DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.12.018

渐近半伪压缩映射合成隐迭代序列的强收敛性①

刘涌泉[1], 饶永生[2,3]

1. 吉安职业技术学院 师范学院,江西 吉安 343000;2. 广州大学 计算科技研究院,广州 510006;
3. 贵州师范学院 数学与大数据学院,贵阳 550018

摘要:参照 Banach 压缩映照原理,合理引进了一涉及有限族渐近半伪压缩映射的具误差的合成隐迭代序列. 在一致凸 Banach 空间中,研究该合成隐迭代序列的强收敛性,得到了具误差的合成隐迭代序列强收敛于有限族渐近半伪压缩的公共不动点的充要条件.

关 键 词:渐近半伪压缩映射;一致凸 Banach 空间;公共不动点;合成隐迭代序列;强收敛

中图分类号:O177.91 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-9868(2018)12-0112-08

假设 E 为实 Banach 空间,其对偶空间为 E^*,正规对偶映射 $J: E \longrightarrow 2^{E^*}$ 定义为

$$J(x)=\{f \in E^*:\langle x, f\rangle=\|x\|\|f\|,\ \|f\|=\|x\|\} \qquad \forall x \in E$$

其中,$\langle\cdot, \cdot\rangle$ 表示 E 和 E^* 之间的对偶对. 对 $\forall t \geqslant 0$, $x \in X$,有:

$$J(-x)=-J(x) \qquad J(tx)=tJ(x)$$

用 j 表示单值正规对偶映射. 众所周知:若 E^* 为严格凸的 Banach 空间,则 J 是单值的;若 E^* 为一致凸的,那么在 E 的每个有界集上,J 为一致连续的[1].

映射 $T: C \longrightarrow C$, $F(T)=\{x \in C: Tx=x\}$ 表示 T 的不动点集,其中 C 为 E 的非空闭凸子集.

定义 1 (a)[2] 若存在数列 $\{k_n\} \subset [1,+\infty]$, $\lim\limits_{n \to \infty} k_n=1$,使得对 $\forall n \geqslant 1$,有

$$\|T^n x-T^n y\| \leqslant k_n\|x-y\|^2 \qquad \forall x, y \in C$$

则称映射 T 为渐近非扩张的;

(b)[3] 如果存在常数 L,使得对 $\forall n \geqslant 1$,有

$$\|T^n x-T^n y\| \leqslant L\|x-y\| \qquad \forall x, y \in C$$

则称映射 T 为一致 L-Lipschitzian 的.

(c)[4] 若存在数列 $\{k_n\} \subset [1,+\infty]$, $\lim\limits_{n \to \infty} k_n=1$,使得对 $\forall x, y \in C$,存在 $j(x-y) \in J(x-y)$,使得

$$\langle T^n x-T^n y, j(x-y)\rangle \leqslant k_n\|x-y\|^2 \qquad \forall n \geqslant 1$$

则称映射 T 为渐近伪压缩的;

(d)[5] 若存在数列 $\{k_n\} \subset [1,+\infty]$, $\lim\limits_{n \to \infty} k_n=1$,使得对 $\forall x \in C$, $p \in F(T)$,存在 $j(x-p) \in$

① 收稿日期:2017-12-29
基金项目:国家自然科学基金项目(11701118);2016 年度贵州省科技平台及人才团队专项资金项目(黔科合平台人才[2016]5609);2016 年贵州省省级重点支持学科"计算机应用技术"项目(黔学位合字 ZDXK[2016]20 号);吉安职业技术学院教研项目(16JY135).
作者简介:刘涌泉(1987-),男,助教,主要从事非线性泛函分析的研究.

$J(x-p)$，使得

$$\langle T^n x-p, j(x-p)\rangle \leqslant k_n \| x-p \|^2 \qquad n \geqslant 1$$

则称映射 T 为渐近半伪压缩的.

注 1 (a) 取 $L=\sup\limits_{n\geqslant 1}\{k_n\}$，可知渐近非扩张映射必定是一致 L-Lipschitzian 映射，同时也必定是渐近伪压缩映射；

(b) 当不动点集 $F(T)\neq\varnothing$ 时，渐近伪压缩映射必定是渐近半伪压缩映射，反之不成立[5].

目前，关于非线性算子的不动点逼近，仍然大量采用迭代逼近方法，主要利用修正的 Mann 和 Ishikawa 迭代序列来逼近不动点[4-14].

设 $\{T_i\}_{i=1}^N$ 是 C 上的有限族非扩张映射. 文献[6]引入隐迭代序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 如下：

$$x_n=(1-\alpha_n)x_{n-1}+\alpha_n T_{n(\bmod N)}x_n \qquad \forall x_0\in C,\ n\geqslant 1 \tag{1}$$

其中函数 mod N 取值于 $\{1, 2, \cdots, N\}$，$\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}\subset[0, 1]$，同时，证明了在 Hilbert 空间中由(1)式所产生的迭代序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 弱收敛于有限族非扩张映射的公共不动点. 文献[7]将文献[6]的结果推广到了一致凸 Banach 空间中.

设 $\{T_i\}_{i=1}^N$ 是 C 上的有限族渐近非扩张映射，2008 年，文献[11]引入了一种具误差的隐迭代序列

$$x_n=(1-\alpha_n-\gamma_n)x_{n-1}+\alpha_n T_n^{k(n)}x_n+\gamma_n u_n \qquad \forall x_0\in C,\ n\geqslant 1 \tag{2}$$

其中 $T_n^k=T_{n(\bmod N)}^{k(n)}$，$n=(k-1)N+i$，$i=i(n)\in\{1, 2, \cdots, N\}$，$k=k(n)\geqslant 1$，$\{\alpha_n\}$，$\{\gamma_n\}\subset[0, 1]$，$\{u_n\}$ 为 C 中的有界列. 文献[12]引入了如下的合成隐迭代序列：

$$\begin{cases} x_n=(1-\alpha_n-\gamma_n)x_{n-1}+\alpha_n T_{i(n)}^{k(n)}y_n+\gamma_n u_n \\ y_n=(1-\beta_n-\delta_n)x_{n-1}+\beta_n T_{i(n)}^{k(n)}x_n+\delta_n v_n \end{cases} \qquad n\geqslant 1 \tag{3}$$

其中 $T_{i(n)}^{k(n)}=T_{n(\bmod N)}^{k(n)}$，$i(n)=(k(n)-1)N+i(n)$，$i(n)\in\{1, 2, \cdots, N\}$，正整数 $k(n)\geqslant 1$，并且当 $n\to\infty$ 时，$k(n)\to\infty$，$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$，$\{\gamma_n\}$，$\{\delta_n\}\subset[0, 1]$，$\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 为 C 中的有界列.

特别地，当 $\beta_n=\delta_n\equiv 0$ 时，(3)式简化为(2)式.

近来，文献[13]在 Banach 空间中得到了一个 Lipschitzian 伪压缩映射关于隐迭代的收敛于不动点的充分必要条件.

受以上工作的启发，本文在实 Banach 空间中引入有限族渐近半伪压缩映射具误差的合成隐迭代序列，并讨论了有限族渐近半伪压缩映射在该迭代序列下的强收敛性，得到了该迭代强收敛于有限族渐近半伪压缩映射公共不动点的充分必要条件. 本文将文献[11-12]的渐近非扩张映射推广到了渐近半伪压缩映射，将文献[13]中的一个映射推广到了一有限族映射，将伪压缩映射推广到了渐近半伪压缩映射，并将迭代序列推广到了带误差的情形.

1 预备知识

设 E 为 Banach 空间，C 为 E 的非空闭凸子集，$\{T_i\}_{i=1}^N: C\longrightarrow C$ 为一族 N 个一致 L-Lipschitzian 渐近半伪压缩映射. 设 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$，$\{\gamma_n\}$，$\{\delta_n\}\subset[0, 1]$ 为 4 个实数列，对 $\forall n\geqslant 1$，有 $\alpha_n+\gamma_n\leqslant 1$，$\beta_n+\delta_n\leqslant 1$，$\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 为 C 中的有界列. 任意给定初始 $x_0\in C$，构造迭代序列

$$\begin{cases} x_n=(1-\alpha_n-\gamma_n)x_{n-1}+\alpha_n T_{i(n)}^{k(n)}y_n+\gamma_n u_n \\ y_n=(1-\beta_n-\delta_n)x_{n-1}+\beta_n T_{i(n)}^{k(n)}x_n+\delta_n v_n \end{cases} \qquad n\geqslant 1 \tag{4}$$

其中 $T_{i(n)}^{k(n)}=T_{n(\bmod N)}^{k(n)}$，$i(n)=(k(n)-1)N+i(n)$，$i(n)\in\{1, 2, \cdots, N\}$，正整数 $k(n)\geqslant 1$，并且当 $n\to\infty$ 时，$k(n)\to\infty$.

注 2 对任意给定的 $x_n\in C$，定义映射 $A_n: C\longrightarrow C$ 为

$$A_n x=(1-\alpha_n-\gamma_n)x_{n-1}+\alpha_n T_{i(n)}^{k(n)}[(1-\beta_n-\delta_n)x_{n-1}+\beta_n T_{i(n)}^{k(n)}x+\delta_n v_n]+\gamma_n u_n \qquad \forall x\in C$$

则对 $\forall x, y\in C$，有

$$\| A_n x - A_n y \| \leqslant \alpha_n \beta_n L \| T_{i(n)}^{k(n)} x - T_{i(n)}^{k(n)} y \| \leqslant \alpha_n \beta_n L^2 \| x - y \|$$

当对 $\forall n \geqslant 1$，有 $\alpha_n \beta_n L^2 \leqslant 1$ 时，映射 $A_n: C \longrightarrow C$ 为压缩映射．由压缩映照原理可知，存在唯一不动点 $x_n \in C$，即合成隐迭代序列(4)有意义．

以下给出本文用到的主要引理：

引理 1[15]　设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 是 3 个非负实数列，满足

$$a_{n+1} \leqslant (1 + b_n) a_n + c_n \qquad \forall n \geqslant n_0$$

其中 n_0 为某个常数(非负整数)，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$$

那么以下两个结论成立：

(ⅰ) 极限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在；

(ⅱ) 如果存在子列 $\{a_{n_j}\} \subset \{a_n\}$，满足 $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = 0$，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

引理 2[16]　设 C 为 Banach 空间 E 中的非空子集，$T: C \longrightarrow C$ 为渐近半伪压缩映射，$\{k_n\} \subset [1, +\infty)$，$\lim_{n\to\infty} k_n = 1$. 那么，对 $\forall x \in C$，$p \in F(T)$，$r > 0$，有

$$\| x - p \| \leqslant \| x - p + r[(k_n I - T^n) x - (k_n I - T^n) p] \| \qquad \forall n \geqslant 1$$

其中 I 为恒等映射.

2　主要结果

引理 3　设 C 为 Banach 空间 E 中的一非空闭凸子集，$\{T_i\}_{i=1}^{N}: C \longrightarrow C$ 为一族 N 个一致 L-Lipschitzian 渐近半伪压缩映射，$\{k_n\} \subset [1, +\infty)$，$\lim_{n\to\infty} k_n = 1$，Lipschitz 常数 $L > 1$，记 $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i)$ 表示一族 N 个一致 L-Lipschitzian 渐近半伪压缩映射的公共不动点集．如果 $\{x_n\} \subset C$ 由(4)式定义，并满足以下条件：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n < \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (k_n - 1) < \infty$；

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_n < \infty$；

(c) $\forall n \geqslant 1$，有 $\alpha_n \beta_n L^2 < 1$.

那么：

(ⅰ) 存在两个数列 $\{r_n\}$，$\{s_n\} \subset [0, +\infty]$，$\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty$，使得

$$\| x_n - p \| \leqslant (1 + r_n) \| x_{n-1} - p \| + s_n \qquad \forall p \in F$$

(ⅱ) 极限 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F)$ 存在，其中

$$d(x_n, F) = \inf_{p \in F} \| x_n - p \|$$

证　(ⅰ)　由(4)式得到

$$\begin{aligned}
x_{n-1} = {} & x_n + (\alpha_n + \gamma_n) x_{n-1} - \alpha_n T_{i(n)}^{k(n)} y_n - \gamma_n u_n = \\
& (1 + \alpha_n) x_n + \alpha_n (k_n I - T_{i(n)}^{k(n)}) x_n - (1 + k_n) \alpha_n x_n + (\alpha_n + \gamma_n) x_{n-1} - \\
& \alpha_n (T_{i(n)}^{k(n)} y_n - T_{i(n)}^{k(n)} x_n) - \gamma_n u_n = \\
& (1 + \alpha_n) x_n + \alpha_n (k_n I - T_{i(n)}^{k(n)}) x_n - (1 + k_n) \alpha_n [x_{n-1} + \alpha_n (T_{i(n)}^{k(n)} y_n - x_{n-1}) + \\
& \gamma_n (u_n - x_{n-1})] + (\alpha_n + \gamma_n) x_{n-1} + \alpha_n (T_{i(n)}^{k(n)} x_n - T_{i(n)}^{k(n)} y_n) - \gamma_n u_n = \\
& (1 + \alpha_n) x_n + \alpha_n (k_n I - T_{i(n)}^{k(n)}) x_n - (1 + k_n) \alpha_n x_{n-1} + (1 + k_n) \alpha_n^2 (x_{n-1} - T_{i(n)}^{k(n)} y_n) - \\
& (1 + k_n) \alpha_n \gamma_n (u_n - x_{n-1}) + \alpha_n x_{n-1} + \alpha_n (T_{i(n)}^{k(n)} x_n - T_{i(n)}^{k(n)} y_n) - \gamma_n (u_n - x_{n-1}) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(1+\alpha_n)x_n+\alpha_n(k_nI-T_{i(n)}^{k(n)})x_n-k_n\alpha_nx_{n-1}+(1+k_n)\alpha_n^2(x_{n-1}-T_{i(n)}^{k(n)}y_n)+\\
&\alpha_n(T_{i(n)}^{k(n)}x_n-T_{i(n)}^{k(n)}y_n)-[(1+k_n)\alpha_n+1]\gamma_n(u_n-x_{n-1})
\end{aligned}
\tag{5}
$$

并且

$$
p=(1+\alpha_n)p+\alpha_n(k_nI-T_{i(n)}^{k(n)})p-k_n\alpha_np \tag{6}
$$

借助(5)式和(6)式,可以得到

$$
\begin{aligned}
x_{n-1}-p=&(1+\alpha_n)(x_n-p)+\alpha_n[(k_nI-T_{i(n)}^{k(n)})x_n-(k_nI-T_{i(n)}^{k(n)})p]-\\
&k_n\alpha_n(x_{n-1}-p)+(1+k_n)\alpha_n^2(x_{n-1}-T_{i(n)}^{k(n)}y_n)+\\
&\alpha_n(T_{i(n)}^{k(n)}x_n-T_{i(n)}^{k(n)}y_n)-[(1+k_n)\alpha_n+1]\gamma_n(u_n-x_{n-1})
\end{aligned}
\tag{7}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&(1+\alpha_n)(x_n-p)+\alpha_n[(k_nI-T_{i(n)}^{k(n)})x_n-(k_nI-T_{i(n)}^{k(n)})p]=\\
&(1+\alpha_n)\left[(x_n-p)+\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}[(k_nI-T_{i(n)}^{k(n)})x_n-(k_nI-T_{i(n)}^{k(n)})p]\right]
\end{aligned}
$$

利用引理2,可得

$$
\|(1+\alpha_n)(x_n-p)+\alpha_n[(k_nI-T_{i(n)}^{k(n)})x_n-(k_nI-T_{i(n)}^{k(n)})p]\|\geqslant(1+\alpha_n)\|x_n-p\| \tag{8}
$$

由(7)式和(8)式可得

$$
\begin{aligned}
\|x_{n-1}-p\|\geqslant&(1+\alpha_n)\|x_n-p\|-k_n\alpha_n\|x_{n-1}-p\|-(1+k_n)\alpha_n^2\|x_{n-1}-T_{i(n)}^{k(n)}y_n\|-\\
&\alpha_n\|T_{i(n)}^{k(n)}x_n-T_{i(n)}^{k(n)}y_n\|-[(1+k_n)\alpha_n+1]\gamma_n\|u_n-x_{n-1}\|
\end{aligned}
$$

也就是

$$
\begin{aligned}
(1+\alpha_n)\|x_n-p\|\leqslant&(1+k_n\alpha_n)\|x_{n-1}-p\|+(1+k_n)\alpha_n^2\|x_{n-1}-T_{i(n)}^{k(n)}y_n\|+\\
&\alpha_n\|T_{i(n)}^{k(n)}x_n-T_{i(n)}^{k(n)}y_n\|+[(1+k_n)\alpha_n+1]\gamma_n\|u_n-x_{n-1}\|
\end{aligned}
\tag{9}
$$

接着,我们作如下估计:

$$
\begin{aligned}
\|y_n-p\|\leqslant&(1-\beta_n-\delta_n)\|x_n-p\|+\beta_n\|T_{i(n)}^{k(n)}x_n-p\|+\delta_n\|v_n-p\|\leqslant\\
&(1-\beta_n-\delta_n)\|x_n-p\|+\beta_nL\|x_n-p\|+\delta_n\|v_n-p\|\leqslant\\
&(1-\beta_n-\delta_n+\beta_nL)\|x_n-p\|+\delta_n\|v_n-p\|\\
\|x_{n-1}-T_{i(n)}^{k(n)}y_n\|\leqslant&\|x_{n-1}-p\|+\|T_{i(n)}^{k(n)}y_n-p\|\leqslant\\
&\|x_{n-1}-p\|+(1-\beta_n-\delta_n+\beta_nL)L\|x_n-p\|+\delta_nL\|v_n-p\|
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\|x_n-y_n\|\leqslant&\beta_n\|x_n-T_{i(n)}^{k(n)}x_n\|+\delta_n\|x_n-v_n\|\leqslant\\
&\beta_n\|x_n-p\|+\beta_n\|T_{i(n)}^{k(n)}x_n-p\|+\delta_n\|x_n-v_n\|\leqslant\\
&\beta_n(L+1)\|x_n-p\|+\delta_n\|x_n-v_n\|\\
\|T_{i(n)}^{k(n)}x_n-T_{i(n)}^{k(n)}y_n\|\leqslant&L\|x_n-y_n\|\leqslant\\
&\beta_nL(L+1)\|x_n-p\|+\delta_nL\|x_n-v_n\|
\end{aligned}
\tag{11}
$$

将(10)式和(11)式代入(9)式,并注意到:

$$
\begin{aligned}
\|x_n-v_n\|\leqslant\|x_n-p\|+\|v_n-p\|\\
\|u_n-x_{n-1}\|\leqslant\|u_n-p\|+\|x_{n-1}-p\|
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
(1+\alpha_n)\|x_n-p\|\leqslant&[1+k_n\alpha_n+(1+k_n)\alpha_n^2+(1+k_n)\alpha_n\gamma_n+\gamma_n]\|x_{n-1}-p\|+\\
&[(1+k_n)(1-\beta_n-\delta_n+\beta_nL)\alpha_n^2L+\alpha_n\beta_nL(L+1)+\alpha_n\delta_nL]\|x_n-p\|+\\
&[(1+k_n)\alpha_n^2+\alpha_n]\delta_nL\|v_n-p\|+[(1+k_n)\alpha_n+1]\gamma_n\|u_n-p\|
\end{aligned}
$$

因为 $1+\alpha_n\geqslant1$,整理可得

$$
\begin{aligned}
\|x_n-p\|\leqslant&[1+(k_n-1)\alpha_n]\|x_{n-1}-p\|+[(1+k_n)\alpha_n^2+(1+k_n)\alpha_n\gamma_n+\gamma_n]\|x_{n-1}-p\|\leqslant\\
&[(1+k_n)(1-\beta_n-\delta_n+\beta_nL)\alpha_n^2L+\alpha_n\beta_nL(L+1)+\alpha_n\delta_nL]\|x_n-p\|+
\end{aligned}
$$

$$[(1+k_n)\alpha_n^2+\alpha_n]\delta_nL\|v_n-p\|+[(1+k_n)\alpha_n+1]\gamma_n\|u_n-p\|$$

进一步整理得到

$$\begin{aligned}&[1-(1+k_n)(1-\beta_n-\delta_n+\beta_nL)\alpha_n^2L-\alpha_n\beta_nL(L+1)-\alpha_n\delta_nL]\|x_n-p\|\leqslant\\&[1+(k_n-1)\alpha_n+(1+k_n)\alpha_n^2+(1+k_n)\alpha_n\gamma_n+\gamma_n]\|x_{n-1}-p\|+\\&[(1+k_n)\alpha_n^2+\alpha_n]\delta_nL\|v_n-p\|+[(1+k_n)\alpha_n+1]\gamma_n\|u_n-p\|\end{aligned}\tag{12}$$

又因为

$$\begin{aligned}&1-(1+k_n)(1-\beta_n-\delta_n+\beta_nL)\alpha_n^2L-\alpha_n\beta_nL(L+1)-\alpha_n\delta_nL=\\&1-(1+k_n)\alpha_n^2L-(1+k_n)(L-1)\alpha_n^2\beta_nL+(1+k_n)\alpha_n^2\delta_nL-\alpha_n\beta_nL(L+1)-\alpha_n\delta_nL\geqslant\\&1-(1+k_n)\alpha_n^2L-(1+k_n)(L-1)\alpha_n^2\beta_nL-\alpha_n\beta_nL(L+1)-\alpha_n\delta_nL\end{aligned}$$

并注意到$\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\delta_n\}\subset[0,1]$，$L>1$，则

$$\begin{aligned}&1-(1+k_n)(1-\beta_n-\delta_n+\beta_nL)\alpha_n^2L-\alpha_n\beta_nL(L+1)-\alpha_n\delta_nL\geqslant\\&1-(1+k_n)\alpha_n^2L-(1+k_n)(L-1)\alpha_n^2L-\alpha_n\beta_nL(L+1)-\alpha_nL=\\&1-(1+k_n)\alpha_n^2L^2-\alpha_n\beta_nL^2-\alpha_n\beta_nL-\alpha_nL\geqslant\\&1-(1+k_n)\alpha_n^2L^2-\alpha_n\beta_nL^2-2\alpha_nL\end{aligned}$$

因为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2<\infty\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$$

可知：

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n^2=0\qquad\lim_{n\to\infty}\alpha_n\beta_n=0$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，并注意到$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$，因此存在某个正整数$n_0$，使得当$n\geqslant n_0$时，有：

$$\alpha_n^2\leqslant\frac{1}{10L^3}\qquad\alpha_n\beta_n\leqslant\frac{1}{10L^3}$$

$$\alpha_n\leqslant\frac{1}{10L^2}\qquad 1\leqslant k_n<L$$

所以

$$\begin{aligned}&1-(1+k_n)(1-\beta_n-\delta_n+\beta_nL)\alpha_n^2L-\alpha_n\beta_nL(L+1)-\alpha_n\delta_nL\geqslant\\&1-\frac{1+k_n}{10L}-\frac{1}{10L}-\frac{2}{10L}\geqslant\frac{10L-4-k_n}{10L}\geqslant\frac{10L-4L-L}{10L}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(12) 式变形可得

$$\begin{aligned}\|x_n-p\|\leqslant&\frac{1+(k_n-1)\alpha_n+(1+k_n)\alpha_n^2+(1+k_n)\alpha_n\gamma_n+\gamma_n}{1-(1+k_n)(1-\beta_n-\delta_n+\beta_nL)\alpha_n^2L-\alpha_n\beta_nL(L+1)-\alpha_n\delta_nL}\|x_{n-1}-p\|+\\&2[(1+k_n)\alpha_n^2+\alpha_n]\delta_nL\|v_n-p\|+2[(1+k_n)\alpha_n+1]\gamma_n\|u_n-p\|\leqslant\\&1+2[(1+k_n)((1-\beta_n-\delta_n+\beta_nL)L+1)\alpha_n^2+\alpha_n\beta_nL(L+1)+\alpha_n\delta_nL+\\&(k_n-1)\alpha_n+(1+k_n)\alpha_n\gamma_n+\gamma_n]\|x_{n-1}-p\|+\\&2[(1+k_n)\alpha_n^2+\alpha_n]\delta_nL\|v_n-p\|+2[(1+k_n)\alpha_n+1]\gamma_n\|u_n-p\|\end{aligned}\tag{13}$$

对于任意给定的$p\in F$，注意到$\{u_n\},\{v_n\}$的有界性，则存在常数$M>0$，使得：

$$\|u_n-p\|\leqslant M\qquad\|v_n-p\|\leqslant M$$

(13) 式可变形为

$$\|x_n-p\|\leqslant(1+r_n)\|x_{n-1}-p\|+s_n\tag{14}$$

其中：

$$r_n=2(1+k_n)((1-\beta_n-\delta_n+\beta_nL)L+1)\alpha_n^2+\alpha_n\beta_nL(L+1)+\alpha_n\delta_nL+(k_n-1)\alpha_n+(1+k_n)\alpha_n\gamma_n+\gamma_n$$

$$s_n = 2[(1+k_n)\alpha_n^2\delta_n L + \alpha_n\delta_n L + (1+k_n)\alpha_n\gamma_n + \gamma_n]M$$

由条件(a),(b),(c)可知：

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty$$

(ii) 对于所有的 $p \in F$，对(14)式两边取下确界，得到

$$d(x_n, F) \leqslant (1+r_n)d(x_{n-1}, F) + s_n$$

由引理1可知，极限$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, F(T))$存在.

定理1 设C为Banach空间E中的非空闭凸子集，$\{T_i\}_{i=1}^N: C \longrightarrow C$为一族$N$个一致$L$-Lipschitzian渐近半伪压缩映射，$\{k_n\} \subset [1, +\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 1$，Lipschitz常数$L > 1$，记$F = \bigcap\limits_{i=1}^N F(T_i)$表示一族$N$个一致$L$-Lipschitzian渐近半伪压缩映射的公共不动点集. 如果$\{x_n\} \subset C$由(4)式定义，并满足以下条件：

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n < \infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(k_n - 1) < \infty$；

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n\delta_n < \infty$；

(c) $\forall n \geqslant 1$，有$\alpha_n\beta_n L^2 < 1$.

那么$\{x_n\}$强收敛于$\{T_i\}_{i=1}^N$的一个公共不动点的充分必要条件为

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$$

证 必要性显然. 事实上，设$p \in F$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$，那么有

$$d(x_n, F) = \inf_{p\in F} d(x_n, p) \leqslant \| x_n - p \|$$

当$n \to \infty$时，则有

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$$

下证充分性. 设

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$$

由(14)式和引理1可知

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$$

以下证明$\{x_n\}$为C中的Cauchy列. 事实上，对$\forall p \in F$以及任意的正整数m, n，$m > n \geqslant n_0$，我们知道当$x \geqslant 0$时，$1 + x \leqslant e^x$，借助引理3，得到

$$\begin{aligned} \| x_m - p \| &\leqslant \prod_{j=1}^{m-1}(1+r_j) \| x_n - p \| + \sum_{j=n}^{m-1} s_j \prod_{j=n}^{m-1}(1+r_j) \leqslant \\ & e^{\sum_{j=n}^{m-1} r_j} \| x_n - p \| + e^{\sum_{j=n}^{m-1} r_j} \sum_{j=n}^{m-1} s_j \leqslant \\ & Q \| x_n - p \| + Q \sum_{j=n}^{m-1} s_j \end{aligned}$$

其中$Q = e^{\sum_{j=1}^{\infty} r_j}$. 则

$$\begin{aligned} \| x_n - x_m \| &\leqslant \| x_n - p \| + \| x_m - p \| \leqslant \\ & (1+Q) \| x_n - p \| + Q \sum_{j=n}^{\infty} s_j \end{aligned}$$

对$\forall p \in F$，取下确界，有

$$\| x_n - x_m \| \leqslant (1+Q) d(x_n, F) + Q \sum_{j=n}^{\infty} s_j$$

因为：

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j < \infty \qquad \lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$$

可知$\{x_n\} \subset C$是 Cauchy 列．因为E为 Banach 空间，C为E中的非空闭凸子集，所以存在$p_0 \in C$，使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p_0$$

接下来证明$p_0 \in F$．因为$\{T_i\}_{i=1}^N$是一致L-Lipschitzian 映射，可知$\{T_i\}_{i=1}^N$是连续的，$\{T_i\}_{i=1}^N$的公共不动点集F是闭集．又注意到

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$$

所以$p_0 \in F$．

定理 2　设C为 Banach 空间E中的非空闭凸子集，$\{T_i\}_{i=1}^N : C \longrightarrow C$为一族$N$个一致$L$-Lipschitzian 渐近半伪压缩映射，$\{k_n\} \subset [1, +\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 1$，Lipschitz 常数$L > 1$，记$F = \bigcap\limits_{i=1}^N F(T_i)$表示一族$N$个一致$L$-Lipschitzian 渐近半伪压缩映射的公共不动点集．如果$\{x_n\} \subset C$由(4)式定义，并满足下条件：

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n < \infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n (k_n - 1) < \infty$；

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_n < \infty$；

(c) $\forall n \geqslant 1$，有$\alpha_n \beta_n L^2 < 1$．

那么$\{x_n\}$强收敛于$\{T_i\}_{i=1}^N$的一个公共不动点p的充分必要条件为存在子列$\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = p$．

证　因为

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F) \leqslant \liminf_{k\to\infty} d(x_{n_k}, F) \leqslant \lim_{k\to\infty} \| x_{n_k} - p \| = 0$$

由定理 1 可知定理 2 成立．

参考文献：

[1] BARBU V. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces [M]. Leyden：Noordhoff International Publishing，1976.

[2] GOEBEL K，KIRK W A. A Fixed Point Theorem for Asymptotically Nonexpansive Mappings [J]. Proc Amer Math Soc，1972，35(1)：171－174.

[3] LIU Q. Iteration Sequences for Asymptotically Quasi-Nonexpansive Mapping with an Error Member of Uniform Convex Banach Space [J]. J Math Anal App，2002，266(2)：468－471.

[4] GU F. Approximate Fixed Point Sequence for A Finite Family of Asymptotically Pseudocontractive Mappings [J]. Comput Math Appl，2007，53(12)：1792－1799.

[5] GUO W，GUO Q. Convergence Theorems of Fixed Points for Asymptotically Hemi-Pseudocontractive Mappings [J]. Appl Math Comput，2009，215(1)：16－21.

[6] XU H K，ORI R G. An Implicit Iteration Process for Nonexpansive Mappings [J]. Numer Funct Anal Optimiz，2001，22(5－6)：767－773.

[7] ZHOU Y Y，CHANG S S. Convergence of Implicit Iteration Process for A Finite Family of Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces [J]. Numer Funct Anal Optimiz，2002，23(7－8)：911－921.

[8] 唐玉超，刘理蔚. 赋范线性空间中渐近伪压缩映象不动点迭代逼近的充分必要条件 [J]. 南昌大学学报(理学版)，2010，34(3)：210－213.

[9] 刘文军，孟京华，邓中书. 渐近拟非扩张型映象的修正的 Ishikawa Riech-Takahashi 迭代序列的强收敛性 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2011，35(3)：297－301.

[10] 刘涌泉,郭伟平.混合型渐近非扩张映射合成隐迭代序列的收敛性定理[J].数学物理学报,2015,35(2):422-440.

[11] 杨理平,胡 刚.具随机性误差隐迭代程序的收敛性[J].数学学报,2008,51(1):11-22.

[12] 饶若峰.渐近非扩张映像具误差的合成隐迭代序列的弱收敛和强收敛定理[J].数学年刊A辑(中文版),2008,29(4):461-470.

[13] KAN X Z, GUO W P. Composite Implicit Iteration Process for a Lipschitzian Pseudocontractive Mapping [J]. J of Math (PRC), 2014, 34(1): 1-6.

[14] 陈清明,欧增奇.集值非扩张映象的不动点及带误差的Ishikawa迭代序列的收敛性[J].西南大学学报(自然科学版),2015,37(10):62-66.

[15] TAN K K, XU H K. Approximating Fixed Points of Nonexpansive Mappings By the Ishikawa Iteration Process [J]. J Math Anal Appl, 1993, 178(2): 301-308.

[16] LIU Y Q, GUO W P. A Sufficient and Neccessary Condition for the Strong Convergence of Asymptotically Hemi-Pseudontractive Mapping [J]. J of Math (PRC), 2015, 35(4): 747-753.

Strong Convergence of a Composite Implicit Iterative Scheme for Asymptotically Hemi-Pseudocontractive Mappings

LIU Yong-quan[1], RAO Yong-sheng[2,3]

1. Normal School, Ji'an Vocational and Technical College, Ji'an Jiangxi 343000, China;
2. Institute of Computational Science and Technology, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China;
3. School of Mathematics and Big Data, Guizhou Normal College, Guiyang 550018, China

Abstract: In this paper, a new composite implicit iterative scheme with errors for a finite family of asymptotically hemi-pseudocontractive mappings is reasonably introduced in view of the Banach's contraction principle. The purpose of this paper is to study strong convergence of the composite implicit iterative scheme for a family of asymptotically hemi-pseudocontractive mappings in the uniformly convex Banach space, and some necessary and sufficient conditions for the strong convergence of this iterative scheme to a common fixed point of these mappings are obtained.

Key words: asymptotically hemi-pseudocontractive mapping; uniformly convex Banach space; common fixed point; composite implicit iterative scheme; strong convergence

责任编辑 廖 坤
崔玉洁