第 40 卷第 12 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2018年12月
Vol. 40　No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec.　2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.12.012

非正规循环子群的正规化子皆极大的两类有限可解群①

曹建基[1]，　高建玲[2]

1. 山西财经大学 应用数学学院，太原 030006；2. 山西大同大学 数学与统计学院，山西 大同 037009

摘要：子群的正规性和有限群的结构有密切的关系，而正规化子作为子群正规性的一种度量对有限群结构的影响自然也很大．极大子群是有限群的一类重要子群．利用某些子群的正规化子的极大性研究有限群的结构．具体研究了群 G 的阶被 p 整除的非正规循环子群的正规化子皆极大的有限可解群，以及非正规 p-子群和$\{p, q\}$-子群的正规化子均极大的有限可解群．得到这两类群的一些性质，并对这两类群的结构给出了刻画．

关　键　词：极大子群；正规子群；正规化子

中图分类号：O152.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2018)12-0081-05

本文所考虑的群都为有限群．

众所周知，有限群研究的根本问题就是确定有限群的结构．正规子群与有限群的结构有着非常紧密的联系，而正规化子为子群正规性的一种度量，所以很多群论学家利用某些子群的正规化子研究有限群的结构．例如：文献[1]利用 p-子群的正规化子给出了一个群 G 为 p-幂零的判断准则，即群 G 为 p-幂零群当且仅当群 G 的每一个 p-子群的正规化子为 p-幂零群；文献[2]证明了一个群幂零当且仅当群 G 的每个 Sylow 子群的正规化子幂零；文献[3]给出了一个非常好的幂零群的判断准则，一个群幂零当且仅当对每个素因子 p，都有 Sylow p-子群的正规化子 p-幂零；文献[4]研究了具有极大正规化子的有限群．另外，文献[5]研究了非正规子群的正规化子极大的有限非可解群，并得到这类群的结构，结论如下：

设 G 为非可解群．若子群 H 满足条件：

(a) H 非次正规；(b) H 为 p-子群或者为$\{p, q\}$-子群，其中 p, q 互素，$N_G(H)$ 为 G 的极大子群．则 $G = K \times S$，其中 $K \approx \mathrm{PSL}(2, 13)$ 或者 $K \approx \mathrm{SL}(2, 13)$，$S$ 为交换群，群 K 的阶和群 S 的阶互素．

反之，如果 $G = K \times S$，其中 K, S 如上面所述，那么 G 的每个非正规子群的正规化子均为 G 的极大子群．

受以上结果的启发，本文将研究两类群．一类为阶被素数 p 整除的非正规循环 p-子群的正规化子皆极大的有限群，为方便我们把这类群叫作 NCPM-群．文献[6-7]研究了非正规循环子群的正规化子皆极大的有限群，我们称这类群为 NCM-群．首先，我们给出两个例子说明并非所有的 NCPM-群都是 NCM-群．

例 1　如果 $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle \times \langle d \rangle \times \langle e \rangle) \rtimes \langle f \rangle$，其中 a, b, c, d 均为 2 阶元，e 为 7 阶元，f 为 3 阶元，且有 $a^f = ab$，$b^f = a$，$c^f = cd$，$d^f = c$，$e^f = e^2$，那么群 G 为 NCPM-群但非 NCM-群．

证　容易验证群 G 为 NCPM-群．另一方面，$N_G(\langle f \rangle) = \langle f \rangle$ 且$\langle a, f \rangle = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle f \rangle$ 为群 G 的真子群．所以 $N_G(\langle f \rangle)$ 不是群 G 的极大子群，进一步可得 G 非 NCM-群．

---

① 收稿日期：2018-02-09

基金项目：国家自然科学基金项目(11801334)；2018 年引进博士启动经费项目(Z18207)．

作者简介：曹建基(1979-)，男，讲师，博士，主要从事有限群论的研究．

例 2 $G=PSL(2,11)$ 为 NCPM -群但非 NCM -群.

证 易知，对群 G 的每个偶阶元 x，都存在 G 的子群 S，满足 x 属于 S 且同构于 C_6. 因为 $N_G(S)$ 同构于 D_{12}，而 D_{12} 为群 G 的极大子群. 故 G 为 NCPM -群. 另一方面，存在循环子群 U 同构于 C_5，且 $N_G(U)$ 同构于 D_{10}. 由于 D_{10} 不是群 G 的极大子群，我们可知群 G 不是 NCM -群.

另外一类群，我们研究非正规 p -子群和 $\{p,q\}$ -子群的正规化子均极大的有限群. 文献[5] 给出了满足条件的非可解群的情形，所以本文只考虑满足条件的可解群，为方便我们把这类群叫作 NHM -群，我们得到了这类群的一些性质. 类似的文献还有很多，可参见文献[8－12]. 文中的符号和术语是标准的，可参见文献[13].

1 可解 NCPM -群

定义 1 设 p 为群 G 的阶的素因子. 阶被 p 整除的元素称为 pd -元，由群 G 的 pd -元生成的子群称为 pd -子群. 如果存在 G 的阶的素因子 p，使得群 G 的所有非正规循环 pd -子群的正规化子都为 G 的极大子群，那么称这类群为 NCPM -群.

定义 2 设 G 为有限群. 如果群 G 的所有非正规循环子群的正规化子均极大，则称群 G 为 NCM -群.

引理 1 如果 M 为可解群 G 的极大子群，则 $|G:M|$ 为素数方幂.

定理 1 设 p 为群 G 的阶的素因子，N 为群 G 的正规 p' -子群. 如果 G 为 NCPM -群，那么 G/N 也为 NCPM -群.

证 若 $\langle x\rangle N/N$ 为 G/N 的非正规循环 pd -子群，则 $\langle x\rangle$ 也为 G 的非正规 pd -子群. 所以 $N_G(\langle x\rangle)$ 为群 G 的极大子群. 又由 $N_G(\langle x\rangle)N/N\leqslant N_{G/N}(\langle x\rangle N/N)$，可得 $N_{G/N}(\langle x\rangle N/N)$ 为 G/N 的极大子群.

定理 2 设 A 为群 G 的非正规循环 p -子群. 如果 G 为 NCPM -群，那么 $C_G(A)$ 有正规 p -补 K，且 K 的每个子群均为 $N_G(A)$ 的正规子群. 特别地，如果 p 为 G 的阶的最小素因子，那么 $N_G(A)=K\rtimes P$.

证 如果 A 为循环 p -子群且 $C_G(A)$ 为 p -群，那么 $C_G(A)$ 有正规 p -补. 如果 $C_G(A)$ 不是 p -群，取 $E\leqslant C_G(A)$，且 E 为 q -子群，其中 q 为素数且 q 不等于 p. 首先 EA 定为群 G 的非正规子群，否则由 A char $EA\trianglelefteq G$ 可得 $A\trianglelefteq G$，与假设矛盾. 注意到，由 A char $EA\trianglelefteq N_G(EA)$ 可得 $N_G(EA)\leqslant N_G(A)$，进一步由 $N_G(EA)$ 的极大性得 $N_G(EA)=N_G(A)$. 同理，因为 E char $EA\trianglelefteq N_G(EA)$，所以 $N_G(EA)\leqslant N_G(E)$，则 E 为 $N_G(A)$ 的正规子群. 由 E 的任意性得，$C_G(A)$ 有正规 p -补 K，且 K 的每个子群均为 $N_G(A)$ 的正规子群. 特别地，如果 p 为 G 的阶的最小素因子，那么 $N_G(A)/C_G(A)$ 为 p -子群，所以 $N_G(A)=K\rtimes P$.

定理 3 设 p 为群 G 的阶素因子，P 为群 G 的 Sylow p -子群. 如果群 G 为可解 NCPM -群但非 NCM -群，那么：

(i) $Z(G)$ 中没有非平凡 p -子群；

(ii) 如果 p 为 G 的阶的最小素因子，那么对任意群 G 的 p -元素 x，都存在元 g，使得 $P^g\leqslant N_G(\langle x\rangle)$.

证 (i) 用反证法证明. 设 $\langle x\rangle$ 为 $Z(G)$ 中的非平凡 p -子群，再设 $\langle y\rangle$ 为群 G 的任意非正规循环 p' -子群. 首先容易得到 $N_G(\langle x\rangle\times\langle y\rangle)\leqslant N_G(\langle y\rangle)$. 由 $N_G(\langle x\rangle\times\langle y\rangle)$ 的极大性可得 $N_G(\langle y\rangle)$ 为群 G 的极大子群. 所以 G 为 NCM -群，矛盾.

(ii) 设 p 为群 G 的阶的最小素因子，又设存在群 G 的循环 p -子群 $\langle x\rangle$，满足 $p\,\Big|\,|G:N_G(\langle x\rangle)|$. 由引理 1 知，可解群的每一个极大子群的指数均为素数方幂，所以由 $N_G(\langle x\rangle)$ 的极大性可以断定，存在群 G 的 Hall p' -子群 T，满足 $T\leqslant N_G(\langle x\rangle)$. 设 $\langle y\rangle\leqslant T$ 为群 G 的非正规循环子群，由定理 2 可得 $N_G(\langle x\rangle)\leqslant N_G(\langle y\rangle)$. 所以又由 $N_G(\langle x\rangle)$ 的极大性可得 $N_G(\langle y\rangle)$ 为群 G 的极大子群. 注意到群 G 的所有 Hall p' -子群均在 G 中共轭，所以对群 G 的任意非正规循环子群 $\langle z\rangle$，$N_G(\langle z\rangle)$ 为群 G 的极大子群. 所以群 G 为 NCM -群，矛盾. 定理 3 得证.

定理 4 设 p 为群 G 的阶的最小素因子，P 为群 G 的 Sylow p -子群. 如果群 G 为 NCPM -群，且群 G 既非 p -幂零群又非 p -闭群，那么 $O^{p'}(G)=Z(G)$.

证　因为群 G 既非 p -幂零群又非 p -闭群，所以由文献[6]的引理 3.2 可得 G 不是 NCM -群．由定理 3(i) 可得 $Z(G)\leqslant O_{p'}(G)$．下面我们证明 $O_{p'}(G)\leqslant Z(G)$．设 $\langle x\rangle$ 为群 P 的非正规 p -子群．由定理 2 可得 $N_G(\langle x\rangle)=K\rtimes S$．其中 K 为 $N_G(\langle x\rangle)$ 的 Hall p' -子群，S 为 $N_G(\langle x\rangle)$ 的 Sylow p -子群．如果 $O_{p'}(G)$ 不包含在 K 中，那么 $O_{p'}(G)$ 不包含在 $N_G(\langle x\rangle)$ 中．由 $N_G(\langle x\rangle)$ 的极大性可得 $G=O_{p'}(G)N_G(\langle x\rangle)$，且 G 为 p -幂零群，矛盾．所以 $O_{p'}(G)\leqslant K$．进一步可得 p -元素 x 包含在 $C_G(O_{p'}(G))$ 中．由 x 选取的任意性可得 $P\leqslant C_G(O_{p'}(G))$．再由定理 3(ii) 可得 $S\leqslant C_G(O_{p'}(G))$，故 $N_G(\langle x\rangle)\leqslant C_G(O_{p'}(G))$．$N_G(\langle x\rangle)$ 为群 G 的极大子群，所以 $C_G(O_{p'}(G))=G$ 或者 $C_G(O_{p'}(G))=N_G(\langle x\rangle)$．如果 $C_G(O_{p'}(G))=N_G(\langle x\rangle)$，那么由 K char $C_G(O_{p'}(G))\trianglelefteq G$ 可得 K 为群 G 的正规子群．所以 $K=O_{p'}(G)$ 并且 $C_G(O_{p'}(G))=O_{p'}(G)\times S$．进一步可得 S 为群 G 的正规子群，与群 G 为非 p -闭群矛盾．故 $C_G(O_{p'}(G))=G$，且 $O_{p'}(G)\leqslant Z(G)$．

定理 5　设 p 为群 G 的阶的最小素因子，P 为群 G 的 Sylow p -子群．如果群 G 为 NCPM -群但非 NCM -群，且群 G 为 p -闭群，那么 $G=P\rtimes T$，其中 P 为交换群，T 为群 G 的 Hall p' -子群．进一步有 $C_T(P)$ 为交换群，并且 $P\times C_T(P)=C_G(P)$ 为群 G 的极大子群．

证　因为 P 为群 G 的正规子群，所以由定理 3(ii) 可得 P 为 Dedekind 群．如果 P 为非交换群，那么 P 同构于 $Q_8\times C_2\times\cdots\times C_2$．注意到 $C_2\approx\Omega_1(P)\trianglelefteq G$，则 $\Omega_1(P)$ 为群 G 的正规循环子群，进一步可得 $\Omega_1(P)\leqslant Z(G)$，与定理 3(i) 矛盾．故 P 为交换群．设 $G=P\rtimes T$，其中 T 为群 G 的 Hall p' -子群．由定理 2 可得，对群 G 的任意 p -元素 x，为群 G 的非正规子群 $\langle x\rangle$，都有 $N_G(\langle x\rangle)=C_T(x)\times P$，且 $C_T(x)$ 为交换群．容易得到 $N_G(\langle x\rangle)\leqslant C_G(P)$．由 $N_G(\langle x\rangle)$ 的极大性，得 $C_G(P)=G$ 或者 $C_G(P)=N_G(\langle x\rangle)$．如果 $C_G(P)=G$，那么 $P\leqslant Z(G)$，与定理 3(i) 矛盾．所以 $C_G(P)=N_G(\langle x\rangle)$，进一步可得 $C_T(x)=C_T(P)$．

定理 6　设 p 为群 G 的阶的最小素因子，P 为群 G 的 Sylow p -子群．如果群 G 为 NCPM -群但非 NCM -群，且群 G 为 p -幂零群，那么 $G=T\rtimes P$，其中 T 为群 G 的 Hall p' -子群．进一步，对任意 p -元素 x，满足 $\langle x\rangle$ 为群 G 的非正规子群，则存在元素 g，使得 $N_G(\langle x\rangle)=C_T(x)\rtimes P^g$ 为群 G 的极大子群．

证　因为群 G 为 p -幂零群，设 $G=T\rtimes P$，其中 T 为群 G 的 Hall p' -子群．由定理 3(ii)，对任意群 G 的 p -元素 x 都存在元 g，使得 $P^g\leqslant N_G(\langle x\rangle)$．因此由定理 2 可得 $N_G(\langle x\rangle)=C_T(x)\rtimes P^g$ 为群 G 的极大子群．

2　可解 NHM -群

定义 3　如果对群 G 的非正规 p -子群和 $\{p, q\}$ -子群 H(其中 p 和 q 均为群 G 阶的素因子)，都有 $N_G(H)$ 为群 G 的极大子群，那么 G 被称为 NHM -群．

定理 7　设 A 为群 G 的非正规 p -子群．如果 G 为 NHM -群，那么下面结论成立：

(i) $N_G(A)/A=T/A\rtimes P/A$，其中 T/A 为 $N_G(A)/A$ 的正规 p -补，P/A 为 $N_G(A)/A$ 的 Sylow p -子群，且 T/A 的每个子群均为 $N_G(A)/A$ 的正规子群；

(ii) $N_G(A)$ 为可解群；

(iii) 如果 A 为循环 p -子群，那么 $C_G(A)$ 有正规 p -补 K，且 K 的每个子群均为 $N_G(A)$ 的正规子群．特别地，如果 p 为 G 的阶的最小素因子，那么 $N_G(A)=K\rtimes P$．

证　(i)　如果 $N_G(A)$ 为 p -群，那么结论成立．如果 $N_G(A)$ 不是 p -群，设 B/A 为 $N_G(A)/A$ 的任意 q -子群，其中 q 为素数且 q 不等于 p．由 A 为 B 的正规 Sylow p -子群得 A 为 B 的特征子群，所以由 A char $B\trianglelefteq N_G(B)$ 得 $N_G(B)\leqslant N_G(A)$．另外 B 定为 G 的非正规子群，否则由 A char $B\trianglelefteq G$ 得 $A\trianglelefteq G$，与假设矛盾．故由 $N_G(B)$ 的极大性可得 $N_G(B)=N_G(A)$，进一步可得 B/A 为 $N_G(A)/A$ 的正规子群．由 B/A 取法的任意性得，$N_G(A)/A$ 的任意 Sylow r -子群(其中 r 为素数且 r 不等于 p)均为 $N_G(A)/A$ 的正规子群．故 $N_G(A)/A$ 有正规 p -补 T/A，且从上面证明过程可得，T/A 的每个子群均为 $N_G(A)/A$ 的正规子群．

(ii) 由(i)可得 T/A 为Dedekind群，所以 T/A 为可解群. 又由 $N_G(A)/T$ 为可解 p-群，可得 $N_G(A)$ 为可解群.

(iii) 类似于定理2的证明，可得结论成立.

定理8 设 G 为幂零群. 如果 G 为NHM-群，那么下面结论成立：

(i) 群 G 最多有一个Sylow子群非Dedekind群；

(ii) 非Dedekind的Sylow子群定为NHM-群.

证 (i) 用反证法. 假设 P 和 Q 分别为群 G 的Sylow p-子群和Sylow q-子群，并且 S 为 P 的非正规子群，T 为 Q 的非正规子群. $S\times T$ 定为 G 非正规子群，否则由 S char $ST\trianglelefteq G$ 可得 $S\trianglelefteq G$，同理可得 $T\trianglelefteq G$，矛盾. 所以由条件知 $N_G(S\times T)$ 为 G 的极大子群. 由于 $N_G(S)$ 和 $N_G(T)$ 均为 G 的极大子群. 故由

$$N_G(S\times T)\leqslant N_G(S)\cap N_G(T)$$

我们得到

$$N_G(S\times T)=N_G(S)=N_G(T)$$

因为 $P\leqslant N_G(T)=N_G(S)$，所以 $S\trianglelefteq P$，矛盾. 故群 G 最多有一个Sylow子群非Dedekind群.

(ii) 不失一般性，可以假设 P 非Dedekind群. 如果 S 为 P 的非正规子群，那么 $N_G(S)$ 为 G 的极大子群. 群 G 为幂零群，所以 $|G:N_G(S)|=p$，进一步，有 $|P:N_P(S)|=p$. 故 P 为NHM-群.

定理9 设 G 为幂零群，H 为 G 的非正规子群. 如果群 G 为NHM-群，那么存在 H 的某个Sylow子群 P 满足 $N_G(H)\leqslant N_G(P)$，且 $N_G(P)$ 为群 G 的极大子群. 特别地，如果 H 为 p-群或者 $\{p, q\}$-子群，那么 $N_G(H)=N_G(P)$.

证 如果 H 为 p-群，结论显然成立. 若 H 为 $\{p, q\}$-子群，可设 $H=P\times Q$. 由于 H 为 G 的非正规子群，所以 P 和 Q 至少有一个为 G 的非正规子群. 若 P 为 G 的非正规子群，Q 为 G 的正规子群，则由 $N_G(P\times Q)\leqslant N_G(P)\cap N_G(Q)=N_G(P)$ 和 $N_G(P\times Q)$ 的极大性可得 $N_G(P\times Q)=N_G(P)$. 如果 P 和 Q 均为 G 的非正规子群，那么由 $N_G(P\times Q)\leqslant N_G(P)\cap N_G(Q)$ 及 $N_G(P\times Q)$, $N_G(P)$, $N_G(Q)$ 的极大性可得 $N_G(P\times Q)=N_G(H)=N_G(P)$.

如果 H 的阶至少包含3个素因子，且最多有两个Sylow子群为群 G 的非正规子群，那么类似上面的证明方法可得 $N_G(H)\leqslant N_G(P)$. 若 H 只包含3个非正规Sylow子群，不妨设为 P, Q, R，那么

$$N_G(H)\leqslant N_G(P)\cap N_G(Q)\cap N_G(R)$$

类似于上面证明，由 $N_G(P\times Q)$, $N_G(P)$, $N_G(Q)$ 的极大性可得 $N_G(P\times Q)=N_G(P)=N_G(Q)$，由 $N_G(P\times Q)$, $N_G(R)$, $N_G(Q)$ 的极大性可得 $N_G(P\times Q)=N_G(Q)=N_G(R)$，所以 $N_G(P)=N_G(Q)=N_G(R)$. 又因为

$$N_G(H)\leqslant N_G(P)\cap N_G(Q)\cap N_G(R)$$

所以 $N_G(H)\leqslant N_G(P)$.

定理10 设 p 为 G 的阶的最小素因子. 如果 G 为可解非幂零NHM-群，且存在循环 p-子群 $\langle x\rangle$ 满足 $p\,\big|\,|G:N_G(\langle x\rangle)|$，那么群 G 的Hall p'-子群为交换群，且群 G 的每个非正规 p'-子群的正规化子均为 G 的极大子群.

证 因为群 G 存在循环 p-子群 $\langle x\rangle$，满足 $p\,\big|\,|G:N_G(\langle x\rangle)|$，所以由定理7(iii)可得 $N_G(\langle x\rangle)=K\rtimes S$，其中 S 为 $N_G(\langle x\rangle)$ 的Sylow p-子群，K 为 $N_G(\langle x\rangle)$ 的Hall p'-子群. 注意到 $p\,\big|\,|G:N_G(\langle x\rangle)|$，可知 K 为群 G 的Hall p'-子群. 再由定理7(iii)可知 K 为Dedekind群，并且包含在 K 中的每一个 G 的非正规子群的正规化子均为 G 的极大子群.

参考文献：

[1] HUPPERT B. Endliche Gruppen I [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[2] BIANCHI M, MAURI A G B, HAUCK P. On Finite Groups with Nilpotent Sylow-Normalizers [J]. Archiv der Mathematik, 1986, 47(3): 193－197.

[3] BALLESTER-BOLINCHES A，SHEMETKOV L A. On Normalizers of Sylow Subgroups in Finite Groups [J]. Siberian Mathematical Journal，1999，40(1)：1－2.
[4] 蹇　祥，吕　恒. 具有极大正规化子的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：56－60.
[5] MANN A. Finite Groups with Maximal Normalizers [J]. Illinois J Math，1968，12：67－75.
[6] CAO J J，GUO X Y. Finite Solvable Groups in Which the Normalizer of Every Non-Normal Cyclic Subgroup is Maximal [J]. Journal Group Theory，2014，17(4)：671－687.
[7] CAO J J，GUO X Y. Finite Non-Solvable Groups in Which the Normalizer of Every Non-Normal Cyclic Subgroup is Maximal [J]. Commun Algebra，2018，46(1)：325－334.
[8] KOSVINTSEV L F. Finite Groups with Maximal Element Centralizers [J]. Matematicheskie Zametki，1973， 13(4)：577－580.
[9] ANTONOV V A. Locally Finite Groups with Maximal Centralizers of Element [J]. Matematicheskie Zametki，1991，49(3)：145－146.
[10] ORMEROD E A. Finite p-Groups in Which Every Cyclic Subgroup is 2-Subnormal [J]. Glasg Math J，2002，44：443－453.
[11] PARMEGGIANI G. On Finite p-Groups of Odd Order with Many Subgroups 2-Subnormal [J]. Comm Algebra，1996，24(8)：2707－2719.
[12] ZHANG J P. Sylow Numbers of Finite Groups [J]. J Algebra，1995，176(1)：111－123.
[13] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 北京：科学出版社，1999.

Two Finite Solvable Groups in Which the Normalizer of Some Non-Normal Subgroups is Maximal

CAO Jian-ji[1]，　GAO Jian-ling[2]

1. School of Applied Mathematics，Shanxi University of Finance and Economics，Taiyuan 030006，China；
2. School of Mathematics and Statistics，Shanxi Datong University，Datong Shanxi 037009，China

Abstract：The normality of subgroups is closely related to the structure of finite groups，and the normalizer of subgroups，which is a measure of the normality of subgroups，has a significant influence on their structure. On the other hand，the maximal subgroup is an important kind of subgroup of finite groups. So it is reasonable to investigate the structure of a group by using normalizers of some kind of subgroups. In this paper，we study the solvable groups in which the normalizer of cyclic subgroups whose order is divided by p is maximal in G. We also study the solvable groups in which every non-normal p-subgroup and $\{p，q\}$-subgroup have a maximal normalizer in G. Some good properties are given for the above two types of group，and we also describe the structure of the two types of group.

Key words：maximal subgroup；normal subgroup；normalizer

责任编辑　廖　坤
崔玉洁