第 40 卷第 12 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2018年12月
Vol. 40　No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec.　2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.12.014

用不可补子群个数刻画单群 A_5 ①

黄　宇，　宋科研

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：设 G 是有限群，$H \leqslant G$. 如果 G 中存在子群 $K \leqslant G$，满足 $G = KH$，且 $H \cap K = 1$，那么称 H 在 G 中可补. 研究子群的可补性对有限群结构和性质的影响是群论研究中十分重要的课题. 给出了 5 次交错群 A_5 的一个新刻画，即 60 阶群 $G \cong A_5$ 的充分必要条件是 G 中只有 46 个不可补子群.

关　键　词：不可补子群；5 次交错群；Sylow 子群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673－9868(2018)12－0090－04

本文所讨论的群都是有限群，其他符号都是标准的(见文献[1－2]).

设 G 是有限群，$H \leqslant G$. 如果 G 中存在子群 $K \leqslant G$，满足 $G=KH$，且 $H \cap K=1$，那么称 H 在 G 中可补. 特别地，若 G 中每个子群均在 G 中可补，则称 G 是可补的. 研究子群的可补性对有限群的结构和性质的影响是群论研究中十分重要的课题. 文献[3]证明了：G 可解当且仅当 G 的所有 Sylow 子群在 G 中可补. 后来，更多的学者做了相关的研究. 文献[4]证明了：G 可解当且仅当 G 的 Sylow 2-子群和 Sylow 3-子群在 G 中可补. 文献[5]证明了：G 可解当且仅当 G 的任意奇阶 Sylow 子群在 G 中可补. 文献[6]证明了：G 可解当且仅当 G 的 Sylow 3-子群、Sylow 5-子群和 Sylow 7-子群在 G 中可补；若 G 的 3 阶子群、5 阶子群在 G 中可补，则 G 可解. 由此我们可以发现，G 的某些子群可补对其可解性具有决定性作用. 自然而然，我们希望研究 G 的某些子群不可补的情况. 于是，我们得到了：设 G 为 60 阶群，其 Sylow 2-子群为 4 阶初等交换 2-群；若存在 G 的一个 2 阶子群在 G 中不可补，则 $G \cong A_5$ 或 $G \cong A_4 \times C_5$. 我们都知道，A_5 是阶最小的单群，并且它具有许多有趣的性质. 目前，对 A_5 的刻画有很多. 例如，文献[7]证明了：若 G 为非可解质元群，则 $G \cong A_5$. 文献[8]证明了：$G \cong A_5$ 当且仅当 $\pi_e(G)=\{1, 2, 3, 5\}$，其中 $\pi_e(G)$ 表示群 G 中元素阶的集合. 文献[9]用初等方法证明了：$G \cong A_5$ 当且仅当 $\pi_e(G)=\{1, p, q, r\}$，其中 p, q, r 为互不相同的素数. 文献[10]证明了：$G \cong A_5$ 当且仅当 $m(G)=5$，$\psi(G)=211$，其中 $m(G)$ 表示群 G 中元的最高阶，$\psi(G)$ 表示群 G 中所有元素阶之和. 文献[11]证明了：当群 G 的阶、同阶类类数与 A_5 相同时 G 与 A_5 同构. 文献[12]利用非正规子群的共轭类类数为 3 的有限幂零群的结构研究有限群的结构. 在本文中，我们将利用不可补子群的个数去刻画 A_5. 最后，我们得到了单群 A_5 的一个新刻画：60 阶群 $G \cong A_5$ 的充分必要条件是 G 中只有 46 个不可补子群.

引理 1　设 G 是 30 阶群，则 G 中一定有 15 阶元.

证　令 M 是 G 的极小正规子群，由于 30 阶群必为可解群，则 $|M|=2,3,5$. 若 $|M|=5$，则 $|G/M|=6$. 于是存在 K/M，使得 $K/M \leqslant G/M$，且阶为 3，则 K 为 G 的 15 阶循环子群，因此 G 中有 15 阶元. 若 $|M|=3$，同理可证. 若 $|M|=2$，则 $|G/M|=15$. 令 $G/M=\langle xM\rangle$，$x \in G$，则 $x^{15} \in M$，因此 G 中有 15 阶元.

---

① 收稿日期：2018－05－13
基金项目：国家自然科学基金项目(11501465).
作者简介：黄　宇(1993－)，女，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：宋科研，讲师.

引理2 设G是60阶群，若G中有30阶子群，则$n_3(G)=n_5(G)=1$，其中$n_p(G)$表示群G中Sylow p-子群的个数.

证 由假设，令$K\leqslant G$，$|K|=30$，则$K\trianglelefteq G$. 令：

$$P_3\in \mathrm{Syl}_3(K)\subseteq \mathrm{Syl}_3(G)$$

$$P_5\in \mathrm{Syl}_5(K)\subseteq \mathrm{Syl}_5(G)$$

由引理1知：

$$P_3 \ \mathrm{char}\ K\trianglelefteq G \qquad P_5\ \mathrm{char}\ K\trianglelefteq G$$

因此$P_3\trianglelefteq G$，$P_5\trianglelefteq G$，即$n_3(G)=n_5(G)=1$.

为了刻画单群A_5，我们需要证明下面这些结论：

引理3 设G是有限群，若G有p^n阶元，其中p为素数，$n\geqslant 2$且为整数，则一定存在p阶子群在G中不可补.

证 可补性对子群遗传，但是p^n阶循环群不可补，因此结论成立.

命题1 设G是有限群，若G的任一d阶子群在G中可补($d=2,3,4$)，则G可解.

证 由假设，令：

$$H\leqslant G \qquad |H|=d$$

存在$K\leqslant G$，有$G=HK$，且：

$$H\cap K=1 \qquad |G:K|=|H|=d\leqslant 4$$

于是$G/K_G\lesssim S_4$，因此G/K_G可解. 又因$K_G\leqslant K$可解，故G可解.

由引理3，可得到如下推论：

推论1 设G是有限群，若G的2阶子群在G中可补，则G的Sylow 2-子群为初等交换2-群，Hall $2'$-子群为G的正规子群.

证 易知G中无4阶元，故G的Sylow 2-子群必为初等交换2-群. 由假设，令$|H|=2$，存在$K\leqslant G$，使得：

$$G=HK \qquad H\cap K=1 \qquad |G:K|=|H|=2$$

故$K\trianglelefteq G$. 由可补性是子群遗传的，于是K的Hall $2'$-子群$Q\trianglelefteq K$，从而$Q\ \mathrm{char}\ K$. 显然，Q为G的Hall $2'$-子群，因此$Q\trianglelefteq G$.

由命题1知，若G的2阶子群在G中可补，则G可解. 但是，一般来说，若G的每个2阶子群在G中不可补，还无法确定G的可解性. 例如单群A_6和可解群A_4，显然这两个群中每个2阶子群都不可补. 下面我们将以60阶群G为研究对象，刻画其在上述条件下的结构. 由引理3知，若G的Sylow 2-子群的方指数不小于4，则存在2阶子群在G中不可补. 因此，我们只需讨论G的Sylow 2-子群的方指数等于2的情况.

定理1 设G是60阶群，其Sylow 2-子群为4阶初等交换2-群. 若G的2阶子群在G中不可补，则$G\cong A_5$或$G\cong A_4\times C_5$.

证 由假设知，G中无30阶子群. 若G不可解，则$G\cong A_5$. 假设G可解，首先说明G一定有15阶元. 令N是G的极小正规子群，由G可解，则N的阶为2,3,4或5. 同引理1的证明，易得G有15阶元.

令：

$$|b|=15 \qquad P_2\in \mathrm{Syl}_2(G)$$

于是$G=P_2\langle b\rangle$. 由于$\langle b\rangle\leqslant C_G(b)$，故$C_G(b)$的阶为15,30或60. 但前面我们已经说明$G$中无30阶子群，于是只需考虑$C_G(b)$的阶为15或60. 若$|C_G(b)|=60$，有$\langle b\rangle\leqslant Z(G)$，从而

$$G=P_2\langle b\rangle=P_2\times\langle b\rangle$$

于是G中有30阶子群，矛盾，故$|C_G(b)|=15$. 同理可证$|N_G(\langle b\rangle)|=15$. 令$c=b^3$，$d=b^5$，则：

$$\langle b\rangle=\langle c\rangle\times\langle d\rangle \qquad \langle b\rangle\leqslant C_G(c) \qquad \langle b\rangle\leqslant C_G(d)$$

同样对d,c可以做以上考虑.

若$|C_G(d)|=60$，则：

$$\langle d\rangle\leqslant Z(G) \qquad |G/\langle d\rangle|=20$$

由 Sylow 定理，知 $G/\langle d\rangle$ 的 Sylow 5 -子群只有一个，设为 $K/\langle d\rangle$，则 K 是 G 的 15 阶循环子群，$K \trianglelefteq G$. 因此

$$G=P_2K=(C_2\times C_2)K$$

G 中存在 2 阶子群可补，矛盾，故 $|C_G(d)|=15$，即 $\langle b\rangle=C_G(\langle d\rangle)$. 根据引理 1，同理可证 $\langle b\rangle=N_G(\langle d\rangle)$.

下面考虑 $C_G(c)$. 若 $|C_G(c)|=60$，则：

$$\langle c\rangle\leqslant Z(G)\qquad |G/\langle c\rangle|=12$$

若 $G/\langle c\rangle$ 的 3 阶子群正规，从而 G 有 15 阶正规子群，于是 G 中有 30 阶子群，矛盾. 因此 $G/\langle c\rangle$ 中有 4 个 3 阶子群，有 8 个 3 阶元，故 $G/\langle c\rangle$ 的 Sylow 2 -子群只有一个. 令 $\overline{G}=G/\langle c\rangle$，则 $\overline{G}=\overline{P_2}\langle\overline{b}\rangle=\overline{P_2}\langle\overline{d}\rangle$. 因此 P_2 char $P_2\langle c\rangle\trianglelefteq G$，则：

$$P_2\trianglelefteq G\qquad G=(P_2\rtimes\langle d\rangle)\times\langle c\rangle$$

令：

$$L=P_2\rtimes\langle d\rangle\qquad |L|=12\qquad |L:\langle d\rangle|=4$$

考虑 L 作用在 $\Omega=\{\langle d\rangle x\mid x\in L\}$ 上，由于作用的核包含在 $\langle d\rangle$ 中且在 L 中正规，因此核一定为 1，故 $L\lesssim S_4$. 因此 $L\cong A_4$，$G\cong A_4\times C_5$.

若 $|C_G(c)|=15$，则 $C_G(c)=\langle b\rangle$. 由于 $C_G(d)=\langle b\rangle$，因此 $\pi_e(G)=\{1,2,3,5,15\}$，其中 15 阶元的个数为 $\varphi(15)|G:N_G(\langle b\rangle)|=32$. 由 Sylow 定理，易得 $\langle c\rangle\trianglelefteq G$. 因为 $G=P_2\langle b\rangle$，所以

$$N_G(\langle c\rangle)/C_G(\langle c\rangle)\cong P_2=C_2\times C_2$$

但 $N_G(\langle c\rangle)/C_G(\langle c\rangle)\lesssim \mathrm{Aut}\langle c\rangle$ 为循环群，矛盾.

由文献[13]，我们易得 A_5 中恰有 46 个不可补子群，下面将利用群 G 的不可补子群数来刻画单群.

定理 2　60 阶群 $G\cong A_5$ 的充分必要条件是 G 中只有 46 个不可补子群.

证　只需证明充分性.

首先说明 G 的 Sylow 2 -子群为 4 阶初等交换 2 -群. 若 G 的 Sylow 2 -子群为 4 阶循环群，则 G 为亚循环群. 根据亚循环群的结构，令

$$G=\langle a\rangle\rtimes\langle b\rangle\qquad (|a|,|b|)=1$$

则 $|a|$ 为 15,5 或者 3. 由于 G 可解，则 G 的 4 阶子群、3 阶子群、5 阶子群均可补. 故只需考虑 G 的 2 阶子群、6 阶子群、10 阶子群、30 阶子群的可补性. 令 G 的不可补子群个数为 $n(G)$.

若 $|a|=15$，于是对任意子群 $H\leqslant G$，$|H|=6$，有 $a^5\in H$，$H=\langle a^5\rangle H_1$，$|H_1|=2$. 由 Sylow 定理，易得在 G 内所有 Sylow 2 -子群共轭，即所有 2 阶子群均与 $\langle b^2\rangle$ 共轭. 从而 $H_1=\langle b^2\rangle^x(x\in G)$. 因此 H 与 $\langle a^5\rangle\langle b^2\rangle$ 共轭，即 G 的 6 阶子群均共轭. 故 G 的 6 阶子群至多有 10 个. 同理，易得 G 的 10 阶子群均共轭，G 的 30 阶子群均共轭. 因此 G 中 10 阶子群至多有 6 个，G 中 30 阶子群只有 1 个. 又因为 G 中 2 阶子群至多有 15 个，所以

$$n(G)\leqslant 10+6+1+15<46$$

矛盾.

若 $|a|=3$，则 $|b|=20$. 于是 $|b^4|=5$，并且 $\langle a,b^4\rangle\trianglelefteq G$. 因此 $|ab^4|=15$，同 $|a|=15$ 的情形可证.

若 $|a|=5$，则 $|b|=12$. 于是 $|b^4|=3$，$|b^3|=4$. 若 $G/\langle a\rangle$ 有 3 阶正规子群，那么 $\langle a,b^4\rangle\trianglelefteq G$. 因此 $|ab^4|=15$，同 $|a|=15$ 的情形可证. 若 $G/\langle a\rangle$ 有 4 阶正规子群，那么 $\langle a,b^3\rangle\trianglelefteq G$. 此时 2 阶子群至多有 5 个，于是

$$n(G)\leqslant 5+5+5+5<46$$

矛盾.

下面说明 G 的 2 阶子群均不可补. 若 G 中存在 2 阶子群可补，令为 K，于是 $|K|=30$，$K\trianglelefteq G$. 由引理 1 和引理 2 知，存在 $a\in K$，$|a|=15$，并且 $\langle a\rangle\trianglelefteq G$. 设 $P_2\in \mathrm{Syl}_2(G)$，于是 $G=\langle a\rangle P_2$. 这说明 P_2 中每个 2 阶子群可补，因此 G 中 2 阶子群均可补. 下面考虑 G 的 6 阶子群 M. 由引理 2 知，G 中 3 阶子群唯一，即为 $\langle a^5\rangle$，于是 $\langle a^5\rangle\leqslant M$. 因此 G 中 6 阶子群的个数即为 $G/\langle a^5\rangle$ 中 2 阶子群的个数. 由于 $G/\langle a^5\rangle$ 中 Sylow 2 -子群至多有 5 个，因此 2 阶子群至多有 15 个，即 G 中 6 阶子群至多有 15 个. 同理可证，G 中 10

阶子群至多有9个，G 中30阶子群至多有3个，因此

$$n(G) \leqslant 15+9+3<46$$

矛盾.

于是由定理1知，$G \cong A_5$ 或 $G \cong A_4 \times C_5$. 当 $G \cong A_4 \times C_5$ 时，由于 A_4 无6阶子群，因此 G 无6阶和30阶子群. 又因为 G 的 Sylow 2-子群唯一，所以 G 中2阶子群有3个，且10阶子群至多有3个. 于是

$$n(G) \leqslant 3+3=6<46$$

矛盾. 因此 $G \cong A_5$.

参考文献：

[1] 徐明曜. 有限群导引 [M]. 2版. 北京：科学出版社，1999：162-181.

[2] 杨子胥. 近世代数 [M]. 3版. 北京：高等教育出版社，2011：29-120.

[3] HALL P. A Characteristic Property of Soluble of Groups [J]. J London Math Soc，1937，12(3)：198-200.

[4] ARAD Z，WARD M B. New Criteria for the Solvability of Finite Groups [J]. Journal Of Algebra，1982，77(1)：234-246.

[5] HELIEL A. A Note on *c*-Supplemented Subgroups of Finite Groups [J]. Communications in Algebra，2014，42(4)：1650-1656.

[6] MIAO L，TANG J P. A New Condition for Solvable Groups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2017，221(10)：2504-2510.

[7] 施武杰，杨文泽. A_5 的一个新刻划与有限质元群 [J]. 西南师范学院学报，1984(1)：36-40.

[8] 施武杰. A_5 的一个特征性质 [J]. 西南师范学院学报，1986(3)：11-14.

[9] 钱国华，施武杰. A_5 的一个特征及其初等证明 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2007，29(2)：1-4.

[10] 王华丽，周　伟，晏燕雄. 单群 A_5 的一个新刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(12)：47-50.

[11] 李　月，曹洪平. 交错群 A_5，A_6，A_7 的新刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(2)：47-50.

[12] 龚　律，褚智伟. 恰有6个非正规子群的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(12)：7-11.

[13] 包　霞，焦　艳. A_5 的一类12阶子群的构造 [J]. 西北民族大学学报(自然科学版)，2007，28(3)：11-15.

Characterizing the Simple Group A_5 by the Number of Uncomplemented Subgroups

HUANG Yu， SONG Ke-yan

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Let G be a finite group，$H \leqslant G$. If there exists a subgroup K of G such that $G=HK$ and $H \cap K=1$，then H is called complemented in G. The subgroup's complementarity on the structure and properties of finite groups is a very important topic in group theory. A new characterization of the alternating group A_5 is given，i. e.，let G be a group of order 60，$G \cong A_5$ if and only if G only has 46 uncomplemented subgroups.

Key words：uncomplemented subgroup；alternating group of degree 5；Sylow subgroup

责任编辑　廖　坤

崔玉洁