DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.12.019

一类新的带有参数 $\delta\in[1, 2)$ 的分数阶可微变分不等式的拓扑处理方法①

吴欣锟

贵州理工学院 理学院，贵阳 550003

摘要：在已有的变分不等式、可微变分不等式、分数阶可微变分不等式的模型的基础上，对一类新的带有参数 $\delta\in[1, 2)$ 的分数阶可微变分不等式模型的解的存在性进行了相关的分析和研究．首先，在已有的分数阶可微变分不等式的模型基础上加了一个参数 $\delta\in[1, 2)$，得到了一类新的带有参数 $\delta\in[1, 2)$ 的分数阶可微变分不等式模型，对这类新模型给出了详细的阐述；然后证明出该模型的解是非空的．

关　键　词：可微变分不等式；分数阶可微变分不等式；解

中图分类号：O178；O221　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2018)12-0120-06

文献[1] 首次介绍和研究了一类含有初值的可微变分不等式

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t, x(t))+B(t, x(t))\cdot u(t)\\ u(t)\in \mathrm{SOL}(K, G(t, x(t))+S)\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

其中 K 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个非空闭凸子集，$\Omega\equiv[0, T]\times\mathbb{R}^n$，$(f, B, G)$：$\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times m}\times\mathbb{R}^m$ 和 S：$\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是两个函数．在某些条件下，文献[1] 得到了可微变分不等式(1) 的一个 Caratheodory 弱解的存在性．这类可微变分不等式在分析力学、微分纳什游戏和其它相关领域中有着许多重要的应用[1-18]．

简单来讲，分数阶导数 ${}_0^C D_t^\delta x(t)$ 是对整数阶导数 $\dot{x}(t)$ 的一种拓展．我们一般可以对某个性质较好的可导函数求一阶导数、二阶导数、三阶导数、n 阶导数，那么我们是否可以对函数求分数阶导数 $\left(\text{如}\dfrac{1}{2}\text{ 阶导数}\right)$ 呢？若某个函数不满足求导条件，我们是否可以使用微积分理论对这个函数进行分析性质的研究呢？根据多方文献的参考得知，答案是肯定的．分数阶微积分的研究热潮产生于20世纪70年代，主要原因是因为研究人员发现分形几何、幂律现象与记忆过程等可以与分数阶微积分建立起密切的联系．分数阶微积分可以作为一种很好的描述与刻画手段．

如果把式(1) 里面的 $\dot{x}(t)$ 变成 ${}_0^C D_t^\delta x(t)$，单值函数 $f(t, x(t))$ 变成集值算子 $F(t, x(t))$，我们该如何去求解呢？这是本文的主要研究内容．

首先，研究这个问题是有重要意义的．如果把式(1) 里面的 $\dot{x}(t)$ 变成 ${}_0^C D_t^\delta x(t)$，单值函数 $f(t, x(t))$ 变成集值算子 $F(t, x(t))$，那么式(1) 就变成了一个由集值算子、分数阶微分方程和可微变分不等式组成的新式子．众所周知，集值算子 $F(t, x(t))$ 是单值函数 $f(t, x(t))$ 的推广并且比单值函数 $f(t, x(t))$ 更重要，由可微变分不等式和分数阶微分方程的重要性，有理由相信新式子的求解是有重要意义的．

---

① 收稿日期：2017-12-02
基金项目：贵州省联合基金项目(黔科合 LH 字[2016]7102)．
作者简介：吴欣锟(1986-)，男，副教授，主要从事可微变分不等式的研究．

1 预备知识

设 X 是度量空间，E 是 Banach 空间，定义：

$$P(E)=\{U\subset E:U\neq\varnothing\}$$
$$B(E)=\{U\in P(E):U\text{ 是有界的}\}$$
$$K(E)=\{U\in P(E):U\text{ 是紧的}\}$$
$$Kv(E)=\{U\in K(E):U\text{ 是凸的}\}$$

我们需要用到集值分析的一些概念和结论：

定义 1 一个集值算子 $M:X\longrightarrow P(E)$ 被称为：

(i) 如果对 E 的任一闭子集 V，$M^{-1}(V)=\{x\in X:M(x)\cap V\neq\varnothing\}$ 是 X 的闭子集，则称 M 是上半连续的；

(ii) 如果对 E 的任一弱闭子集 V，$M^{-1}(V)=\{x\in X:M(x)\cap V\neq\varnothing\}$ 是 X 的闭子集，则称 M 是弱上半连续的；

(iii) 如果图 $\Gamma_M=\{(y,z):z\in M(y)\}$ 是 $X\times E$ 的一个闭子集，则称 M 是闭的；

(iv) 如果 M 是上半连续的，且对 X 里的每个有界集 Ω，$M(\Omega)$ 是 E 里的相对紧集，则称 M 是完备上半连续的；

(v) 如果对 X 的任一紧子集 Ω，$M(\Omega)$ 是 E 里的相对紧集，则称 M 是拟紧的.

引理 1[6] 如果 $M:X\longrightarrow P(E)$ 是一个闭的、拟紧的集值算子，则 M 是上半连续的.

引理 2[7] 设 E 是 Banach 空间，Ω 是另外一个 Banach 空间的非空子集. 如果 $N:\Omega\longrightarrow P(E)$ 是一个映射到弱紧凸集的集值算子，则 N 是弱上半连续的当且仅当条件 $\{x_n\}\subset\Omega$，$x_n\to x_0(x_0\in\Omega)$ 和 $y_n\in N(x_n)$ 能够推出 $\{y_n\}$ 存在子序列弱收敛于 y_0，其中 $y_0\in N(x_0)$.

引理 3[6] 设 M 是 E 的有界闭凸子集，$T:M\longrightarrow Kv(M)$ 是完备上半连续的集值映射，则 $\mathrm{Fix}(T)=\{x:x\in T(x)\}$ 是非空紧子集.

2 主要结果

考虑下面的这类带有参数 $\delta\in[1,2)$ 的分数阶可微变分不等式：

$$ {}^{C}D_t^{\delta}x(t)\in F(t,x(t))+B(t,x(t))u(t)\qquad t\in[0,h] \tag{2}$$

$$\langle v-u(t),G(t,x(t))+Q(u(t))\rangle\geqslant 0\qquad\forall v\in K,\ \text{a.e. } t\in[0,h] \tag{3}$$

$$x(0)=a,\ x(h)=b\qquad a,b\neq 0 \tag{4}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$，$u(t)\in K$，$1\leqslant\delta<2$，${}^{C}D_t^{\delta}$ 是分数阶导数的表示符号，F,B,G 和 Q 这 4 个函数的定义会在下面的定义中给出解释.

为了处理问题(2)至(4)，我们需要下面 5 个假设成立：

(F1) $F:I\times\mathbb{R}^n\longrightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ 是上半 Caratheodory 集值映射，等价于对 $\forall v\in\mathbb{R}^n$，集值映射 $F(\cdot,v):I\longrightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ 确定了一个可测选择，且对 a.e. $t\in I$，集值映射 $F(t,\cdot):\mathbb{R}^n\longrightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ 是上半连续的；

(F2) 对于函数 $F:I\times\mathbb{R}^n\longrightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$，存在非减的连续函数 $\Psi_F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 和函数 $\eta_F\in L^p(I,\mathbb{R})$，使得

$$\|F(t,v)\|=\sup\{\|z\|:z\in F(t,v)\}\leqslant\eta_F(t)\Psi_F(\|v\|)\qquad\forall v\in\mathbb{R}^n,\ \text{a.e. } t\in I$$

其中 p 是大于 $\frac{1}{\delta}$ 的正整数；

(B) $B:I\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times m}$ 是连续函数，满足

$$\|B(t,v)\|\leqslant\eta_B\qquad\forall v\in\mathbb{R}^n,\ \forall t\in I$$

其中 η_B 是正数；

(G) 对于连续函数 $G:I\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$，存在非减的连续函数 $\Psi_G:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 和函数 $\eta_G\in L^p(I,\mathbb{R})$，使得

$$\|G(t,v)\| \leqslant \eta_G(t)\Psi_G(\|v\|) \qquad \forall v\in\mathbb{R}^n,\ \forall t\in I$$

(Q)　$Q: K\to\mathbb{R}^m$ 是满足下面两个条件的连续函数：

(Q1)　Q 在 K 上是单调的，也即是说

$$\langle u-v, Q(u)-Q(v)\rangle \geqslant 0 \qquad \forall u,v\in K$$

(Q2)　存在 $v_0\in K$，使得

$$\liminf_{v\in K,\ \|v\|\to\infty} \frac{\langle v-v_0, Q(v)\rangle}{\|v\|^2} > 0$$

由上面的条件(F1)和(F2)可知，从 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 映射到 $P(L^p(I,\mathbb{R}^n))$ 的集值映射

$$P_F^p(x)=\{f\in L^p(I,\mathbb{R}^n): f(t)\in F(t,x(t)),\ \text{a.e. } t\in I\}$$

是闭的[8]，其中 $P(L^p(I,\mathbb{R}^n))$ 表示 $L^p(I,\mathbb{R}^n)$ 的所有子集组成的集合.

定义 2[8]　问题(2)至(4)的解 $x\in C(I,\mathbb{R}^n)$ 是指存在可积函数 $u: I\longrightarrow K$ 和函数 $f\in P_F^p(x)$，满足：

$$x(t)=a+\frac{1}{h}(b-a)t+\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-s)^{\delta-1}[f(s)+B(s,x(s))u(s)]\mathrm{d}s-$$
$$\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}[f(s)+B(s,x(s))u(s)]\mathrm{d}s \qquad t\in I$$
$$\langle v-u(t), G(t,x(t))+Q(u(t))\rangle \geqslant 0 \qquad \forall v\in K,\ \text{a.e. } t\in I$$

对于函数 $Q: K\longrightarrow\mathbb{R}^m$，定义 $\mathrm{SOL}(K,Q)$ 为

$$\mathrm{SOL}(K,Q)=\{v\in K: \langle w-v, Q(v)\rangle\geqslant 0,\ \forall w\in K\} \tag{5}$$

依据文献[1]的假设 6.2，我们可以得到下面的引理 4：

引理 4　如果条件(Q)满足，则对于每个 $z\in\mathbb{R}^m$，解集 $\mathrm{SOL}(K, z+Q(\cdot))$ 是非空的闭凸集，且存在正数 η_Q 满足

$$\|v\| \leqslant \eta_Q(1+\|z\|) \qquad \forall v\in\mathrm{SOL}(K,z+Q(\cdot)) \tag{6}$$

为了解决问题(2)至(4)，我们设

$$U(z)=\mathrm{SOL}(K,z+Q(\cdot)) \qquad \forall z\in\mathbb{R}^m$$

再定义 $\Phi: I\times\mathbb{R}^n\longrightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 为

$$\Phi(t,v)=\{B(t,v)y: y\in U(G(t,v))\} \tag{7}$$

则问题(2)至(4)可转化为：

$$x(t)=a+\frac{1}{h}(b-a)t+\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-s)^{\delta-1}[f(s)+B(s,x(s))u(s)]\mathrm{d}s-$$
$$\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}[f(s)+B(s,x(s))u(s)]\mathrm{d}s \qquad t\in I \tag{8}$$

$$f\in P_F^p(x),\ g\in P_\Phi^p(x) \tag{9}$$

为了解决问题(8)至(9)，我们引入集值映射 $\Sigma: C(I,\mathbb{R}^n)\longrightarrow P(C(I,\mathbb{R}^n))$ 为

$$\Sigma(x)=\Big\{a+\frac{1}{h}(b-a)t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[f(s)+g(s)]\mathrm{d}s-$$
$$\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h [f(s)+g(s)]\mathrm{d}s: f\in P_F^p(x),\ g\in P_\Phi^p(x)\Big\} \tag{10}$$

则 $x\in C(I,\mathbb{R}^n)$ 是问题(8)到(9)的解等价于 x 是集值映射 Σ 的不动点.

引理 5[8]　在(F1),(F2),(B),(G)和(Q)的假设下，P_F^p 和 P_Φ^p 是弱上半连续的.

定理 1　设从 $L^p(I,\mathbb{R}^n)$ 到 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 的映射 W 为

$$W(f)(t)=a+\frac{1}{h}(b-a)+\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^t (t-s)^{\sigma-1}f(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\sigma)}\int_0^h (h-s)^{\sigma-1}f(s)\mathrm{d}s$$

则 W 是完备连续的.

证　设映射

$$W_1(f)(t)=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-s)^{\delta-1} f(s)\mathrm{d}s$$

依据文献[8]可知 W_1 是完备连续的.

再设映射

$$W_2(f)(t)=\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1} f(s)\mathrm{d}s$$

下面证 W_2 是完备连续的.

W_2 是完备连续的等价于 W_2 是连续的，且 W_2 把有界集映射到相对紧集. W_2 连续是显然的. 下面证明对于任一有界集 $\Omega\subset L^p(I,\mathbb{R}^n)$，$W_2(\Omega)$ 是 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 里的相对紧集. 因为 $W_2(\Omega)$ 是 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 里的相对紧集等价于对 $\forall t\in I$，$W_2(\Omega)(t)$ 有界且 $W_2(\Omega)$ 是 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 里的等度连续集. 对 $\forall t\in I$，$W_2(\Omega)(t)$ 有界是显然的. 设 Ω 的上界为 M，下面证明 $W_2(\Omega)$ 是 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 里的等度连续集.

因为对 $\forall \varepsilon>0$，$\forall t,T\in I$，只要

$$|t-T|<\frac{h\Gamma(\delta)}{M\int_0^h (h-s)^{\delta-1}\mathrm{d}s}\varepsilon$$

就有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1} f(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\frac{T}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1} f(s)\mathrm{d}s\right|=\\&\left|\frac{1}{h\Gamma(\delta)}\cdot\int_0^h (h-s)^{\delta-1} f(s)\mathrm{d}s\cdot(t-T)\right|\leqslant\\&\frac{1}{h\Gamma(\delta)}\cdot\int_0^h (h-s)^{\delta-1}\,|f(s)|\,\mathrm{d}s\cdot|t-T|\leqslant\\&\frac{M}{h\Gamma(\delta)}\cdot\int_0^h (h-s)^{\delta-1}\mathrm{d}s\cdot|t-T|<\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $W_2(\Omega)$ 是 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 里的等度连续集. 所以 W_2 是完备连续的. 所以映射 W 是完备连续的.

定理 2　映射 Σ 是完备上半连续的.

证　证明与文献[8]中的证明类似.

定理 3　假设(F1),(F2),(B),(G),(Q)这5个条件成立. 如果

$$\begin{aligned}&\liminf_{k\to\infty}\left[\frac{\Psi_F(k)}{k\Gamma(\delta)}\sup_{t\in J}\int_0^t (t-s)^{\delta-1}\eta_F(s)\mathrm{d}s+\frac{\Psi_G(k)}{k\Gamma(\delta)}\eta_Q\eta_B\sup_{t\in J}\int_0^t (t-s)^{\delta-1}\eta_G(s)\mathrm{d}s+\right.\\&\left.\frac{1}{k\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}\eta_G(s)\Psi_G(k)\mathrm{d}s+\frac{1}{k\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}\Psi_F(k)\eta_F(s)\mathrm{d}s\right]<1\end{aligned}\tag{11}$$

则问题(8)和(9)至少有一个解.

证　根据定理2，Σ 是完备上半连续的. 为了利用引理3，我们还需证明集合 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 里的任意一个以原点为圆心、$\mathbb{R}(\mathbb{R}>0)$ 为半径的球 $B_{\mathbb{R}}$ 都满足 $\Sigma(B_{\mathbb{R}})\subset B_{\mathbb{R}}$. 利用反证法，假设在 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 里存在一个序列 $\{x_k\}$ 满足 $\|x_k\|_C\leqslant k$，$y_k\in\Sigma(x_k)$，$\|y_k\|_C>k$ 对所有的 $k\in\mathbb{N}_+$ 都成立，此时

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\|y_k\|_C}{k}\geqslant 1$$

根据集值映射 Σ 的定义，可知存在 $f_k\in P_F^p(x_k)$ 和 $g_k\in P_\Phi^p(x_k)$，满足

$$y_k(t)=a+\frac{1}{h}(b-a)t+W(f_k+g_k)(t)\qquad t\in I$$

对 $\forall t\in I$，因为

$$\begin{aligned}W(f_k+g_k)(t)=&\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-s)^{\delta-1}[f_k(s)+g_k(s)]\mathrm{d}s-\\&\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}[f_k(s)+g_k(s)]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\| y_k(t) \| = & \left\| a+\frac{1}{h}(b-a)t+\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-s)^{\delta-1}[f_k(s)+g_k(s)]\mathrm{d}s- \right.\\
& \left. \frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}[f_k(s)+g_k(s)]\mathrm{d}s \right\| \leqslant \\
& b+\left\| \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-s)^{\delta-1}[f_k(s)+g_k(s)]\mathrm{d}s \right\| + \\
& \left\| \frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}[f_k(s)+g_k(s)]\mathrm{d}s \right\| \leqslant \\
& b+\frac{1}{\Gamma(\delta)}\sup_{t\in J}\left\{\int_0^t (t-s)^{\delta-1}[\| f_k(s)\| + \| g_k(s)\|]\mathrm{d}s\right\}+ \\
& \frac{1}{h}\sup_{t\in J}\left\{\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}[\| f_k(s)\| + \| g_k(s)\|]\mathrm{d}s\right\}\leqslant \\
& b+\frac{\Psi_F(k)}{\Gamma(\alpha)}\sup_{t\in J}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\eta_F(s)\mathrm{d}s+\frac{\eta_B\eta_Q}{\Gamma(\alpha)}\sup_{t\in J}\left\{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[1+\eta_G(s)\Psi_G(k)]\mathrm{d}s\right\}+ \\
& \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}\Psi_F(k)\eta_F(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}[1+\eta_G(s)\Psi_G(k)]\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty}\frac{\| y_k \|_C}{k} \leqslant & \liminf_{k\to\infty}\left\{\frac{\Psi_F(k)}{k\Gamma(\alpha)}\sup_{t\in J}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\eta_F(s)\mathrm{d}s+\right.\\
& \frac{\eta_B\eta_Q}{k\Gamma(\alpha)}\sup_{t\in J}\left\{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[1+\eta_G(s)\Psi_G(k)]\mathrm{d}s\right\}+ \\
& \frac{1}{k\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}\Psi_F(k)\eta_F(s)\mathrm{d}s+ \\
& \left.\frac{1}{k\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}[1+\eta_G(s)\Psi_G(k)\right\}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

所以依据(11) 式，我们有

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\| y_k \|_C}{k}<1$$

这与前面的假设是矛盾的．定理 3 得证．

参考文献：

[1] PANG J S，STEWARD D E. Differential Variational Inequalities [J]. Math Program (Ser A)，2008，113：345－424.

[2] ANITESCU M，TASORA A. An Iterative Approach for Cone Complementarity Problems for Non-Smooth Dynamics [J]. Comp Opt Appl ，2010，47(2)：，207－235.

[3] GWINNER J. On Differential Variational Inequalities and Projected Dynamical Systems-Equivalence and a Stability Result [J]. Discrete and Continuous Dynam Syst，2007，2007：467－476.

[4] GWINNER J. A Note on Linear Differential Variational Inequalities in Hilbert Space [J]. Advances in Information & Communication，2011，391：85－91.

[5] TASORA A，ANITESCU M. A Convex Complementarity Approach for Simulating Large Granular Flow [J]. J Comp Nonlinear Dyn，2010，5(3)：10－15.

[6] KAMENSKII M，OBUKHOVSKII V，ZECCA P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces [M]. Berlin-New York：Walter de Gruyter，2001.

[7] BOTHE D. Multivalued Perturbations of m-Accretive Differential Inclusions [J]. Israel J Math，1998， 108(1)：109－138.

[8] LOI N V，DINH K T，OBUKHOVSKII V，et al. Topological Methods for Some Classes of Differential Variational Inequalities [J]. Journal of Nonlinear and Convex Analysis，2016，2016：1－18.

[9] LI C P，ZHANG F R. A Survery on the Stability of Fractional Differential Equations [J]. Eur Phys J Special Topics，

2011，193(1)：27－47.

[10] PETRÁS I. Fractioanl-Order Nonlinear Systems：Modeling，Analysis and Simulation [J]. Math Program (Ser A)，2011，113：345－424.

[11] TANG Y，FANG J. Synchronization of N-Coupled Fractional-Order Chaotic System [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul，2010，15(2)：401－412.

[12] KILBAS A A，SRIVASTAVA H M，TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations [J]. Elsevier，2006，204(49－52)：2453－2461.

[13] VARSHA D G，HOSSEIN J. Analysis of Nonautonomous Fractional Differential Equations Involving Caputo Derivatives [J]. J Math Anal Appl，2007，328(2)：1026－1033.

[14] YU J，HU C，JIAN H. a-Stability and a-Synchronization for Fractional-Order Neural Networks [J]. Elsevier Science，2012，35：82－87.

[15] LI Y，CHEN Y Q，PODLUBNY I. Stability of Fractional-Order Nonlinear Dynamic Systems：Lyapunov Direct Nethod and Generalized Mittag-Leffler Stability [J]. Comput Math Appl，2010，59(5)：1810－1821.

[16] LI Y，CHEN Y Q，PODLOBNY I. Mittag-Leffler Stability of Fractional Order Nonlinear Dynamic Systems [J]. Automatica，2009，45(8)：1965－1969.

[17] 徐 洁，张俊容，刘 佳. 求解一类广义均衡问题的交替方向法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(5)：114－118.

[18] 李 瑾，赵 辉. 二阶非线性泛函微分方程的周期性解证明 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(7)：33－37.

Topological Methods for a New Class of Fractional Differential Variational Inequalities with $\delta \in [1, 2)$

WU Xin-kun

College of Science，Guizhou Institute of Technology，Guiyang 550003，China

Abstract：In this paper，a new class of fractional differential variational inequalities with $\delta \in [1, 2)$ are introduced and studied. Firstly，a parameter，$\delta \in [1, 2)$，is added to fractional differential variational inequalities，and a new class of fractional differential variational inequalities with $\delta \in [1, 2)$ is obtained. Finally，some lemmas and theorems are used to prove that the set of solutions of these differential variational inequalities are non-blank.

Key words：differential variational inequality；fractional differential variational inequality；solutions

责任编辑 廖 坤
崔玉洁