DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.12.015

模的限制内射维数[①]

宋彦辉，　梁　力

兰州交通大学 数理学院，兰州 730070

摘要：介绍并研究了限制内射模，指出 Gorenstein 内射模是限制内射模，但反之不然．利用限制内射模的分解进一步研究了经典的限制内射维数，给出了其新的计算办法．证明了强挠自由模的特征模是限制内射的．当限定环的条件，即 splf $R^{\circ}<\infty$ 时，证明了：R-模 M 是强挠自由模当且仅当特征模 M^{+} 是限制内射的．进一步，探讨了 R-模 M 的限制平坦维数和 M^{+} 的限制内射维数之间的关系．

关　键　词：限制内射模；限制内射维数；强挠自由模

中图分类号：O154.2　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2018)12-0094-06

本文中的环均指有单位元的结合环，所有的 R-模都指左 R-模(右 R-模可视为反环 R° 上的模)．关于限制同调维数，文献[1] 做了很多工作，运用导出函子定义了模 M 的限制投射、内射和平坦维数：

$\mathrm{Rpd}_R M=\sup\{i\geqslant 0\mid$ 存在内射维数有限的 R-模 T，使得 $\mathrm{Ext}_R^i(M, T)\neq 0.\}$

$\mathrm{Rid}_R M=\sup\{i\geqslant 0\mid$ 存在投射维数有限的 R-模 L，使得 $\mathrm{Ext}_R^i(L, M)\neq 0.\}$

$\mathrm{Rfd}_R M=\sup\{i\geqslant 0\mid$ 存在平坦维数有限的 R°-模 T，使得 $\mathrm{Tor}_i^R(T, M)\neq 0.\}$

文献[2] 研究了有限维数和限制平坦维数之间的关系．随后，文献[3－4] 分别研究了复形的限制投射和内射维数，并给出了一些维数的性质．对限制同调维数的进一步研究可参见文献[5－6]．受以上工作的启发，本文进一步研究模的限制内射维数．特别地，我们引入了限制内射模，并借助限制内射模的分解给出了限制内射维数新的计算办法．本文中投射、内射和平坦 R-模的类分别记为 $P(R)$，$I(R)$，$F(R)$，所有投射、内射和平坦维数有限的 R-模的类记为 $\overline{P(R)}$，$\overline{I(R)}$，$\overline{F(R)}$．

定义 1　设 M 是 R-模．如果对任意的投射维数有限的 R-模 L，都有 $\mathrm{Ext}_R^1(L, M)=0$，则称 M 是限制内射模．所有限制内射 R-模构成的类记为 $RI(R)$．

命题 1　设 M 是 R-模．则 M 是限制内射模当且仅当对任意投射维数有限的 R-模 L，任意 $i>0$，都有 $\mathrm{Ext}_R^i(L, M)=0$．

证　充分性显然成立，下证必要性．不妨设 $\mathrm{pd}_R L=m<\infty$．若 $m=0$，则结论显然成立．故设 $m>0$，则存在正合列

$$0\longrightarrow P_m\longrightarrow P_{m-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_0\longrightarrow L\longrightarrow 0$$

其中 $P_i\in P(R)$．令 $K=\mathrm{Ker}(P_0\to L)$，则有正合列

$$0\longrightarrow K\longrightarrow P_0\longrightarrow L\longrightarrow 0$$

因为 $\mathrm{pd}_R K\leqslant m-1<\infty$，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(K, M)=0$．由于 $\mathrm{Ext}_R^2(L, M)\cong\mathrm{Ext}_R^1(K, M)$，故 $\mathrm{Ext}_R^2(L, M)=0$．

① 收稿日期：2017-12-15

基金项目：国家自然科学基金项目(11761045，11561039)；兰州交通大学“百名青年优秀人才培养计划”基金资助项目；甘肃省自然科学基金项目(18JR3RA113，17JR5RA091)．

作者简介：宋彦辉(1994-)，男，硕士研究生，主要从事同调代数的研究．

通信作者：梁　力，教授．

再由数学归纳法可得,对任意的 $i>0$,$\mathrm{Ext}_R^i(L, M)=0$.

定义 2[7,定义2.1] 称 R -模 M 是 Gorenstein 内射模,如果存在一个内射 R -模的正合列

$$\cdots \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker}(I^0 \to I^1)$,并且对任意内射 R -模 E,$\mathrm{Hom}_R(E, -)$ 保持其正合. 所有 Gorenstein 内射 R -模构成的类记为 $GI(R)$.

命题 2 设 R 是环. 则 Gorenstein 内射 R -模是限制内射的,即 $GI(R) \subseteq RI(R)$.

证 设 M 是 Gorenstein 内射 R -模,下证 $M \in RI(R)$,即对任意 $L \in \overline{P(R)}$,证明 $\mathrm{Ext}_R^1(L, M)=0$. 不妨设 $\mathrm{pd}_R L = m < \infty$. 如果 $m=0$,则结论显然成立. 故设 $m>0$. 因为 $M \in GI(R)$,则存在正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow I_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中 $I_i \in I(R)$,故有

$$\mathrm{Ext}_R^1(L, M) \cong \mathrm{Ext}_R^{m+1}(L, K)=0$$

因此 $M \in RI(R)$.

以下例子说明限制内射 R -模未必是 Gorenstein 内射的.

例 1 设(R, m)是一个交换的 Artin 局部环,其中 $m^2=0$,且 R 不是 Gorenstein 环. 事实上 $R=k[x, y]/(x^2, xy, y^2)$ 即满足上述条件,其中 k 是域. 因为 R 不是 Gorenstein 环,故存在非 Gorenstein 内射的 R -模 M,但 M 是限制内射的. 事实上,若 L 是任意投射维数有限的 R -模,因为 R 是一个交换的 Artin 局部环,所以 L 是投射的,因此 $\mathrm{Ext}_R^1(L, M)=0$,即 M 是限制内射 R -模.

定义 3[8] 设 $\aleph$ 是 R -模的类. 如果 $I(R) \subseteq \aleph$,且对任意的正合列

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$

其中 $X' \in \aleph$,有 $X \in \aleph$ 当且仅当 $X'' \in \aleph$,则称 $\aleph$ 是内射可解的.

定理 1 令 R 是环,则 $RI(R)$ 是内射可解的,并且对任意的直积和直和项封闭.

证 注意到 $I(R) \subseteq RI(R)$. 令 $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ 是 R -模的正合列,其中 $M' \in RI(R)$,下证 $M \in RI(R)$ 当且仅当 $M'' \in RI(R)$. 设 $M \in RI(R)$. 对任意的 $L \in \overline{P(R)}$,有正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(L, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(L, M'') \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(L, M') \longrightarrow \cdots$$

因为 $M, M' \in RI(R)$,所以由命题 1 知

$$\mathrm{Ext}_R^1(L, M)=0=\mathrm{Ext}_R^2(L, M')$$

因此 $\mathrm{Ext}_R^1(L, M'')=0$,故 $M'' \in RI(R)$. 反之,设 $M'' \in RI(R)$,类似于上述证明可得 $M \in RI(R)$,因此 $RI(R)$ 是内射可解的.

设$\{M_i \mid i \in I\} \subseteq RI(R)$,则对任意 $L \in \overline{P(R)}$ 有 $\mathrm{Ext}_R^1(L, M_i)=0$,所以

$$\mathrm{Ext}_R^1(L, \prod M_i) \cong \prod \mathrm{Ext}_R^1(L, M_i)=0$$

因此 $\prod M_i \in RI(R)$,即 $RI(R)$ 对任意直积封闭,再由文献[8]的命题 1.4 知 $RI(R)$ 对直和项封闭.

令 M 是 R -模,则由文献[1]的定义 5.10 知,M 的限制内射维数是

$$\mathrm{Rid}_R M = \sup\{i \geqslant 0 \mid \text{存在 } L \in \overline{P(R)},\text{使得 } \mathrm{Ext}_R^i(L, M) \neq 0.\}$$

由命题 1 知,$\mathrm{Rid}_R M=0$ 当且仅当 M 是限制内射模.

下面我们借助限制内射模的分解给出其新的计算办法.

引理 1 设有 R -模的正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow 0$,其中 E 是限制内射模. 如果 M 是限制内射模,那么 C 也是限制内射模,否则 $\mathrm{Rid}_R C=\mathrm{Rid}_R M-1$.

证 若 M 是限制内射模,则由定理 1 知,C 也是限制内射模. 令 M 不是限制内射模,即 $\mathrm{Rid}_R M>0$,当 $\mathrm{Rid}_R M=\infty$ 时,由维数转移知结论成立. 不妨设 $\mathrm{Rid}_R M=n<\infty$,则存在 $L \in \overline{P(R)}$,使得

$$0 \neq \mathrm{Ext}_R^n(L, M) \cong \mathrm{Ext}_R^{n-1}(L, C)$$

所以

$$\mathrm{Rid}_R C \geqslant n-1$$

若 $\mathrm{Rid}_R C \geqslant n$,则由维数转移知 $\mathrm{Rid}_R M \geqslant n+1$,这与 $\mathrm{Rid}_R M=n$ 矛盾,因此

$$\mathrm{Rid}_R C = n-1 = \mathrm{Rid}_R M - 1$$

定理 2　设 M 是 R-模，$n \geqslant 0$ 是整数，则以下结论等价：

(i) $\mathrm{Rid}_R M \leqslant n$；

(ii) 存在 R-模的正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$，其中 E^i 是限制内射模；

(iii) 对任意的 $i > n$ 及任意的 $L \in \overline{P(R)}$，都有 $\mathrm{Ext}_R^i(L, M) = 0$；

(iv) 对任意的 $L \in \overline{P(R)}$，都有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(L, M) = 0$；

(v) 对任意正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$，其中 E^i 是限制内射 R-模，都有 $K^n = \mathrm{Ker}(E^n \longrightarrow E^{n+1})$ 是限制内射模.

证　(i)$\Longrightarrow$(ii)　设 $\mathrm{Rid}_R M \leqslant n$，对 n 进行数学归纳. 当 $n=0$ 时，M 是限制内射模，则结论显然成立. 不妨设 $n>0$，考虑正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

其中 $E^0 \in I(R)$，则由引理 1 知 $\mathrm{Rid}_R K = n-1$，再由归纳假设知，存在 R-模的正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$$

其中 E^i 是限制内射的. 因此存在 R-模的正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$$

其中 E^i 是限制内射模.

(ii)$\Longrightarrow$(iii)　令 $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$ 是 R-模的正合列，其中 E^i 是限制内射的. 由维数转移知，对任意的 $i>n$ 及任意的 $L \in \overline{P(R)}$，都有

$$\mathrm{Ext}_R^i(L, M) \cong \mathrm{Ext}_R^{i-n}(L, E^n) = 0$$

(iv)$\Longrightarrow$(v)　考虑正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$，其中 E^i 是限制内射 R-模. 令

$$K^n = \mathrm{Ker}(E^n \to E^{n+1})$$

则有正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{n-1} \longrightarrow K^n \longrightarrow 0$$

对任意的 $L \in \overline{P(R)}$，有

$$\mathrm{Ext}_R^1(L, K^n) \cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L, M) = 0$$

因此 K^n 是限制内射模.

(ii)$\Longrightarrow$(i)　令 $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$ 是 R-模的正合列，其中 E^i 是限制内射的. 对 n 进行数学归纳. 若 $n=0$，则 M 是限制内射的，结论显然成立. 不妨设 $n>0$，令 $K = \mathrm{Ker}(E^1 \to E^2)$，则有正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

和

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$$

由归纳假设得 $\mathrm{Rid}_R K \leqslant n-1$. 若 M 是限制内射模，则结论显然成立；若 M 不是限制内射模，则由引理 1 知 $\mathrm{Rid}_R M = \mathrm{Rid}_R K + 1 \leqslant n$.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) 和 (v)$\Longrightarrow$(ii) 显然成立.

推论 1　设 $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 R-模的类，则有 $\mathrm{Rid}_R\left(\prod M_\lambda\right) = \sup\{\mathrm{Rid}_R M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

证　首先证明 $\mathrm{Rid}_R\left(\prod M_\lambda\right) \leqslant \sup\{\mathrm{Rid}_R M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. 不妨设 $\sup\{\mathrm{Rid}_R M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = n < \infty$，则对任意的 $\lambda \in \Lambda$，都有 $\mathrm{Rid}_R M_\lambda \leqslant n$. 由定理 2 知，存在正合列

$$0 \longrightarrow M_\lambda \longrightarrow E_{\lambda_0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{\lambda_n} \longrightarrow 0$$

其中 $E_{\lambda_0}, \cdots, E_{\lambda_n}$ 是限制内射 R-模，故存在正合列

$$0 \longrightarrow \prod M_\lambda \longrightarrow \prod E_{\lambda_0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \prod E_{\lambda_n} \longrightarrow 0$$

由定理 1 知 $\prod E_{\lambda_0}, \cdots, \prod E_{\lambda_n}$ 是限制内射 R-模，因此 $\mathrm{Rid}_R\left(\prod M_\lambda\right) \leqslant n$.

另一方面，要证 $\sup\{\mathrm{Rid}_R M_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}\leqslant \mathrm{Rid}_R\left(\prod M_\lambda\right)$，只需证明对任意的 $\lambda\in\Lambda$，$\mathrm{Rid}_R M_\lambda\leqslant \mathrm{Rid}_R\left(\prod M_\lambda\right)$ 即可. 不妨设 $\mathrm{Rid}_R\left(\prod M_\lambda\right)=m<\infty$. 由定理 2 知对任意 $i\geqslant m$ 以及 $L\in\overline{P(R)}$，有 $\mathrm{Ext}_R^i\left(L,\prod M_\lambda\right)=0$，所以 $\mathrm{Ext}_R^i(L,M_\lambda)=0$. 再由定理 2 知 $\mathrm{Rid}_R M_\lambda\leqslant m$.

命题 3　设 R 是环，$0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$ 是 R-模的正合列. 则：

(ⅰ) 令 $n\geqslant 0$ 且 $\mathrm{Rid}_R M'\leqslant n$，则 $\mathrm{Rid}_R M\leqslant n$ 当且仅当 $\mathrm{Rid}_R M''\leqslant n$，并且有不等式 $\mathrm{Rid}_R M''\leqslant\max\{\mathrm{Rid}_R M',\mathrm{Rid}_R M\}$ 和 $\mathrm{Rid}_R M\leqslant\max\{\mathrm{Rid}_R M',\mathrm{Rid}_R M''\}$；

(ⅱ) 若 $\mathrm{Rid}_R M''>\mathrm{Rid}_R M'$ 或 $\mathrm{Rid}_R M>\mathrm{Rid}_R M'$，则 $\mathrm{Rid}_R M''=\mathrm{Rid}_R M$；

(ⅲ) $\mathrm{Rid}_R M'\leqslant 1+\max\{\mathrm{Rid}_R M'',\mathrm{Rid}_R M\}$.

证　(ⅰ)　若 $n=0$，即 $M'\in RI(R)$，则由定理 1 知，$M\in RI(R)$ 当且仅当 $M''\in RI(R)$. 设 $n>0$，由 Horseshoe 引理可得以下正合交换：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & I'_0 & \longrightarrow & I'_0\oplus I''_0 & \longrightarrow & I''_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & I'_{n-1} & \longrightarrow & I'_{n-1}\oplus I''_{n-1} & \longrightarrow & I''_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

其中 $I'_0,\cdots,I'_{n-1}$ 和 $I''_0,\cdots,I''_{n-1}$ 都是内射模. 由定理 2 知 $K'\in RI(R)$. 再由定理 1 知，$K\in RI(R)$ 当且仅当 $K''\in RI(R)$，所以 $\mathrm{Rid}_R M\leqslant n$ 当且仅当 $\mathrm{Rid}_R M''\leqslant n$.

不妨设 $m=\max\{\mathrm{Rid}_R M',\mathrm{Rid}_R M\}<\infty$. 对任意的 $L\in\overline{P(R)}$，考虑正合列

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^{m+1}(L,M)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^{m+1}(L,M'')\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^{m+2}(L,M')\longrightarrow\cdots$$

由定理 2 知

$$\mathrm{Ext}_R^{m+1}(L,M)=0=\mathrm{Ext}_R^{m+2}(L,M')$$

所以

$$\mathrm{Ext}_R^{m+1}(L,M'')=0$$

因此

$$\mathrm{Rid}_R M''\leqslant m=\max\{\mathrm{Rid}_R M',\mathrm{Rid}_R M\}$$

同理可得

$$\mathrm{Rid}_R M\leqslant\max\{\mathrm{Rid}_R M',\mathrm{Rid}_R M''\}$$

(ⅱ)　设 $\mathrm{Rid}_R M''>\mathrm{Rid}_R M'$，则由 (ⅰ) 知 $\mathrm{Rid}_R M\leqslant\mathrm{Rid}_R M''$. 若 $\mathrm{Rid}_R M<\mathrm{Rid}_R M''$，则

$$\mathrm{Rid}_R M''>\max\{\mathrm{Rid}_R M',\mathrm{Rid}_R M\}$$

这与 (ⅰ) 中事实相矛盾，所以 $\mathrm{Rid}_R M=\mathrm{Rid}_R M''$. 同理可证当 $\mathrm{Rid}_R M>\mathrm{Rid}_R M'$ 时，$\mathrm{Rid}_R M=\mathrm{Rid}_R M''$.

(iii)　不妨设 $m=\max\{\mathrm{Rid}_R M'', \mathrm{Rid}_R M\}<\infty$. 对任意的 $L\in\overline{P(R)}$，考虑正合列

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{m+1}(L, M'')\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{m+2}(L, M')\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{m+2}(L, M)\longrightarrow\cdots$$

由定理 2 知

$$\mathrm{Ext}_R^{m+1}(L, M'')=0=\mathrm{Ext}_R^{m+2}(L, M)$$

因此

$$\mathrm{Ext}_R^{m+2}(L, M')=0$$

再由定理 2 可得

$$\mathrm{Rid}_R M'\leqslant 1+m=1+\max\{\mathrm{Rid}_R M'', \mathrm{Rid}_R M\}$$

推论 2　设有 R-模的正合列 $0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$，如果 M',M,M'' 中任意两个模的限制内射维数有限，那么第三个模的限制内射维数也有限.

定义 4[9，定义5.4.2]　设 M 是 R-模，如果对任意的平坦维数有限的 R°-模 T，都有 $\mathrm{Tor}_1^R(T, M)=0$，则称 M 是强挠自由的.

对于环 R，令 $\mathrm{splf}\ R=\sup\{\mathrm{pd}_R F\mid F$ 是平坦 R-模$\}$. 若 R 是 Iwanaga-orenstein 环，则由文献[10]的命题 9.1.7 知 $\mathrm{splf}\ R<\infty$. 若环 R 的左有限投射维数有限，则由文献[11]的命题 6 知 $\mathrm{splf}\ R<\infty$. 对不变量 $\mathrm{splf}\ R$ 的进一步研究可参见文献[12].

引理 2 设 M 是 R-模，若 M 是强挠自由模，则 M 的特征模 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是限制内射 R°-模. 如果 $\mathrm{splf}\ R^\circ<\infty$，那么 M 是强挠自由模当且仅当 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是限制内射 R°-模.

证　设 M 是强挠自由模，则对任意平坦维数有限的 R°-模 T，都有 $\mathrm{Tor}_1^R(T, M)=0$. 令 L 是投射维数有限的 R°-模. 则 L 的平坦维数有限，故有

$$\mathrm{Ext}_{R^\circ}^1(L, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}_1^R(L, M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})=0$$

从而 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是限制内射 R°-模.

令 $\mathrm{splf}\ R^\circ<\infty$ 且 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是限制内射 R°-模. 对任意平坦维数有限的 R°-模 L，由条件知 L 的投射维数有限，故

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}_1^R(L, M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cong \mathrm{Ext}_{R^\circ}^1(L, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))=0$$

所以 M 是强挠自由模.

定理 3　设 M 是 R-模，则有不等式 $\mathrm{Rid}_{R^\circ}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\leqslant \mathrm{Rfd}_R M$；如果 $\mathrm{splf}\ R^\circ<\infty$，那么

$$\mathrm{Rid}_{R^\circ}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})=\mathrm{Rfd}_R M$$

证　不妨设 $\mathrm{Rfd}_R M=n<\infty$，则由文献[3]的推论 2.5 知，存在 R-模的正合列

$$\xi:0\longrightarrow F_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中 F_i 是强挠自由模. 用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作用于正合列 ξ，得到以下正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\longrightarrow\cdots\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\longrightarrow 0$$

因为 F_i 是强挠自由模，所以由引理 2 知 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是限制内射模. 因此由定理 2 可得

$$\mathrm{Rid}_{R^\circ}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\leqslant n=\mathrm{Rfd}_R M$$

如果 $\mathrm{splf}\ R^\circ<\infty$，下证 $\mathrm{Rfd}_R M\leqslant \mathrm{Rid}_{R^\circ}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. 不妨设 $\mathrm{Rid}_{R^\circ}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})=n<\infty$，考虑正合列

$$\eta:0\longrightarrow K_n\longrightarrow F_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中 F_i 是平坦模. 再用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作用于正合列 η，得到以下正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\longrightarrow\cdots\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\longrightarrow 0$$

其中 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是内射模. 注意到 $\mathrm{Rid}_{R^\circ}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})=n$，由定理 2 知 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\in RI(R)$，从而由引理 2 知 K_n 是强挠自由模. 因此再由文献[3]的推论 2.5 可得 $\mathrm{Rfd}_R M\leqslant n$.

参考文献：

[1]　CHRISTENSEN L W，FOXBY H B，FRANKILD A. Restricted Homological Dimensions and Cohen-Macaulayness [J]. Journal of Algebra，2002，251(1)：479－502.

[2] WEI J Q. Finitistic Dimension and Restricted Flat Dimension [J]. Journal of Algebra, 2008, 320(1): 116-127.
[3] LIANG L, WU D J. On the Restricted Projective Dimension of Complexes [J]. Ukrainian Mathematical Journal, 2013, 65(7): 1042-1053.
[4] WU D J, LIU Z K. On Restricted Injective Dimensions of Complexes [J]. Communications in Algebra, 2013, 41(2): 462-470.
[5] WU D J. Finitistic Dimension and Restricted Injective Dimension [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2015, 65(4): 1023-1031.
[6] WU D J, KONG F D. Restricted Homological Dimensions of Complexes [J]. Mathematical Notes, 2018, 103(5-6): 703-712.
[7] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220(1): 611-633.
[8] HOLM H. Gorenstein Homological Dimensions [J]. Journal of Pure & Applied Algebra, 2004, 189(1): 167-193.
[9] XU J Z. Flat Covers of Modules [M]. Berlin: Springer, 1996.
[10] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin: Walterde Gruyter, 2000.
[11] JENSEN C U. On the Vanishing of $\varprojlim^{(i)}$ [J]. Journal of Algebra, 1970, 15(2): 151-166.
[12] EMMANOUIL I, TALELLI O. On the Flat Length of Injective Modules [J]. Journal of the London Mathematical Society, 2011, 84(2): 408-432.

Restricted Injective Dimension of Modules

SONG Yan-hui, LIANG Li

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

Abstract: This paper introduces the conception of restricted injective module and points out that Gorenstein injective modules are restricted injective modules, but the opposite is not true. The classical restricted injective dimension is investigated by using resolutions with restricted injective modules, and some new methods are given to compute the restricted injective dimension. It is shown in the paper that M is a strongly torsion-free module and M^+ is restricted injective. If splf $R^{\circ}<\infty$, then M is a strongly torsion-free module if and only if M^+ is restricted injective. Furthermore, the relationships between the restricted flat dimension of M and the restricted injective dimension of M^+ are given.

Key words: restricted injective module; restricted injective dimension; strongly torsion-free module

责任编辑 廖 坤
崔玉洁