第 40 卷第 12 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2018年12月
Vol. 40　No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec.　2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.12.013

2^3p 阶群的共轭类个数与群的结构①

廖俊梅，　曹洪平

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 在有限群的研究中，群的阶和群的元素的共轭类个数是群的两个非常重要的数量，这两个数量对群的结构性质有很大影响，很多有限群完全可由这两个数量确定. 对于阶为 2^3p（p 为奇素数）的有限群，根据分类定理，一共有 19 类互不同构的 2^3p 阶群，对这 19 类 2^3p 阶群，利用它们的生成元与生成关系及数论和群论知识确定了它们的共轭类，并由此得出了它们的共轭类的个数，进一步对这 19 类 2^3p 阶群的共轭类个数进行比较，得到了 2^3p 阶群的共轭类个数的最小值. 反过来，根据已得到的 2^3p 阶群的共轭类个数的最小值及群的阶，利用 2^3p 阶群的分类，对 19 类 2^3p 阶群的共轭类个数进行比较，确定了共轭类个数取最小值的 2^3p 阶群的具体结构.

关　键　词： 共轭类个数；最小值；群结构

中图分类号： O152.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673－9868(2018)12－0086－04

群的阶和元素的阶及同阶类等数量性质对有限群的刻画至关重要（文献[1－2]）. 此外共轭类的个数（文献[3－4]）和长度对有限群的结构也有着重要影响，利用这两个量去刻画有限群的结构是近几十年有限群论研究领域的热点问题. 对任一 n 阶群 G，其共轭类个数一定不大于 n. 当阶固定时，同阶群的群结构或多或少有些不同，故 n 阶群的共轭类个数有一定的存在范围，那么其共轭类个数的下限是多少，以及取得下限的群结构是怎样的？ 或者我们可以思考：阶固定的群，当其共轭类个数取得其存在范围的下限时，该阶群的群结构是否能被唯一确定？ 若能，则用共轭类个数去刻画有限群的群结构就有了不一样的视角. 本文对 2^3p（p 为奇素数）阶群进行了讨论，给出了其共轭类个数的最小值，并确定了其共轭类个数取得最小值时的群结构.

本文中 $G_i(i=1,2,\cdots,19)$ 表示 2^3p（p 为奇素数）阶群，$k(G_i)$ 表示群 G_i 的共轭类个数. 取 $x\in G$. x^G 表示 x 所在的共轭类，$|x^G|$ 表示该共轭类的长度. 其他符号都是标准的，可参看文献[3－8]. 部分方法思路可参看文献[1－2,9－10].

定理 1　对文献[11] 的引理 1 中的 $G_i(i=1,2,\cdots,19)$，其共轭类的个数如表 1 所示.

表 1　G_i 共轭类的个数

$k(G_1)$	$k(G_2)$	$k(G_3)$	$k(G_4)$	$k(G_5)$	$k(G_6)$	$k(G_7)$	$k(G_8)$	$k(G_9)$	$k(G_{10})$
$8p$	$8p$	$2p+3$	$2p+3$	$5p$	$5p$	$2p+6$	$2p+6$	$2p+4$	$2p+6$

$k(G_{11})$	$k(G_{12})$	$k(G_{13})$	$k(G_{14})$	$k(G_{15})$	$k(G_{16})$	$k(G_{17})$	$k(G_{18})$	$k(G_{19})$
$2p+6$	$8p$	$\frac{p-1}{2}+7$	$\frac{p-1}{2}+8$	$\frac{p-1}{8}+8$	8	8	5	7

证　观察 G_i 的群结构可知 G_1,G_2,G_{12} 为交换群，$G_{18}\cong S_4$，$G_3,G_4,\cdots,G_8$ 的群结构相似，G_9,G_{10},G_{11} 的群结构相似，G_{13},G_{14},G_{15} 的群结构相似，G_{16},G_{17},G_{19} 的群结构相似. 下面分 5 个步骤分别讨论

① 收稿日期：2018－03－21
基金项目：国家自然科学基金项目(11471266，11271301).
作者简介：廖俊梅(1993－)，女，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：曹洪平，副教授.

$G_i(i=1,2,\cdots,19)$ 的共轭类个数.

步骤 1　计算 G_1,G_2,G_{12},G_{18} 的共轭类个数.

已知交换群的中心为其自身，又因每个中心元自成一类，故 G_1,G_2,G_{12} 的共轭类个数为 $8p$. 由文献[4]知 S_4 的共轭类个数为 5，故 G_{18} 的共轭类个数为 5.

步骤 2　计算 $G_3,G_4,\cdots,G_8$ 的共轭类个数.

以 G_5 为例，设 $A=\langle a\rangle$，则 $|A|=4p$，$A\trianglelefteq G_5$. 由文献[5]知 $Z(G_5)=\langle a^2\rangle$ 为 $2p$ 阶子群，又因中心元自成一类，故 $Z(G_5)$ 中元组成 $2p$ 个共轭类. 现取：

$$b\in A-Z(G_5)\qquad G_5\supseteq C_{G_5}(b)\supseteq A$$

因为：

$$|G_5:A|=2\qquad C_{G_5}(b)\neq G_5$$

故 $|C_{G_5}(b)|=|A|$，于是 $|b^{G_5}|=\dfrac{8p}{4p}=2$. 又因 $\dfrac{4p-2p}{2}=p$，故 $A-Z(G_5)$ 中元组成 p 个长为 2 的共轭类. 另外 $G_5=A+gA$，gA 中有 $2p$ 个 2 阶元，$2p$ 个 4 阶元. $\forall x\in gA$，若 x 为 2 阶元，则 $C_{G_5}(x)\supseteq\langle x\rangle Z$. 而 $|\langle x\rangle Z|=4p$，因此 $4p\,\Big|\,|C_{G_5}(x)|$. 又因 $C_{G_5}(x)\neq G_5$，故：

$$|C_{G_5}(x)|=4p\qquad |x^{G_5}|=\frac{8p}{4p}=2$$

故 gA 中 2 阶元组成 p 个共轭类. 若 x 为 4 阶元，同理：

$$C_{G_5}(x)\supseteq\langle x\rangle Z\qquad |\langle x\rangle Z|=\frac{|Z||\langle x\rangle|}{|\langle x\rangle\cap Z|}=4p$$

故 gA 中 4 阶元组成 p 个共轭类.

综上所述，

$$k(G_5)=2p+p+p+p=5p$$

同理可得 G_3,G_4,G_6,G_7,G_8 的共轭类个数.

步骤 3　计算 G_9,G_{10},G_{11} 的共轭类个数.

以 G_{10} 为例，令 $A=\langle a,b,c\rangle$，则：

$$|A|=4p\qquad A\trianglelefteq G_{10}$$

又因 G_{10} 的中心 $Z=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$ 为 4 阶循环群，故 G_{10} 的中心含 4 个共轭类，取 $x\in A-Z$，有

$$|C_{G_{10}}(x)|=|A|=4p$$

因此 $A-Z$ 中元组成 $2p-2$ 个共轭类. 又因为：

$$G_{10}=A+gA\qquad |gA|=4p$$

其中 2 阶元和 4 阶元分别为 $2p$ 个. 对 $\forall y\in gA$，若 y 为 2 阶元，则 $C_{G_{10}}(y)\supseteq\langle y\rangle Z$. 又因 $|\langle y\rangle Z|=8$，故 $8\,\Big|\,|C_{G_{10}}(y)|$. 因为 $C_{G_{10}}(y)\neq G_{10}$，故 $|C_{G_y}(10)|=8$. 所以 gA 中 2 阶元的共轭类个数为 2. 同理，gA 中 4 阶元的共轭类个数也为 2.

综上所述，

$$k(G_{10})=4+(2p-2)+2+2=2p+6$$

同理可得 G_9,G_{11} 的共轭类个数.

步骤 4　计算 G_{13},G_{14},G_{15} 的共轭类个数.

以 G_{15} 为例，由引理 1 知：

$$G_{15}=\langle a,g\rangle\qquad a^p=g^8=1\qquad g^{-1}ag=a^i$$

$$i^8\equiv1(\bmod p)\qquad i^4\equiv-1(\bmod p)\qquad p\equiv1(\bmod 8)$$

由文献[12]得 G_{15} 是以 $\langle a\rangle$ 为核、$\langle g\rangle$ 为补的 Frobenius 群，所以 G_{15} 中有 $p-1$ 个 p 阶元，p 个 2 阶元，$2p$ 个 4 阶元，p 个 8 阶元. 设 x 为 G_{15} 中的 p 阶元，则 $C_{G_{15}}(x)=\langle a\rangle$，从而

$$|x^{G_{15}}|=\frac{8p}{p}=8$$

所以 G_{15} 中 $p-1$ 个 p 阶元组成 $\frac{p-1}{8}$ 个共轭类. 设 y 为 G_{15} 中的 2 阶元，则 $|C_{G_{15}}(y)|=8$(见文献[13])，所以

$$|y^{G_{15}}|=\frac{8p}{p}=8$$

所以 G_{15} 中 p 个 2 阶元构成 1 个共轭类. 设 z 为 G_{15} 中的 4 阶元，则 $|C_{G_{15}}(z)|=8$，从而 $|z^{G_{15}}|=\frac{8p}{8}=p$，所以 G_{15} 中 $2p$ 个 4 阶元组成 2 个共轭类. 设 w 为 G_{15} 中的 8 阶元，则 $|C_{G_{15}}(w)|=8$，所以 $|w^{G_{15}}|=\frac{8p}{8}=p$. 所以 G_{15} 中 $4p$ 个 8 阶元构成 4 个共轭类，G_{15} 的中心为 1，自成一类.

综上所述，

$$k(G_{15})=1+1+2+4+\frac{p-1}{8}=8+\frac{p-1}{8}$$

同理可得 G_{13}，G_{14} 的共轭类个数.

步骤 5　计算 G_{16}，G_{17}，G_{19} 的共轭类个数.

以 G_{16} 为例，令 $A=\langle a,b,c\rangle$，A 为 G_{16} 的 Sylow-2 子群，且为初等交换群. $Z(G_{16})=1$，自成一类. 因

$$G_{16}\supseteq C_{G_{16}}(x)\supseteq A\qquad \forall x\in A-Z$$

且 $|G_{16}:A|$ 为素数，$C_{G_{16}}(b)\neq G_{16}$，故：

$$|C_{G_{16}}(x)|=|A|=8\qquad |x^{G_{16}}|=\frac{56}{8}=7$$

则 $A-Z$ 中的 7 个元组成一个共轭类. 又由文献[14]的第三 Sylow 定理可知 G_{16} 的 Sylow-7 子群的个数为 8. 从而 G_{16} 中有 48 个 7 阶元，此外无其它阶元，令 y 为其任一 7 阶元，则：

$$C_{G_{16}}(y)\supseteq\langle y\rangle\qquad |C_{G_{16}}(y)|=7\qquad |y^{G_{16}}|=\frac{56}{7}=8$$

故 7 阶元有 6 个共轭类.

综上所述，

$$k(G_{16})=1+1+6=8$$

同理可得 G_{17}，G_{19} 的共轭类个数.

定理 2　设 G 是 2^3p 阶群，则：

(i) 当 $p=3$ 时，$k(G)\geqslant 5$，且 $k(G)=5$ 当且仅当 $G\cong G_{18}$；

当 $p=7$ 时，$k(G)\geqslant 8$，且 $k(G)=8$ 当且仅当 $G\cong G_{16}$.

(ii) 当 $p\neq 3,7$ 时，

若 $p\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$，则 $k(G)\geqslant 2p+3$，且 $k(G)=2p+3$ 当且仅当 $G\cong G_3$，G_4；

若 $p\equiv 5(\mathrm{mod}\ 8)$，则 $k(G)\geqslant\frac{p-1}{2}+7$，且 $k(G)=\frac{p-1}{2}+7$ 当且仅当 $G\cong G_{13}$；

若 $p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 8)$，则 $k(G)\geqslant\frac{p-1}{8}+8$，且 $k(G)=\frac{p-1}{8}+8$ 当且仅当 $G\cong G_{15}$.

证　(i) $p=3$ 时，24 阶群有 15 个，即 G_1，G_2，…，G_{12}，G_{17}，G_{18}，G_{19}. 又由定理 1 知，对 24 阶群 G 有 $k(G)\geqslant 5$，且 $k(G)=5$ 当且仅当 $G\cong G_{18}$.

$p=7$ 时，56 阶群有 13 个，即 G_1，G_2，…，G_{12}，G_{16}. 又由定理 1 知，对 56 阶群 G 有 $k(G)\geqslant 8$，且 $k(G)=8$ 当且仅当 $G\cong G_{16}$.

(ii) $p\neq 3,7$ 时，考虑 $p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ 和 $p\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$. 因 $p=4n+1$，则当 n 为偶数时，$p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 8)$；当 n 为奇数时，$p\equiv 5(\mathrm{mod}\ 8)$. 故分以下几种情形：

若 $p\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$，则 $8p$ 阶群共有 12 个，即 G_1，G_2，…，G_{12}，于是对 $8p(p\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4))$ 阶群 G，有 $k(G)\geqslant 2p+3$，且 $k(G)=2p+3$ 当且仅当 $G\cong G_3$，G_4.

若 $p\equiv 5(\mathrm{mod}\ 8)$，则 $8p$ 阶群共有 14 个，即 G_1，G_2，…，G_{14}，于是对 $8p(p\equiv 5(\mathrm{mod}\ 8))$ 阶群 G，有

$k(G) \geqslant \frac{p-1}{2}+7$，且 $k(G)=\frac{p-1}{2}+7$ 当且仅当 $G \cong G_{13}$.

若 $p \equiv 1(\bmod 8)$，则 $8p$ 阶群共有15个，即 $G_1, G_2, \cdots, G_{15}$，于是对 $8p(p \equiv 1(\bmod 8))$ 阶群 G，有 $k(G) \geqslant \frac{p-1}{8}+8$，且 $k(G)=\frac{p-1}{8}+8$ 当且仅当 $G \cong G_{15}$.

参考文献：

[1] 李　月，曹洪平. 交错群 A_5，A_6，A_7 的新刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(2)：47－50.

[2] 孙晓敏，曹洪平. 用元素阶的和刻画 $2pq$ 阶群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(12)：56－60.

[3] 朱伟华，游兴中. 共轭类的数量性质与有限群结构 [D]. 长沙：长沙理工大学，2013.

[4] 李美艳，游兴中. 非中心元的共轭类较少的有限群 [J]. 吉首大学学报(自然科学版)，2014，35(4)：13－17.

[5] 张远达. 有限群构造(下册) [M]. 北京：科学出版社，1982：687－713.

[6] LOPEZ A V，VERA-LOPEZ J. Classification of Finite Groups According to the Number of Conjugacy Classes [J]. Israel J Math，1985，51(4)：305－338.

[7] LOPEZ A V，VERA-LOPEZ J. Classification of Finite Groups According to the Number of Conjugacy Classes II [J]. Israel J Math，1986，56(2)：188－221.

[8] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 北京：科学出版社，1999.

[9] ISAACS I M. Character Theory of Finite Groups [J]. Walter de Gruyter，1998，27(2)：515－524.

[10] 薛海波，吕　恒. 非交换子群具有极小中心化子的有限 p-群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(8)：12－15.

[11] 苑金枝，曹洪平. 2^3p 阶群的一个新刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2008，30(4)：7－10.

[12] KURZWEIL H，STELLMACHER B. 有限群论导引 [M]. 施武杰，李士恒，译. 北京：科学出版社，2009：62－64.

[13] 曲海鹏，陈迎光. 9中心化子群的结构 [J]. 数学研究，2010，43(1)：89－97.

[14] 陈重穆. 有限群论基础 [M]. 重庆：重庆出版社，1982：46－49.

The Number of Conjugate Classes and the Structure of the Group with Order 2^3p

LIAO Jun-mei，　CAO Hong-ping

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In the study of finite groups，the order of a group and the number of conjugate classes of the elements of a group are two very important quantities of the group. These two quantities have a great influence on the structure and properties of the group. Many finite groups can be determined completely by these two quantities. For groups of order 2^3p (p is an odd prime)，the number of conjugate classes of 19 kinds of groups of order 2^3p is determined by using their generators and generative relations as well as the knowledge of number theory and group theory. The number of conjugate classes of the 19 kinds of groups of order 2^3p is further compared，and the minimum number of conjugate classes of groups of order 2^3p is obtained. According to the minimum number of conjugate classes and the order of groups of order 2^3p，the number of conjugate classes of 19 groups of order 2^3p is compared by using the classification of groups of order 2^3p，and the concrete structure of groups of order 2^3p with the minimum number of conjugate classes is determined.

Key words：conjugate class number；minimum value；group structure

责任编辑　廖　坤
崔玉洁