第 40 卷第 12 期　　西 南 大 学 学 报 (自然科学版)　　2018年12月
Vol. 40　No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec.　2018

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.12.017

一类偏序线性代数上的 Freudenthal 谱定理①

辛　巧[1]，　穆春来[2]

1. 伊犁师范学院 数学与统计学院，新疆 伊宁 835000；2. 重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要： 利用一类特殊的偏序线性代数上的极大投影的概念，讨论了其上的 Freudenthal 谱定理，不同于以往的方法，仅仅使用了偏序和 Dedekind σ 完备的基本概念. 最后，给出了一个偏序线性代数的例子，它不是格，但是 Freudenthal 谱定理依然成立.

关　键　词： 偏序线性代数；极大和极小投影；Freudenthal 谱定理

中图分类号： O177.7　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-9868(2018)12-0105-07

关于 Riesz 空间上的 Freudenthal 谱定理的研究可以追溯至 1936 年 Freudenthal 的工作[1]. 在此基础上，关于谱定理的研究开始受到了越来越多学者的关注，此外，谱定理在微分方程理论上的应用也受到国内外很多学者的关注[2-8].

关于谱定理的研究，文献[2]讨论了 Dedekind 完备的 Riesz 空间且是交换环的代数系统上的 Freuenthal 谱定理. 本文主要讨论具有 Dedekind σ 完备的一类特殊的偏序线性代数上的 Freuenthal 谱定理. 本文将此特殊的偏序线性代数称之为函数偏序线性代数. 事实上，函数偏序线性代数是一个格，不同于文献[2]中采用的证明方法，本文仅仅利用了偏序、Dedekind σ 完备和极大、极小投影等基本概念来证明 Freudenthal 定理，没有使用格的概念和技巧，这提供了一个重要的启示，即 Freudenthal 谱定理成立的条件或许不必是格，最后的例子正是基于此，这也是本文的主要动机.

1　预备知识

假定偏序线性代数(pola) A 有乘法单位元 1，且 $1 \geqslant 0$. 把具有 Dedekind σ 完备的偏序线性代数记作 POLA，即偏序线性代数 A 满足如下性质：若 $x_n \in A$，且 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots \geqslant 0$，则 $\inf\{x_n\}$ 存在. 此外，POLA 满足 Archimedean 性质：若 $x, y \in A$，且对于所有的正整数 n 都有 $nx \leqslant y$，则 $x \leqslant 0$. 关于 POLA 中的序闭和序极限可以按照标准的方式定义[9]. 设 $I = \{y \in A: y \geqslant 1 \text{ 且 } y^{-1} \geqslant 0\}$，则 I 是一个序凸集，即对于任意的 $y, z \in I$，$x \in A$ 且 $y \leqslant x \leqslant z$，则 $x \in I$. 其证明可以参考文献[9]中的引理 6.4. 定义 $A_1 = I - I$，称 A_1 是 POLA A 的函数部分或者对角部分，关于 POLA 的对角部分 A_1 的主要性质概述如下：

定理 1[9]　集合 A_1 是交换、序闭和序凸的子 POLA，且 A_1 具有如下性质：

(i) 对于任意的 $x \in A_1$，存在元素 $e \in A_1$，使得 $0 \leqslant e \leqslant 1$，$e^2 = e$ 且 $ex \geqslant 0$，$(1-e)x \leqslant 0$；

(ii) 对于任意的 $x \in A_1$，有 $x^2 \geqslant 0$，并且若 $x^2 = 0$，则 $x = 0$，即 A_1 不存在非零的幂零元；

① 收稿日期：2017-11-26
基金项目：新疆维吾尔自治区高等学校科研计划项目(XJEDU2014S064).
作者简介：辛　巧(1981-)，男，副教授，博士，主要从事偏微分方程及其应用的研究.

(iii) 对于任意的 $u \in A_1$ 且 $u^2 = u$，有 $0 \leqslant u \leqslant 1$；

(iv) A_1 是一个子 POLA，并且关于乘法运算是连续的，即：若 $x_n \in A_1$ 且 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots \geqslant 0$，令 $x = \inf\{x_n\}$，则对于任意的 $0 \leqslant a \in A_1$，都有 $ax = \inf\{ax_n\}$ 且 $xa = \inf\{x_n a\}$.

关于 POLA 的例子可参考文献[9]. 对所有的元素 $x \in A_1$，若元素 e 满足如下性质：$0 \leqslant e^2 = e \leqslant 1$ 和 $ex \geqslant 0$，$(1-e)x \leqslant 0$，则称 e 为元素 x 的一个投影.

2　主要结论

设 A 是一个函数 POLA，对于任意的 $x \in A$，存在元素 x 的投影 u,v，使得对于元素 x 的任意投影 e，都有 $v \leqslant e \leqslant u$，称 u 是元素 x 的极大投影，v 是元素 x 的极小投影. 下面证明极大、极小投影的存在性，为此，需如下引理：

引理 1　对于任意的 $x \in A$，存在 $d \in A$，满足 $0 \leqslant d^2 = d \leqslant 1$ 且 $dx = 0$. 此外，对于 $0 \leqslant b \leqslant 1$，$b^2 = b$ 和 $bx = 0$，还有 $b \leqslant d$.

证　由定理 1 可知 $x^2 \geqslant 0$ 和 $1 \leqslant x^2 + 1$. 因此，$(1+x^2)-1$ 存在，并且

$$0 \leqslant (1+x^2)-1 \leqslant 1$$

定义

$$a = 1 - x^2(1+x^2)-1$$

因为

$$1 = (1+x^2)-1 + x^2(1+x^2)-1$$

可得 $0 \leqslant a \leqslant 1$，进而 $1 \geqslant a \geqslant a^2 \geqslant \cdots \geqslant 0$. 定义 $d = \inf\{a^n\}$，显然有 $0 \leqslant d \leqslant 1$. 由于乘法运算是连续的，可知 $d^2 = d$. 此外，

$$(1+x^2)d = \inf\{(1+x^2)a^n\} = \inf\{a^{n-1}\} = d$$

这蕴含着 $x^2 d = 0$，进而 $x^2 d = (xd)^2 = 0$，由定理 1 可知 $xd = 0$.

最后，若 $0 \leqslant b \leqslant 1$，$b^2 = b$ 和 $bx = 0$，则由定理 1 和 $ba = b$ 可知

$$bd = \inf\{ba^n\} = \inf\{b\} = b$$

这样，就有

$$d - b = d - bd = d(1-b) \geqslant 0$$

因此 $d \geqslant b$.

定理 2　对于任意的 $x \in A$，存在其极大投影 u 和极小投影 v.

证　由定理 1 可知，对于任意的 $x \in A$，存在 $e_0 \in A$ 使得：

$$0 \leqslant e_0 \leqslant 1 \qquad {e_0}^2 = e_0 \qquad e_0 x \geqslant 0 \qquad (1-e)x_0 \leqslant 0$$

事实上，$e_0 \in A$ 是元素 x 的一个投影. 此外，由引理 1 可知，存在 $d \in A$ 使得 $0 \leqslant d^2 = d \leqslant 1$ 且 $dx = 0$.

现定义 $v = e_0(1-d)$ 和 $u = (1-d)e_0 + d$. 显然，u 和 v 都是元素 x 的投影. 现假设 $e \in A$ 是元素 x 的任意一个投影，可知 $0 \leqslant e \leqslant 1$，$e^2 = e$ 且 $ex \geqslant 0$，$(1-e)x \leqslant 0$，进一步，由 $vx, ux \geqslant 0$，$(1-v)x \leqslant 0$ 和 $(1-u)x \leqslant 0$，可得

$$0 \leqslant ex(1-v) = e(1-v)x \leqslant 0$$

则

$$e(1-v)x = 0$$

类似地，可得

$$e(1-u)x = 0$$

由引理 1 可知

$$e(1-v) \leqslant d$$

此外，还有

$$ev - v = v(e-1) \leqslant 0$$

进而：

$$e \leqslant d + ev \leqslant d + v = u \qquad u(1-e) \leqslant d$$

所以 $v = u - d \leqslant eu$，据此可得 $v \leqslant eu \leqslant e \leqslant u$.

定理 2 主要确定了函数 POLA 上极大、极小投影的存在性，接下来，给出极大投影的一些主要性质：

引理 2　对于任意的 $x \in A$，u 是其极大投影，若 $0 \leqslant w^2 = w \leqslant 1$ 且 $wx \geqslant 0$，则 $u \geqslant w$.

证　令 v 是 x 的极小投影，由定理 2 可知，极大投影 $u = v + d$. 显然有

$$0 \leqslant (wx)(1-v) = w(x(1-v)) \leqslant 0$$

所以

$$w(1-v)x = 0$$

由引理 1 可知

$$w(1-v) \leqslant d$$

此外，还有

$$vw - v = v(w-1) \leqslant 0$$

则

$$w \leqslant d + vw \leqslant d + v = u$$

引理 3　对于任意的 $x, y \in A$，u_x, u_y 分别是元素 x, y 的极大投影，若 $x \geqslant y$，则 $u_x \geqslant u_y$ 且 $u_x u_y = u_y$.

证　因为

$$u_y x = u_y(y + (x-y)) = u_y y + u_y(x-y)$$

和 $u_y y \geqslant 0$，所以 $u_y x \geqslant 0$，进而，由引理 2 可知 $u_x \geqslant u_y$. 进一步，有

$$u_x u_y \geqslant u_y u_y \geqslant u_y$$

此外，

$$u_y - u_x = u_y(1-u_x) \geqslant 0$$

这意味着

$$u_y \geqslant u_x u_y$$

综上可得

$$u_y = u_x u_y$$

对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $x \in A$，用 e_λ^x 表示 $\lambda 1 - x$ 的极大投影，其中 1 表示函数 POLA A 的乘法单位元. 接下来，讨论 e_λ^x 的性质，并由此性质证明 Freudenthal 谱定理.

引理 4　设 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，对于任意的 $x \in A$，$\lambda 1 - x$ 和 $\mu 1 - x$ 的极大投影 e_λ^x 和 e_μ^x 具有如下性质：

(i) 若 $\lambda \geqslant \mu$，则 $e_\lambda^x \geqslant e_\mu^x$，$e_\lambda^x e_\mu^x = e_\mu^x$ 且 $e_\lambda^x(1-e_\mu^x) = e_\lambda^x - e_\mu^x$；

(ii) $\sup_\lambda\{e_\lambda^x\} = 1$，$\inf_\lambda\{e_\lambda^x\} = 0$；

(iii) 若 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \mu_1 \geqslant \mu_2$，则 $e_{\lambda_1}^x - e_{\lambda_2}^x \geqslant e_{\mu_1}^x - e_{\mu_2}^x$；

(iv) 若 $\lambda \geqslant \mu$，则 $\mu(e_\lambda^x - e_\mu^x) \leqslant (e_\lambda^x - e_\mu^x)x \leqslant \lambda(e_\lambda^x - e_\mu^x)$.

证　(i)　因为 $\lambda \geqslant \mu$，所以 $\lambda 1 - x \geqslant \mu 1 - x$，由引理 3 直接得到结论.

(ii)　由 (i) 的结论可知，集合 $\{e_\lambda^x : \lambda \in \mathbb{R}\}$ 是一个全序集，其上界为 1 下界为 0. 接下来证明 $\sup_\lambda\{e_\lambda^x\} = 1$，为此，设 $e' = \sup_\lambda\{e_\lambda^x\}$，下证 $e' = 1$. 首先，因为 $0 \leqslant e' \leqslant 1$ 和 $e' \geqslant e_\lambda^x$，所以，对于任意的 $x \in A$，都有

$$0 \leqslant 1 - e' \leqslant 1 - e_\lambda^x$$

此外，由定理 1 可知

$$(1-e_\lambda^x)(\lambda 1 - x) \leqslant 0$$

这意味着 $\lambda(1-e_\lambda^x) \leqslant (1-e_\lambda^x)x$. 设 e 是元素 x 的一个投影，则有：

$$x = ex + (1-e)x \qquad ex \geqslant 0 \qquad (1-e)x \leqslant 0$$

则 $x - ex \leqslant 0$，即 $x \leqslant ex$．进一步，由 $1-e_\lambda^x \geqslant 0$，则对于任意的实数 $\lambda \geqslant 0$，可以得到

$$\lambda(1-e') \leqslant \lambda(1-e_\lambda^x) \leqslant (1-e_\lambda^x)x \leqslant (1-e_\lambda^x)ex \leqslant ex$$

最后，由于函数 POLA A 具有 Archmedian 性质，可知 $1-e' \leqslant 0$，所以 $1-e'=0$，即 $e'=1$.

现在证明$\inf\{e_\lambda^x\}=0$．对于任意$\lambda \in \mathbb{R}$，都有$(\lambda 1-x)e_\lambda^x \geqslant 0$，即$\lambda e_\lambda^x \geqslant e_\lambda^x x$，这意味着$-\lambda e_\lambda^x \leqslant -e_\lambda^x x$．此外，我们还有 $-x \leqslant (e-1)x$，则

$$-\lambda e_\lambda^x \leqslant -e_\lambda^x x \leqslant (e-1)x$$

现在取 $\lambda \to -\infty$，由 Archmedian 性质，我们有 $e_\lambda^x \to 0$，所以$\inf_\lambda\{e_\lambda^x\}=0$.

(iii)　由 (i) 可知：

$$e_{\lambda_1}^x e_{\mu_1}^x = e_{\lambda_2}^x e_{\mu_1}^x = e_{\mu_1}^x \qquad e_{\lambda_1}^x e_{\mu_2}^x = e_{\lambda_2}^x e_{\mu_2}^x = e_{\mu_2}^x$$

所以

$$(e_{\lambda_1}^x - e_{\lambda_2}^x)(e_{\mu_1}^x - e_{\mu_2}^x) = e_{\lambda_1}^x e_{\mu_1}^x - e_{\lambda_1}^x e_{\mu_2}^x - e_{\lambda_2}^x e_{\mu_1}^x + e_{\lambda_2}^x e_{\mu_2}^x = 0$$

(iv)　由定理 1(i)，可知$(1-e_\mu^x)(\mu 1-x) \leqslant 0$．由引理 4(i)，可知 $e_\lambda^x e_\mu^x = e_\mu^x$ 和 $e_\lambda^x \geqslant 0$．则

$$(e_\lambda^x - e_\mu^x)(\mu 1 - x) = e_\lambda^x(1-e_\mu^x)(\mu 1 - x) \leqslant 0$$

则

$$\mu(e_\lambda^x - e_\mu^x) \leqslant (e_\lambda^x - e_\mu^x)x$$

再次利用定理 1(i)，可知 $e_\lambda^x(\lambda 1 - x) \geqslant 0$．此外，还有 $e_\lambda^x e_\mu^x = e_\mu^x$，可得

$$(e_\lambda^x - e_\mu^x)(\lambda 1 - x) = (1-e_\mu^x)e_\lambda^x(\lambda 1 - x) \geqslant 0$$

则有

$$(e_\lambda^x - e_\mu^x)x \leqslant \lambda(e_\lambda^x - e_\mu^x)$$

定理 3　设 A 是一个函数 POLA．对于实轴$(-\infty, +\infty)$的任意一个划分

$$-\infty \leftarrow \cdots \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots \to +\infty$$

任意选取 $l_n \in [\lambda_{n-1}, \lambda_n]$，令

$$\delta = \sup_n\{\lambda_n - \lambda_{n-1}\}$$

则任意的元素 $x \in A$ 可以表示成 Stieltjes 类型的积分形式，即

$$x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}e_\lambda^x = o-\lim_{\delta \to 0,\ p \to +\infty} \left(\sum_{n=-p}^{p} l_n (e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) \right)$$

证　令 $\sigma_p = e_{\lambda_p}^x - e_{\lambda_{-p-1}}^x$，由引理 4(i)，可知：

$$e_{\lambda_{p+1}}^x \geqslant e_{\lambda_p}^x \qquad e_{\lambda_{-p-1}}^x \geqslant e_{\lambda_{-p-2}}^x$$

则

$$e_{\lambda_{p+1}}^x - e_{\lambda_{-p-2}}^x \geqslant e_{\lambda_p}^x - e_{\lambda_{-p-1}}^x$$

则有 $\sigma_{p+1} \geqslant \sigma_p$．这样，部分和

$$s_p = \sum_{n=-p}^{p} (e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) = e_{\lambda_p}^x - e_{\lambda_{-p-1}}^x \leqslant 1$$

是一个正的单调递增序列，且$1=\sup_p\{s_p\}$．其上确界可以表示为$1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x)$．因为在函数 POLA A 中关于乘法运算连续，所以

$$x = o-\lim_{p \to +\infty}(s_p x) = o-\lim_{p \to +\infty}\left(\sum_{n=-p}^{p}(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x)x\right)$$

接下来，设

$$u_n = l_n(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) \qquad n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$$

由引理 3 可知

$$\lambda_{n-1}(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) \leqslant (e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x)x \leqslant \lambda_n(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) \tag{1}$$

和

$$-\lambda_n(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) \leqslant -l_n(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) \leqslant -\lambda_{n-1}(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) \tag{2}$$

(1) 式和(2) 式相加可得

$$-(\lambda_n - \lambda_{n-1})(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) \leqslant (e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x)x - u_n \leqslant (\lambda_n - \lambda_{n-1})(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) \leqslant \delta(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x)$$

其中 $\delta = \max(\lambda_n - \lambda_{n-1})$．则

$$-\delta(e_{\lambda_p}^x - e_{\lambda_{-p-1}}^x) \leqslant \sum_{n=-p}^{n=p}(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x)x - \sum_{n=-p}^{p} u_n \leqslant \delta(e_{\lambda_p}^x - e_{\lambda_{-p-1}}^x) \leqslant \delta 1$$

令 $p \to \infty$ 和 $\delta \to 0$，可得

$$x = o - \lim_{p \to +\infty}\left(\sum_{n=-p}^{p}(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x)x\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x)x$$

因此，$o - \lim\limits_{p \to +\infty}\sum\limits_{n=-p}^{p} u_n$ 存在并且其序极限为 x，即

$$x = o - \lim_{p \to +\infty}\sum_{n=-p}^{p} u_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} l_n(e_{\lambda_n}^x - e_{\lambda_{n-1}}^x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, \mathrm{d}e_\lambda^x$$

3　例　子

本节给出一个POLA的例子，它们不是格，自然也不是Riesz空间，但是Freudenthal谱定理依然成立．该类 POLA 的研究可以参考文献[10]，其在算子代数中的应用可以参考文献[11]．值得注意的是，Banach 代数可以看作是 POLA 的子代数，可以用 POLA 中的序结构研究 Banach 代数[12]，或许也可以进一步应用此来讨论 Banach 空间中广义方程的性质[13]．

例 1　设 H 是一个 Hilbert 空间，其上所有的线性算子构成一个算子代数．在 H 上定义偏序关系，即对于任意的 $v \in H$ 和 H 上的线性算子 T，$T \geqslant 0$ 等价于$(Tv, v) \geqslant 0$．事实上，正的线性算子也是自伴随算子，其证明可以参考文献[14]．该算子代数是满足 Dedekind σ 完备的偏序向量空间，但不是格．事实上，若算子 $T \geqslant 0$ 和 $T' \geqslant 0$，则 TT' 不一定是正算子，除非 T 和 T' 可交换．现在，任意给定 H 上的非平凡自伴随算子 S，考虑 S 的第二换位子空间 $C''(S)$，则 $C''(S)$ 是一个 Banach 代数，事实上也是一个 POLA，乘法单位元是其单位算子，记作 I'．现在，我们将 $C''(S)$ 嵌入到集合 $A = \{x = (T, a)\}$，其中 T 表示 $C''(S)$ 中的任意一个自伴随算子，a 是一个实数．定义集合 A 中元素的运算为点态运算，偏序定义如下：$0 = (0, 0) \leqslant x = (T, a)$ 等价于 $aI' \geqslant T \geqslant 0$，或者说对任意的 $v \in H$，都有

$$0 \leqslant (Tv, v) \geqslant a\|v\|^2$$

则偏序集 A 具有如下性质：

(i) $(A, \leqslant)$ 是一个 POLA 且具有乘法单位元 $I = (I', 1)$；

(ii) A 满足性质：若 $I \leqslant x = (T, a)$，则 x 的逆元存在，并且$-(0, 1) \leqslant x^{-1} \leqslant I$，即 A 不是一个函数 POLA；

(iii) A 不是格；

(iv) A 中的元素满足 Freudenthal 谱定理．

证　(i) 和 (ii)　根据定义容易验证，这里证明略．

(iii)　设 e_1, e_2 和 e_3 是 Hilbert 空间 H 的 3 个单位正交元，L_i 是元素 e_i 所生成的子空间$(i = 1, 2, 3)$，这样可以得到

$$H = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus L$$

定义 Hilbert 空间 H 上的 3 个正交投影 $E_i: H \longrightarrow H$，对任意的 $v \in H$，定义 $E_i(v) = (e_i, v)e_i (i = 1, 2, 3)$．容易验证 E_i 正交$(i = 1, 2, 3)$，即

$$E_1E_2=E_1E_3=E_2E_3=0$$

令

$$x=(E_1+E_2,1)$$

和

$$x=(E_1+E_3,1)$$

则 $x,y\geqslant 0$. 接下来，我们来证明 $\inf\{x,y\}$ 不存在.

若存在，可设

$$z=(T,a)=\inf\{x,y\}$$

则有 $x\geqslant z$ 和 $y\geqslant z$，进而由 A 中偏序的定义可知：

$$a\leqslant 1 \qquad 0\leqslant E_1+E_2-T \qquad 0\leqslant E_1+E_3-T \tag{3}$$

$$E_1+E_2-T\leqslant(1-a)I' \qquad E_1+E_3-T\leqslant(1-a)I' \tag{4}$$

则：

$$a\leqslant 1 \qquad E_1+E_2-(1-a)I'\leqslant T\leqslant E_1+E_2$$

$$E_1+E_3-(1-a)I'\leqslant T\leqslant E_1+E_3$$

对于任意的 $v\in H$，由伴随算子的偏序的定义可得

$$((E_1+E_2-(1-a)I')v,v)\leqslant(Tv,v)\leqslant((E_1+E_2)v,v) \tag{5}$$

和

$$((E_1+E_3-(1-a)I')v,v)\leqslant(Tv,v)\leqslant((E_1+E_3)v,v) \tag{6}$$

特别地，选取 $v\in L_2$ 且 $v\neq 0$，则可得

$$(E_1v,v)=(E_3v,v)=0$$

和

$$(E_2v,v)=(v,v)=\|v\|^2\neq 0$$

这样，由(5)式和(6)式可得

$$a\|v\|^2\leqslant(Tv,v)\leqslant\|v\|^2 \tag{7}$$

此外，由 $0\leqslant E_1+E_3-T$，对于任意的 $v\in L_2$，我们有

$$(Tv,v)\leqslant((E_1+E_3)v,v)=(0,v)=0$$

由(7)式可得

$$a\|v\|^2\leqslant(Tv,v)\leqslant 0$$

这意味着 $a\leqslant 0$. 另一方面，因为 $z=(T,a)=\inf\{x,y\}$ 和 $x,y\geqslant 0$，所以 $(0,0)$ 是 x 和 y 的下界，所以 $z\geqslant 0$. 由 A 上的偏序的定义可知，$T\leqslant aI'$. 则对于任意的 $v\in H$，都有 $(Tv,v)\leqslant a(v,v)$，所以 $\|T\|\leqslant a\leqslant 0$，这意味着 $\|T\|=0$ 和 $a=0$，这样可知

$$z=(T,a)=(0,0)=\inf\{x,y\}$$

容易验证 $(E_1,0)\leqslant x,y$，然而 $(E_1,0)$ 与 $(0,0)$ 不可比较，这与 $z=\inf\{x,y\}$ 矛盾，所以 A 不是格.

(iv) 容易验证.

参考文献：

[1] FREUDENTHAL H. Teilweise Geordneten Moduln [J]. Proc Kon Ned Akad van Wetensch, 1936, 39: 641-651.

[2] LUXEMBERG W A J, ZAANEN A C. Riesz Spaces, I [M]. Amsterdam-London: North-Holland Publishing Company, 1971.

[3] STEEN S W P. An Introduction to the Theory of Operators I [J]. Proc London Math Soc, 1936, 41(5): 361-392.

[4] LAVRIĈ B. On Freudenthal's Spectral Theorem [J]. Indagat Math, 1986, 89(4): 411-421.

[5] WÓJTOWICZ M. On a Weak Freudenthal Spectral Theorem [J]. Comment Math Univ Carolin, 1992, 33(4): 631-643.

[6] TOUMI M A. A Simple Proof for a Theorem of Luxemburg and Zaanen [J]. J Math Anal Appl, 2006, 322(2): 1231-1234.

[7] LIPECKI Z. On Binary-Type Approximations in Vector Lattices [J]. Arch Math, 1994, 62(6): 545-553.

[8] 罗俊丽，乔希民，吴洪博. 区间集上非交换剩余格 Fuzzy 布尔滤子的特征性质 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(4): 20-24.

[9] DAI T Y. On Some Special Classes of Partially Ordered Linear Algebras [J]. J Math Anal Appl, 1972, 40(3): 649-682.

[10] DAI T Y, DEMARR R. A Property for Inverses in a Partially Ordered Linear Algebra [J]. Trans Amer Math Soc, 1976, 215: 285-292.

[11] GELLAR R. $0\leqslant X^2\leqslant X$ [J]. Trans Amer Math Soc, 1972, 173: 341-352.

[12] DEMARR R. On Partially Ordering Operator Algebras [J]. Canad J Math, 1967, 19(2): 636-643.

[13] 杨明歌，廖开方. Banach 空间中非凸广义方程的度量次正则性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(9): 77-81.

[14] BACHMAN G, NARICI L. Functional Analysis [M]. New York: Dover Publications, 2000.

Freudenthal Spectral Theorem on a Special Class of Partially Ordered Linear Algebra

XIN Qiao[1]， MU Chun-lai[2]

1. *College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yili Xinjiang 835000, China;*

2. *School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China*

Abstract: Using the conception of the maximal projection of the special class of partially ordered linear algebras, we prove the spectral theorem on the partially ordered linear algebras. Specially, only rudimentary concepts such as partial ordering, Dedekind σ completeness are used in this work. Finally, we propose one partially ordered linear algebra, which is not a lattice, but the Freudenthal spectral theorem still holds.

Key words: partially ordered linear algebra; maximal and minimal projections; Freudenthal spectral theorem

责任编辑　廖　坤
崔玉洁