第 40 卷第 12 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2018年12月
Vol. 40　No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec.　2018

DOI: 10. 13718/j. cnki. xdzk. 2018. 12. 016

几类特殊图的 Mycielski 图的(2，1)-全标号①

刘 秀 丽

菏泽学院 数学与统计学院，山东 菏泽 274015

摘要：研究了与频道分配有关的一种染色问题：(p，1)-全标号．根据 Mycielski 图的构造特征，利用穷染法，给出了一种标号方法，得到了路、圈、扇和轮的 Mycielski 图的(2，1)-全标号数．(p，1)-全标号是对图的全染色的一种推广．

关　键　词：染色；(p，1)-全标号；(p，1)-全标号数；Mycielski 图

中图分类号：O157. 5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2018)12-0100-05

图的染色问题是图论的主要研究内容之一，在现实中被广泛地应用，因而逐渐成为众多学者研究的热点．近年来，一些染色问题在频率分配中有很强的应用，如泛宽度染色、$L(p，1)$-标号[1]．特别地，文献[2]给出了 G 的剖分图 $S_1(G)$ 的 $L(p，1)$-标号，也就是 G 的(p，1)-全标号[3]．Mycielski 图[4-5] 是实际应用中一种重要的图，一些学者对一些特殊图的 Mycielski 图的染色问题进行了研究[5-8]．本文讨论了路、圈、扇和轮的 Mycielski 图的(2，1)-全标号，根据路、圈、扇和轮的 Mycielski 图的结构特征，给出了一种标号方法，得到了它们的(2，1)-全标号数．

本文所讨论的图均为简单、有限图．文中未加说明的记号和术语参见文献[4，9]．

定理 1　设 P_n 表示阶为 $n(n \geqslant 3)$ 的路，则有

$$\lambda_2^T(M(P_n)) = \begin{cases} 5 & n=3 \\ n+1 & n \geqslant 4 \end{cases}$$

证　情形 1　$n=3$.

由图 $M(P_3)$ 的结构知 $\Delta(M(P_3))=4$，所以由文献[3]的推论 4，有

$$\lambda_2^T(M(P_3)) \geqslant 5$$

为了证明

$$\lambda_2^T(M(P_3)) = 5$$

只需给出 $M(P_3)$ 的一个 5-(2，1)-全标号．为此，构造映射 f：

$$f(w)=2，f(v_1)=4，f(v_2)=0，f(v_3)=1，$$
$$f(v_1')=1，f(v_2')=5，f(v_3')=1，$$
$$f(v_1v_2)=2，f(v_2v_3)=5，$$
$$f(v_1v_2')=1，f(v_2v_1')=3，f(v_2v_3')=4，f(v_3v_2')=3，$$
$$f(wv_1')=4，f(wv_2')=0，f(wv_3')=5.$$

由文献[3]的定义知，f 是 $M(P_3)$ 的一个正常的 5-(2，1)-全标号．所以 $\lambda_2^T(M(P_3))=5$.

---

① 收稿日期：2017-12-06

基金项目：山东省自然科学基金项目(ZR2014AM032)；山东省高校科技计划项目(J13LI02)．

作者简介：刘秀丽(1977-)，女，讲师，主要从事图论与组合优化的研究．

情形2 $n=4$.

由图 $M(P_4)$ 的结构知 $\Delta(M(P_4))=4$，所以由文献[3]的推论4，有

$$\lambda_2^T(M(P_4))\geqslant 5$$

为了证明

$$\lambda_2^T(M(P_4))=5$$

只需给出 $M(P_4)$ 的一个 5-(2，1)-全标号. 为此，构造映射 f：

$$f(w)=0，f(v_1)=2，f(v_2)=0，f(v_3)=5，f(v_4)=3，$$

$$f(v_1')=f(v_2')=f(v_3')=1，f(v_4')=4，$$

$$f(v_1v_2)=5，f(v_2v_3)=2，f(v_3v_4)=0，$$

$$f(v_1v_2')=f(v_2v_1')=4，f(v_3v_4')=1，$$

$$f(v_2v_3')=f(v_3v_2')=3，f(v_4v_3')=5，$$

$$f(wv_1')=3，f(wv_2')=5，f(wv_3')=4，f(wv_4')=2.$$

由文献[3]的定义知，f 是 $M(P_4)$ 的一个正常的 5-(2，1)-全标号. 所以 $\lambda_2^T(M(P_4))=5$.

情形3 $n\geqslant 5$.

由图 $M(P_n)$ 的结构知 $\Delta(M(P_n))=n$，所以由文献[3]的推论4，有

$$\lambda_2^T(M(P_n))\geqslant n+1$$

为了证明

$$\lambda_2^T(M(P_n))=n+1$$

只需给出 $M(P_n)$ 的一个 $(n+1)$-(2，1)-全标号. 为此，构造映射 f：

$$f(w)=n+1，f(v_i)=\begin{cases}0 & i\equiv 1(\bmod 2)\\ 1 & i\equiv 0(\bmod 2)\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$f(v_1')=2，f(v_2')=3，f(v_i')=\begin{cases}0 & i\equiv 1(\bmod 2)\\ 1 & i\equiv 0(\bmod 2)\end{cases}\qquad i=3,4,\cdots,n$$

$$f(wv_i')=i-1\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}3 & i\equiv 1(\bmod 2)\\ 4 & i\equiv 0(\bmod 2)\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n-1$$

$$f(v_iv_{i+1}')=n，f(v_{i+1}v_i')=n+1\qquad i=1,2,\cdots,n-1$$

由文献[3]的定义知，f 是 $M(P_n)$ 的一个正常的 $(n+1)$-(2，1)-全标号. 所以 $\lambda_2^T(M(P_n))=n+1$.

定理2 设 C_n 表示阶为 $n(n\geqslant 3)$ 的圈，则有

$$\lambda_2^T(M(C_n))=\begin{cases}6 & n=3,4\\ n+1 & n\geqslant 5\end{cases}$$

证 情形1 $n=3$.

由图 $M(C_3)$ 的结构知 $\Delta(M(C_3))=4$，所以由文献[3]的推论4，有

$$\lambda_2^T(M(C_3))\geqslant 5$$

首先证明 $\lambda_2^T(M(C_3))=5$ 不成立. 反证法，假设存在图 $M(C_3)$ 的一个正常的 5-(2，1)-全标号. 由文献[10]的引理8知，图 $M(C_3)$ 的最大度点 v_i 只能标0或5. 由图 $M(C_3)$ 的结构易知，最大度点 v_i 生成的子图中包含三角形，而三角形的顶点色数为3，所以0和5无法完成对最大度点 v_i 的全标号，矛盾. 所以 $\lambda_2^T(M(C_3))\geqslant 6$.

为了证明 $\lambda_2^T(M(C_3))=6$，只需给出 $M(C_3)$ 的一个 6-(2，1)-全标号. 为此，构造映射 f：

$$f(w)=4，f(v_1)=0，f(v_2)=1，f(v_3)=4，f(v_1')=5，f(v_2')=2，f(v_3')=6，$$

$$f(v_1v_2)=5，f(v_2v_3)=6，f(v_3v_1)=2，f(v_1v_2')=4，f(v_2v_1')=3，f(v_2v_3')=4，$$

$$f(v_3v_2')=0，f(v_3v_1')=1，f(v_1v_3')=3，f(wv_1')=2，f(wv_2')=6，f(wv_3')=0.$$

由文献[3]的定义知，f 是 $M(C_3)$ 的一个正常的 6-(2，1)-全标号，所以

$$\lambda_2^T(M(P_3))=6$$

情形 2　$n=4$.

由图 $M(C_4)$ 的结构知 $\Delta(M(C_4))=4$，所以由文献[3]的推论 4，有

$$\lambda_2^T(M(C_4))\geqslant 5$$

首先证明 $\lambda_2^T(M(C_4))=5$ 不成立. 反证法，假设存在一个映射 f 是图 $M(C_3)$ 的一个正常的 5-(2，1)-全标号. 由文献[10]的引理 8 知，图 $M(C_4)$ 的最大度点 v_1,v_2,v_3,v_4 只能标 0 或 5. 不妨令 $f(v_1)=f(v_3)=0$，$f(v_2)=f(v_4)=5$，则边 $v_1v_2,v_2v_3,v_3v_4,v_4v_1$ 只能标 2 和 3，不妨令 $f(v_1v_2)=f(v_3v_4)=2$，$f(v_2v_3)=f(v_4v_1)=3$. 则边 $v_1v_2',v_1v_4',v_3v_2',v_3v_4'$ 只能标 0 和 1，边 $v_2v_1',v_2v_3',v_4v_3',v_4v_1'$ 只能标 4 和 5. 又因为 w 也为最大度点，所以 $f(w)=0$ 或 $f(w)=5$.

若 $f(w)=0$，则边 wv_1',wv_2',wv_3',wv_4' 只能标 2,3,4,5，则点 v_1',v_2',v_3',v_4' 不能按(2，1)-全标号的定义给出标号，矛盾.

若 $f(w)=5$，则边 wv_1',wv_2',wv_3',wv_4' 只能标 0,1,2,3，则点 v_1',v_2',v_3',v_4' 不能按(2，1)-全标号的定义给出标号，矛盾.

同理，其他的标号情况也得出矛盾. 所以 $\lambda_2^T(M(C_4))\geqslant 6$.

为了证明 $\lambda_2^T(M(C_4))=6$，只需给出 $M(C_4)$ 的一个 6-(2，1)-全标号. 为此，构造映射 f：

$$f(w)=6,\ f(v_1)=f(v_3)=0,\ f(v_2)=f(v_4)=1,$$
$$f(v_1')=f(v_3')=0,\ f(v_2')=1,\ f(v_4')=3,$$
$$f(v_1v_2)=f(v_3v_4)=3,\ f(v_2v_3)=f(v_4v_1)=4,$$
$$f(v_1v_2')=f(v_2v_3')=f(v_3v_4')=f(v_4v_1')=5,$$
$$f(v_2v_1')=f(v_3v_2')=f(v_4v_3')=f(v_1v_4')=6,$$
$$f(wv_1')=2,\ f(wv_2')=3,\ f(wv_3')=4,\ f(wv_4')=1.$$

由文献[3]的定义知，f 是 $M(C_4)$ 的一个正常的 6-(2，1)-全标号. 所以 $\lambda_2^T(M(P_4))=6$.

情形 3　$n\geqslant 5$.

由图 $M(C_n)$ 的结构知 $\Delta(M(C_n))=n$，所以由文献[3]的推论 4，有

$$\lambda_2^T(M(C_n))\geqslant n+1$$

为了证明

$$\lambda_2^T(M(C_n))=n+1$$

下面只需给出 $M(C_n)$ 的一个$(n+1)$-(2，1)-全标号. 为此，构造映射 f：

(i) 当 $n\equiv 0(\bmod 2)$ 时，

$$f(w)=n+1,\ f(v_i)=\begin{cases}0 & i\equiv 1(\bmod 2)\\ 1 & i\equiv 0(\bmod 2)\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$f(v_1')=2,\ f(v_2')=3,\ f(v_i')=\begin{cases}0 & i\equiv 1(\bmod 2)\\ 1 & i\equiv 0(\bmod 2)\end{cases}\qquad i=3,4,\cdots,n$$

$$f(wv_i')=i-1\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}3 & i\equiv 1(\bmod 2)\\ 4 & i\equiv 0(\bmod 2)\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n,i+1(\bmod n)$$

$$f(v_iv_{i+1}')=n,\ f(v_{i+1}v_i')=n+1\qquad i=1,2,\cdots,n,i+1(\bmod n)$$

(ii) 当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 时，

$$f(w)=n+1,\ f(v_n)=2,\ f(v_i)=\begin{cases}0 & i\equiv 1(\bmod 2)\\ 1 & i\equiv 0(\bmod 2)\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n-1$$

$$f(v_1')=3,\ f(v_2')=2,\ f(v_i')=i-3\qquad i=3,4,\cdots,n$$

$f(wv_1')=1$，$f(wv_2')=0$，$f(wv_i')=i-1 \qquad i=3,4,\cdots,n$

$f(v_nv_1)=n+1$，$f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}3 & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\\ 4 & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,n-1$

$f(v_1v_2')=n-1$，$f(v_nv_1')=0$，$f(v_iv_{i+1}')=n+1 \qquad i=2,3,\cdots,n-1$

$f(v_{i+1}v_i')=n \qquad i=1,2,\cdots,n,i+1(\mathrm{mod}\ n)$

由文献[3]的定义知，f 是 $M(C_n)$ 的一个正常的 $(n+1)$-(2，1)-全标号. 所以 $\lambda_2^T(M(C_n))=n+1$.

定理3 设 F_n 表示阶为 $n+1(n\geqslant 3)$ 的扇，则有

$$\lambda_2^T(M(F_n))=2n+1.$$

证 不妨设 $V(F_n)=\{v_0,v_1,v_2,\cdots,v_n\}$.

情形1 $n=3$.

由图 $M(F_3)$ 的结构知 $\Delta(M(F_3))=6$，所以由文献[3]的推论4，有

$$\lambda_2^T(M(F_3))\geqslant 7$$

为了证明 $\lambda_2^T(M(F_3))=7$，只需给出 $M(F_3)$ 的一个 7-(2，1)-全标号. 为此，构造映射 f：

$f(w)=0$，$f(v_0)=0$，$f(v_1)=4$，$f(v_2)=7$，$f(v_3)=6$，

$f(v_0')=3$，$f(v_1')=1$，$f(v_2')=3$，$f(v_3')=3$，

$f(v_0v_1)=2$，$f(v_0v_2)=3$，$f(v_0v_3)=4$，$f(v_1v_2)=0$，$f(v_2v_3)=2$，

$f(v_0v_1')=5$，$f(v_0v_2')=6$，$f(v_0v_3')=7$，$f(v_1v_0')=6$，$f(v_2v_0')=1$，$f(v_3v_0')=0$，

$f(v_1v_2')=7$，$f(v_2v_3')=5$，$f(v_2v_1')=4$，$f(v_3v_2')=1$，

$f(wv_1')=3$，$f(wv_2')=5$，$f(wv_3')=6$，$f(wv_0')=7$.

由文献[3]的定义知，f 是 $M(F_3)$ 的一个正常的 7-(2，1)-全标号. 所以 $\lambda_2^T(MF_3))=7$.

情形2 $n\geqslant 4$.

由图 $M(F_n)$ 的结构知 $\Delta(M(F_n))=2n$，所以由文献[3]的推论4，有

$$\lambda_2^T(M(F_n))\geqslant 2n+1$$

为了证明

$$\lambda_2^T(M(F_n))=2n+1$$

只需给出 $M(F_n)$ 的一个 $(2n+1)$-(2，1)-全标号. 为此，构造映射 f：

$f(v_0)=f(v_0')=0$，$f(w)=2n+1$，$f(v_i)=f(v_i')=i+3 \qquad i=1,2,\cdots,n$

$f(v_0v_i)=i+1$，$f(v_0v_i')=f(v_iv_0')=i+n+1 \qquad i=1,2,\cdots,n$

$f(v_iv_{i+1})=\begin{cases}0 & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\\ 1 & i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,n-1$

$f(v_1v_2')=f(v_2v_1')=2n+1$，$f(v_iv_{i+1}')=f(v_{i+1}v_i')=i \qquad i=2,3,\cdots,n-1$

$f(wv_0')=2$，$f(wv_1')=0$，$f(wv_i')=i+1 \qquad i=2,3,\cdots,n$

由文献[3]的定义知，f 是图 $M(F_n)$ 的一个正常的 $(2n+1)$-(2，1)-全标号. 所以 $\lambda_2^T(M(F_n))=2n+1$.

定理4 设 W_n 表示阶为 $n+1(n\geqslant 4)$ 的轮，则有

$$\lambda_2^T(M(W_n))=2n+1$$

证 不妨设 $V(W_n)=\{v_0,v_1,v_2,\cdots,v_n\}$. 由图 $M(W_n)$ 的结构知 $\Delta(M(W_n))=2n$，所以由文献[3]的推论4，有

$$\lambda_2^T(M(W_n))\geqslant 2n+1$$

为了证明

$$\lambda_2^T(M(W_n))=2n+1$$

只需给出 $M(W_n)$ 的一个 $(2n+1)$-(2，1)-全标号. 为此，构造映射 f：

(1) 当 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 时，

$$f(v_n v_1)=1,\ f(v_1 v_2)=2n,\ f(v_1 v_n')=0,\ f(v_n v_1')=2$$

(2) 当 $n\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ 时，

$$f(v_n v_1)=0,\ f(v_1 v_2)=2n,\ f(v_1 v_n')=1,\ f(v_n v_1')=2$$

其他点和边的标号同定理 3. 由文献[3]的定义知，f 是 $M(W_n)$ 的一个正常的 $(2n+1)$-(2，1)-全标号. 所以

$$\lambda_2^T(M(W_n))=2n+1$$

参考文献：

[1] GRIGGS J R, YEH R K. Labelling Graphs with a Condition at Distance Two [J]. SIAM J Discrete Math, 1992, 5(4): 586-595.

[2] WHITTLESEY M A, GEORGES J P, MAURO D W. On the λ-Number of Q_n and Related Graphs [J]. SIAM J Discrete Mathematics, 1995, 8(4): 499-506.

[3] HAVET F, YU M L. (p, 1)-Total Labelling of Graphs [J]. Discrete Math, 2008, 308(4): 496-513.

[4] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. London: Macmillan Press Ltd, 1976.

[5] CHANG G J, HUANG L L, ZHU X D. Circular Chromatic Number of Mycielski's Graphs [J]. Discrete Math, 1999, 205(1-3): 23-37.

[6] LIU H M. Circular Chromatic Number for Mycielski Graphs [J]. J of Math (PRC), 2006, 26(3): 255-260.

[7] CHEN X E, ZHANG Z F, YAN J Z, et al. Adjacent-Vertex-Distinguishing Total Chromatic Numbers on Mycielski's Graphs of Several Kinds of Particular Graphs [J]. Jorunal of Lanzhou University (Natural Science), 2005, 41(2): 117-122.

[8] 刘秀丽. 若干 Mycielski 图的邻点可区别 V-全染色 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(12): 12-16.

[9] BOLLOBAS B. Modern Graph Theory [M]. New York: Spring-Verlag, 1998.

[10] CHEN D, WANG W F. (2, 1)-Total Labelling of Outerplanar Graphs [J]. Discrete Applied Math, 2007, 155(18): 2585-2593.

(2，1)-Total Labelling on Mycielski's Graphs of Several Kinds of Particular Graphs

LIU Xiu-li

School of Mathematics and Statistics, Heze University, Heze Shandong 274015, China

Abstract: A coloring problem (p, 1)-total labelling of some graphs, which is related to frequency assignment, is studied. By using the eternal coloring method, a new labelling method is given according to the feature of Mycielski's graphs, and the (2, 1)-total numbers of path, cycle, fan and wheel of the graphs are obtained. And the (p, 1)-total labelling of graphs extends the total coloring of graphs.

Key words: coloring; (p, 1)-total coloring; (p, 1)-total number; Mycielski's graph

责任编辑　廖　坤
崔玉洁