11} + d_{12} + p_{12} + p_{11} + 2d_{21}) = 0.1 > 0 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_2 - \mu_2 - \frac{\sigma_2}{1-\rho} - \omega_2 = a_2 + 2H_2 + u_2 + |b_{21}|L_1 + |b_{12}| - \frac{5}{3}(|c_{211}| + |c_{221}| + \\ &|c_{212}| + |c_{222}|) - 2(p_{21} + p_{22}) - \frac{1}{2}(3d_{22} + d_{21} + 2d_{12} + p_{21} + p_{22}) = 0.133 > 0 \end{aligned} \tag{21}$$

由(20)式和(21)式可知，驱动系统(1)和响应系统(4)在恰当的外部输入控制$U_i(t)(i=1,2)$下在有限时间内同步.

参考文献:

[1] HOPFIELD J J. Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities [J]. Proc Natl Acad Sci, 1982, 79(8): 2554-2558.

[2] PAJARES G, GUIJARRO M, RIBEIRO A. A Hopfield Neural Network for Combining Classifiers Applied to Textured Images [J]. Neural Networks, 2010, 23(1): 144-153.

[3] LIU D R. Cloning Template Design of Cellular Neural Networks for Associative Memories [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1997, 44(7): 646-650.

[4] LIU B, LU W L, CHEN T P. Neural Networks Letter: Global Almost Sure Self-Synchronization of Hopfield Neural Networks with Randomly Switching Connections [J]. Neural Networks, 2011, 24(3): 305-310.

[5] CAI G L, SHAO H J, YAO Q. A Linear Matrix Inequality Approach to Global Synchronization of Multi-Delay Hopfield Neural Networks with Parameter Perturbations [J]. Chinese Journal of Physics, 2012, 50(1): 50－63.

[6] YU J, HU C, JIANG H J, et al. Exponential Synchronization of Cohen-Grossberg Neural Networks via Periodically Intermittent Control [J]. Neurocomputing 2011, 74(10): 1776－1782.

[7] GAN Q T, XU R, YANG P H. Exponential Synchronization of Stochastic Fuzzy Cellular Neural Networks with Time Delay in the Leakage Term and Reaction-Diffusion [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(4): 1862－1870.

[8] ZHANG W B, TANG Y, FAN J A, et al. Neural Networks Letter: Stability of Delayed Neural Networks with Time-Varying Impulses [J]. Neural Networks, 2012, 36: 59－63.

[9] RYAN E P. Finite-Time Stabilization of Uncertain Nonlinear Planar Systems [J]. Dynamics and Control, 1991, 1(1): 83－94.

[10] HUANG J J, LI C D, HUANG T W, et al. Finite-Time Lag Synchronization of Delayed Neural Networks [J]. Neurocomputing, 2014, 139(13): 145－149.

[11] WANG Y J, SHI X M, ZUO Z Q, et al. On Finite-Time Stability for Nonlinear Impulsive Switched Systems [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2013, 14(1): 807－814.

[12] HU C, YU J, JIANG H J. Finite-Gime Synchronization of Delayed Neural Networks with Cohen-Grossberg Type Based on Delayed Feedback Control [J]. Neurocomputing, 2014, 143: 90－96.

[13] DU Y H, ZHONG S M, ZHOU N, et al. Exponential Stability for Stochastic Cohen-Grossberg BAM Neural Networks with Discrete and Distributed Time-Varying Delays [J]. Neurocomputing, 2014, 127: 144－151.

[14] KOSMATOPOULOS E B, CHRISTODOULOU M A. Structural Properties of Gradient Recurrent High-Order Neural Networks [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing Home Popular Current Issue, 1995, 42(9): 592－603.

[15] WANG T B, ZHAO S W, ZHOU W N, et al. Finite-Time Master-Slave Synchronization and Parameter Identification for Uncertain Lurie Systems [J]. ISA Transactions, 2014, 53(4): 1184－1190.

[16] LIU X Y, JIANG N, WANG M, et al. Finite-Time Stochastic Stabiliza-Tion for BAM Neural Networks with Uncertainties [J]. Journal of the Franklin Institute, 2013, 350(8): 2109－2123.

Finite-Time Control Synchronization for High-Order Stochastic Hopfield Neural Networks with Time-Varying Delays

PU Hao[1], JIANG Hai-Jun[2], HU Cheng[2], RAN Jie[1], ZHANG Zhuan-zhou[1]

1. School of Mathematics, Zunyi Normal College, Zunyi Guizhou 563002, China;

2. College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830046, China

Abstract: In this paper, we study the finite-time control synchronization for high-order stochastic Hopfield neural networks with time-varying delays. Through the Lyapunov function, the finite time stability theory, the theory of stochastic differential equation and some inequality methods, some new and useful sufficient conditions on the in finite-time synchronization are obtained based on p-norm. The conclusion of this paper is the generalization of the previous related conclusions.

Key words: high-order Hopfield neural network; stochastic perturbation term; time-varying delay; finite time synchronization; p-norm

责任编辑　张　枸