DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.02.008

关于射影 Ricci 曲率的比较定理与共形不变性[①]

程新跃[1]，　李婷婷[2]，　殷　丽[2]

1. 重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331；2. 重庆新东方培训学校 优能中学部，重庆 400020

摘要： 主要研究了芬斯勒度量的射影 Ricci 曲率. 首先，在一个完备的芬斯勒流形上，证明了关于芬斯勒度量的射影 Ricci 曲率的一个比较定理. 其次，刻画了两个共形相关的芬斯勒度量的射影 Ricci 曲率的关系. 在此基础上，证明了两个位似相关的芬斯勒度量的射影 Ricci 曲率是相等的.

关　键　词： 芬斯勒度量；射影 Ricci 曲率；Ricci 曲率；S-曲率；共形相关

中图分类号：O186　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2019)02-0052-08

芬斯勒几何中的 Ricci 曲率是黎曼几何中 Ricci 曲率的自然推广，它是芬斯勒几何中一类重要的黎曼几何量. Ricci 曲率在射影几何中扮演着重要角色. 文献[1]给出了射影几何中关于 Ricci 曲率的比较定理. 在芬斯勒几何中，S-曲率是一类非常重要的非黎曼几何量，与黎曼几何量有着密切的联系，它是由文献[2-3]在研究黎曼-芬斯勒几何中的体积比较定理时首次提出来的. 文献[2-3]证明了：黎曼几何中的 Bishop-Gromov 体积比较定理对具有零 S-曲率的芬斯勒流形仍然成立；S-曲率与 Ricci 曲率决定了在芬斯勒流形中一个点邻近的小度量球的 Busemann-Hausdroff 测度的局部行为. 文献[4-5]深刻地刻画了一类重要的芬斯勒度量——(α，β)-度量的 S-曲率和 Ricci 曲率的性质. 文献[6]研究了具有迷向 S-曲率的 Randers 度量的 Ricci 曲率的性质. 以上研究表明：S-曲率与 Ricci 曲率有着紧密的联系，对芬斯勒度量的结构有着非常深刻的影响. 因此，一个自然的问题是：如何利用 S-曲率和 Ricci 曲率进一步深入研究芬斯勒度量的性质和几何结构？ 由此，沈忠民自然地引入了芬斯勒度量的射影 Ricci 曲率，其定义如下：

$$\mathbf{PRic}=\mathbf{Ric}+(n-1)\{\bar{\mathbf{S}}_{|m}y^{m}+\bar{\mathbf{S}}^{2}\}$$

其中

$$\bar{\mathbf{S}}=\frac{1}{n+1}\mathbf{S}$$

“|”表示关于芬斯勒度量 F 的 Berwald 联络(或 Chern 联络)的水平协变导数. 根据射影 Ricci 曲率的定义，**PRic** 可等价地表示为

$$\mathbf{PRic}=\mathbf{Ric}+\frac{n-1}{n+1}\mathbf{S}_{|m}y^{m}+\frac{n-1}{(n+1)^{2}}\mathbf{S}^{2}$$

如果一个芬斯勒度量 F 的射影 Ricci 曲率等于 0(**PRic**=0)，则称芬斯勒度量 F 是射影 Ricci 平坦的. 近年来，关于芬斯勒度量的射影 Ricci 曲率相关问题的研究受到了几何学家的关注. 文献[7]刻画了两个射影等价的芬斯勒度量的射影 Ricci 曲率的关系，并证明了：对于一个给定体积形式的芬斯勒流形，芬斯勒度量的射影

① 收稿日期：2018-01-08
基金项目：国家自然科学基金项目(11871126)；重庆师范大学科学研究基金项目(17XLB022).
作者简介：程新跃(1958-)，男，教授，博士，主要从事微分几何及其应用的研究.

Ricci曲率是一个射影不变量.文献[8]研究了射影Ricci平坦的Randers度量,得到了相应的分类定理.文献[9]研究和刻画了射影Ricci平坦的Kropina度量.

芬斯勒共形几何是芬斯勒几何中的重要组成部分.著名的Weyl定理证明了芬斯勒度量的共形性质和射影性质唯一地决定了这个度量的属性[10-11].因此,关于芬斯勒度量共形性质的研究一直受到几何学家的极大关注.对于n维芬斯勒流形上的两个芬斯勒度量F和$\overline{F}$,若流形M上存在一个标量函数$c(x)$,使得

$$\overline{F}(x, y)=\mathrm{e}^{c(x)}F(x, y)$$

则称度量的变换$F\longrightarrow\overline{F}$为共形变换,或称$F$和$\overline{F}$共形相关,称$c=c(x)$为共形因子.当$c$为常数时,称$F$和$\overline{F}$位似相关.一个自然的问题是:在共形变换下,芬斯勒度量中的一些重要几何量(如Cartan张量、Ricci曲率、Landsberg曲率、S-曲率等)有什么变换规律? 文献[12]研究了芬斯勒度量的基本张量、角度量张量和Cartan张量在共形变换下的关系.在此基础上,文献[10]刻画了共形变换下的芬斯勒度量的一些重要几何量(包括黎曼曲率、Ricci曲率、Landsberg曲率、平均Landsberg曲率、S-曲率等)的变换规律,并讨论了在共形变换下这些几何量保持不变的充要条件.文献[13]证明了:保持非Randers型的(α, β)-度量成为Douglas度量的属性不变的共形变换是位似的;将具有迷向S-曲率的非黎曼(α, β)-度量变换成为另一具有迷向S-曲率的非黎曼(α, β)-度量的共形变换是位似变换.根据上述研究,我们很自然地想到在共形变换下,围绕一些重要的芬斯勒度量的射影Ricci曲率展开研究,刻画其射影Ricci曲率的关系与共形不变性.

本文主要针对芬斯勒度量的射影Ricci曲率的相关问题进行了研究.首先,证明了关于芬斯勒度量的射影Ricci曲率的一个比较定理.其次,讨论了两个共形相关的芬斯勒度量的射影Ricci曲率的变化规律.并在此基础之上,证明了两个位似相关的芬斯勒度量的射影Ricci曲率是相等的.

1 预备知识

令F是n维流形M上的一个芬斯勒度量.在局部坐标系(x, y)下,度量F的测地线可以由下述二阶微分方程组来刻画:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}+2G^i\left(x, \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right)=0$$

其中:

$$G^i(x, y)=\frac{1}{4}g^{il}\{[F^2]_{x^ky^l}y^k-[F^2]_{x^l}\}$$

$$G^i(x, \lambda y)=\lambda^2G^i(x, y)\qquad \lambda>0$$

$$g_{ij}(x, y)=\frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}(x, y)\qquad (g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$$

$G^i=G^i(x, y)$被称为F的测地系数.

芬斯勒几何中的黎曼曲率是黎曼几何中的黎曼曲率的一个自然推广.根据芬斯勒度量的测地系数,我们可以确定度量的黎曼曲率,其定义为

$$\mathbf{R}_y=R^i_k\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes \mathrm{d}x^k$$

其中

$$R^i_k=2\frac{\partial G^i}{\partial x^k}-\frac{\partial^2G^i}{\partial x^m\partial y^k}y^m+2G^m\frac{\partial^2G^i}{\partial y^m\partial y^k}-\frac{\partial G^i}{\partial y^m}\frac{\partial G^m}{\partial y^k}$$

进一步地,黎曼曲率的迹

$$\mathbf{Ric}=R^m_m$$

被称为芬斯勒度量的Ricci曲率.

定义芬斯勒流形(M, F)上的 Busemann-Hausdorff 体积形式为

$$\mathrm{d}V_F = \sigma_F(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

其中

$$\sigma_F(x) = \frac{\mathrm{Vol}(B^n(1))}{\mathrm{Vol}\{y \in \mathbb{R}^n \mid F(x, y) < 1\}}$$

这里 $\mathrm{Vol}\{\cdot\}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏体积函数. 从而，芬斯勒度量 F 的 S-曲率定义为

$$\mathbf{S}(x, y) = \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m \frac{\partial(\ln \sigma_F)}{\partial x^m}$$

显然，$\mathbf{S}(x, y)$ 关于 y 是一阶正齐次的，即

$$\mathbf{S}(x, \lambda y) = \lambda \mathbf{S}(x, y) \qquad \lambda > 0$$

Cartan 张量 $\boldsymbol{C}$ 是定义在 $\pi^* TM$ 上的三阶对称张量：

$$\boldsymbol{C} = C_{ijk}(x, y)\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k$$

$$C_{ijk}(x, y) = \frac{1}{4}[F^2]_{y^i y^j y^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$$

它的平均值 $\boldsymbol{I} = I_k(x, y)\mathrm{d}x^k$ 称为平均 Cartan 张量，其中

$$I_k(x, y) = g^{ij} C_{ijk}(x, y) \qquad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$$

此外，Cartan 张量 $\boldsymbol{C}$ 和平均 Cartan 张量 $\boldsymbol{I}$ 关于 y 是负一阶正齐次的，即：

$$\boldsymbol{C}_{\lambda y} = \lambda^{-1}\boldsymbol{C}_y \qquad \boldsymbol{I}_{\lambda y} = \lambda^{-1}\boldsymbol{I}_y \qquad \lambda > 0$$

对于任意一个 $y \in T_p M (y \neq 0)$，Landsberg 曲率的定义为

$$\mathbf{L}_y = L_{ijk}(x, y)\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k$$

其中

$$L_{ijk}(x, y) = -\frac{1}{2} y^m g_{ml} \frac{\partial^3 G^l}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}$$

进一步地，Landsberg 曲率系数还可表示为

$$L_{ijk}(x, y) = -\frac{1}{2} g_{ij|k} = C_{ijk|m} y^m$$

其中，“|”表示关于芬斯勒度量 F 的 Berwald 联络的水平协变导数[14]. 进而，平均 Landsberg 曲率

$$\mathbf{J}_y = J_i(x, y)\mathrm{d}x^i : T_p M \longrightarrow R$$

有如下定义：

$$J_i(x, y) = g^{ij} L_{ijk} = I_{i|k} y^k$$

定义 1　设 $\overline{F}$ 和 F 是 n 维芬斯勒流形上的芬斯勒度量，若流形 M 上存在一个标量函数 $c(x)$，使得

$$\overline{F}(x, y) = \mathrm{e}^{c(x)} F(x, y)$$

则称度量的变换 $F \longrightarrow \overline{F}$ 为共形变换，或称 F 和 $\overline{F}$ 共形相关，称 $c = c(x)$ 为共形因子. 特别地，若 c 为常数，则称度量的变换 $F \longrightarrow \overline{F}$ 为位似变换，或称 F 和 $\overline{F}$ 位似相关.

根据定义 1，容易得到芬斯勒度量的基本张量、角度量张量和 Cartan 张量等在共形变换下的基本关系.

引理 1[12]　设 $\overline{F}$ 和 F 是 n 维芬斯勒流形上的芬斯勒度量，若流形 M 上存在一个标量函数 $c(x)$，使得 $\overline{F}(x, y) = \mathrm{e}^{c(x)} F(x, y)$，则：

(a)　$\overline{g}_{ij}(x, y) = \mathrm{e}^{2c(x)} g_{ij}(x, y)$，$\overline{g}^{ij}(x, y) = \mathrm{e}^{-2c(x)} g^{ij}(x, y)$，其中$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$；

(b)　$\overline{h}_{ij}(x, y) = \mathrm{e}^{2c(x)} h_{ij}(x, y)$，这里 $h_{ij} = g_{ij} - F_{y^i} F_{y^j}$ 称为 F 的角度量张量；

(c)　$\overline{y}_k = \mathrm{e}^{2c(x)} y_k$；

(d)　$\overline{C}_{ijk}(x, y) = \mathrm{e}^{2c(x)} C_{ijk}(x, y)$；

(e) $\overline{C}^j_{ik}(x,y)=C^j_{ik}(x,y)$，$\overline{I}_k(x,y)=I_k(x,y)$，其中 $\boldsymbol{C}^j_{ik}=g^{jl}\boldsymbol{C}_{lik}$，$I_k=g^{ij}\boldsymbol{C}_{ijk}$.

由引理1(e)可知，C^j_{ik} 和平均Cartan张量 $\boldsymbol{I}=I_k(x,y)\mathrm{d}x^k$ 是共形不变量.

2 射影Ricci曲率的比较定理

定理1 设(M,F)是完备的芬斯勒流形. 若 F 满足 $\mathbf{PRic}\geqslant\mathbf{Ric}$，则 $\mathbf{S}=0$.

证 设(M,F)是完备的芬斯勒流形. 根据射影Ricci曲率的定义，可知

$$\mathbf{PRic}=\mathbf{Ric}+\frac{n-1}{n+1}S_{|m}y^m+\frac{n-1}{(n+1)^2}\boldsymbol{S}^2 \tag{1}$$

其中，“|”表示关于芬斯勒度量 F 的Berwald联络的水平协变导数.

对于任意 $x\in M$ 和任意固定的 $y\in T_xM\backslash\{0\}$，令 $c=c(t)$ 为满足 $c(0)=x$，$\dot{c}(0)=y$ 的度量 F 的测地线. 定义

$$\mathbf{S}(t)=\mathbf{S}(c(t),\dot{c}(t))\qquad -\infty<t<+\infty$$

则

$$\mathbf{S}'(t)=\mathbf{S}_{|m}(c(t),\dot{c}(t))\dot{c}^m(t)$$

若 $\mathbf{PRic}\geqslant\mathbf{Ric}$，则由(1)式得

$$\mathbf{S}_{|m}y^m+\frac{1}{n+1}\mathbf{S}^2=\frac{n+1}{n-1}(\mathbf{PRic}-\mathbf{Ric})\geqslant 0$$

即 $\mathbf{S}(t)$ 满足

$$\mathbf{S}'(t)+\frac{1}{n+1}\mathbf{S}^2(t)\geqslant 0 \tag{2}$$

令

$$\mathbf{S}_0(t)=\frac{\mathbf{S}(x,y)}{(n+1)+t\mathbf{S}(x,y)}$$

容易得到

$$\mathbf{S}_0(0)=\frac{\mathbf{S}(x,y)}{n+1}$$

且

$$\mathbf{S}_0{}'(t)=-\frac{\mathbf{S}^2(x,y)}{[(n+1)+t\mathbf{S}(x,y)]^2}$$

由此可得，$\mathbf{S}_0(t)$ 满足

$$\mathbf{S}_0{}'(t)+\mathbf{S}_0^2(t)=0 \tag{3}$$

进一步，定义

$$f(t)=\exp\left\{\int_0^t\left[\frac{\mathbf{S}(s)}{n+1}+\mathbf{S}_0(s)\right]\mathrm{d}s\right\}\left\{\frac{\mathbf{S}(t)}{n+1}-\mathbf{S}_0(t)\right\}$$

并关于 t 求导，结合(2)式和(3)式，可得

$$f'(t)=\exp\left\{\int_0^t\left[\frac{\mathbf{S}(s)}{n+1}+\mathbf{S}_0(s)\right]\mathrm{d}s\right\}\left\{\frac{1}{n+1}\left[\mathbf{S}'(t)+\frac{1}{n+1}\mathbf{S}^2(t)\right]-[\mathbf{S}_0{}'(t)+\mathbf{S}_0^2(t)]\right\}\geqslant 0$$

注意到

$$f(0)=\frac{\mathbf{S}(x,y)}{n+1}-\mathbf{S}_0(0)=0$$

因此，根据 $f(0)=0$，有

$$f(t)\geqslant 0\qquad t\geqslant 0$$

且

$$f(t) \leqslant 0 \qquad t \leqslant 0$$

根据 $f(t)$ 的定义，可以得到 $\mathbf{S}(t)$ 与 $\mathbf{S}_0(t)$ 的关系，即

$$\mathbf{S}(t) \geqslant (n+1)\mathbf{S}_0(t) \qquad t \geqslant 0$$

且

$$\mathbf{S}(t) \leqslant (n+1)\mathbf{S}_0(t) \qquad t \leqslant 0$$

现假设 $\mathbf{S}(x, y) \neq 0$，并令 $t_0 = -\dfrac{n+1}{\mathbf{S}(x, y)}$. 则：

(i) 若 $\mathbf{S}(x, y) > 0$，则 $t_0 < 0$，且

$$\mathbf{S}(c(t_0), \dot{c}(t_0)) \leqslant (n+1)\lim_{t \to t_0^-} \mathbf{S}_0(t) = -\infty$$

由 S-曲率在流形 M 上的光滑性及 $\mathbf{S}(c(t), \dot{c}(t))$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上的连续性，可知上述结论是不可能的.

(ii) 若 $\mathbf{S}(x, y) < 0$，则 $t_0 > 0$，且

$$\mathbf{S}(c(t_0), \dot{c}(t_0)) \geqslant (n+1)\lim_{t \to t_0^+} \mathbf{S}_0(t) = +\infty$$

同理，由 S-曲率在流形 M 上的光滑性及 $\mathbf{S}(c(t), \dot{c}(t))$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上的连续性，可知上述结论是不可能的. 从而，我们可以断定 $\mathbf{S}(x, y) = 0$. 根据 x, y 的任意性，可得 S-曲率恒为 0.

需要说明的是：定理 1 中关于芬斯勒流形是完备的条件不能去掉，否则结论不成立.

例 1[14]　令 F 是定义在一个强凸区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Funk 度量，即 F 满足 $F_{x^k} = FF_{y^k}$. 我们知道，Funk 度量 F 是正完备但非完备的芬斯勒度量，且 F 具有常数旗曲率和常 S-曲率，即

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{4} \qquad \mathbf{S}(x, y) = \frac{n+1}{2}F > 0 \tag{4}$$

由此可得，度量 F 的 Ricci 曲率为

$$\mathbf{Ric} = (n-1)\mathbf{K}F^2 = -\frac{(n-1)}{4}F^2 < 0 \tag{5}$$

由(4) 式，还可得到

$$\mathbf{S}_{|m} = \frac{(n+1)}{2}F_{|m} = 0 \tag{6}$$

将(4)－(6) 式代入(1) 式，可得

$$\mathbf{PRic} = \mathbf{Ric} + \frac{n-1}{(n+1)^2}\mathbf{S}^2 > \mathbf{Ric}$$

但在此情形下，由(4) 式可见度量 F 的 S-曲率为

$$\mathbf{S}(x, y) = \frac{n+1}{2}F > 0 (\neq 0)$$

综上可知，对于 Funk 度量，满足 $\mathbf{PRic} > \mathbf{Ric}$，但 $\mathbf{S} \neq 0$.

3　射影 Ricci 曲率在共形变换下的变化规律

设 $\overline{F}$ 与 F 是 n 维芬斯勒流形上的两个芬斯勒度量，则 $\overline{F}$ 与 F 的测地系数 $\overline{\mathbf{G}}^i$ 和 $\mathbf{G}^i$ 有如下关系

$$\overline{\mathbf{G}}^i = \mathbf{G}^i + \frac{\overline{F}_{|k}y^k}{2\overline{F}}y^i + \frac{\overline{F}}{2}g^{il}\{\overline{F}_{|k \cdot l}y^k - \overline{F}_{|l}\} \tag{7}$$

其中，“|”表示 $\overline{F}$ 关于 F 的水平协变导数. 若 $\overline{F}$ 与 F 是两个共形相关的芬斯勒度量，即

$$\overline{F}(x, y) = \mathrm{e}^{c(x)}F(x, y)$$

则：

$$\overline{F}_{|k} = e^{c(x)} c_k F \qquad \overline{F}_{|k\cdot l} = e^{c(x)} c_k F_{y^l} \tag{8}$$

根据引理1，有

$$\overline{g}^{il}(x, y) = e^{-2c(x)} g^{il}(x, y) \tag{9}$$

将(8),(9)式代入(7)式，可得到

$$\overline{G}^i = G^i + (c_k y^k) y^i - \frac{F^2}{2} c^i = G^i + P y^i - Q^i \tag{10}$$

其中 $P = c_k y^k$，$Q^i = \frac{F^2}{2} c^i$，$c^i = g^{il} c_l$. 对(10)式两边关于 y^j 求导，可以得到

$$\overline{G}^i_j = G^i_j + P_j y^i + P \delta^i_j - Q^i_j \tag{11}$$

其中：

$$G^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \qquad P_j = \frac{\partial P}{\partial y^j}$$

$$Q^i_j = \frac{\partial Q^i}{\partial y^j} = y_j c^i - F^2 c^r C^i_{jr} \tag{12}$$

进一步，根据文献[1]对两个共形相关的芬斯勒度量的曲率性质的研究，我们可以知道，$\overline{F}$ 和 F 的 Ricci 曲率、S-曲率满足如下关系：

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{Ric}}(y) = {} & \mathbf{Ric}(y) + (n-2)(P^2 - P_{|r} y^r - F^2 \| \nabla c \|^2_F) - 2F^2(c^r J_r) - F^2 g^{ij} c_{i|j} - \\ & F^2 (C^r I_r)_{|0} - 2PF^2(c^r I_r) + 2F^4 I_r c^j c^k C^r_{jk} - F^4 c^j c^k I_{j\cdot k} - F^4 c^j c^k C^s_{jr} C^r_{ks}\end{aligned} \tag{13}$$

$$\overline{\mathbf{S}}(x, y) = \mathbf{S}(x, y) + F^2 c^r I_r \tag{14}$$

这里 $\| \nabla c \|^2_F = c_i c^i = g^{ij} c_i c_j$，“|”表示关于芬斯勒度量 F 的 Berwald 联络的水平协变导数.

根据射影 Ricci 曲率的定义，我们可以得到下面定理：

定理2 设 $\overline{F}$ 和 F 是流形 M 上两个共形相关的芬斯勒度量，即 $\overline{F}(x, y) = e^{c(x)} F(x, y)$. 则 $\overline{F}$ 和 F 的射影 Ricci 曲率满足

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{PRic}} = {} & \mathbf{PRic} + \left\{ 2I_r C^r_{jk} - C^s_{jr} C^r_{ks} - \frac{2}{n+1} I_{j\cdot k} + \frac{n-1}{(n+1)^2} I_j I_k \right\} c^j c^k F^4 + \\ & \left\{ \frac{2(n-1)}{(n+1)^2} (c^r I_r) \mathbf{S} + \frac{n-1}{n+1} c^l \mathbf{S}_{y^l} - \frac{2}{n+1} (c^r I_r)_{|0} - (n-2) \| \nabla c \|^2_F - 2c^r J_r - 2P(c^r I_r) - g^{ij} c_{i|j} \right\} F^2 + \\ & (n-2)(P^2 - P_{|r} y^r) - \frac{2(n-1)}{n+1} P \mathbf{S}\end{aligned} \tag{15}$$

其中，$P = c_0 = c_k y^k$，$\overline{\mathbf{PRic}}$ 和 $\mathbf{PRic}$ 分别表示 $\overline{F}$ 和 F 的射影 Ricci 曲率，标量函数 $c = c(x)$ 是共形因子，“|”表示关于芬斯勒度量 F 的 Berwald 联络的水平协变导数.

证 设 $\overline{F}$ 和 F 是流形 M 上两个共形相关的芬斯勒度量，即

$$\overline{F}(x, y) = e^{c(x)} F(x, y) \tag{16}$$

$\overline{F}$ 和 F 的射影 Ricci 曲率分别为：

$$\overline{\mathbf{PRic}} = \overline{\mathbf{Ric}} + \frac{n-1}{n+1} \overline{\mathbf{S}}_{;m} y^m + \frac{n-1}{(n+1)^2} \overline{\mathbf{S}}^2 \tag{17}$$

$$\mathbf{PRic} = \mathbf{Ric} + \frac{n-1}{n+1} \mathbf{S}_{|m} y^m + \frac{n-1}{(n+1)^2} \mathbf{S}^2 \tag{18}$$

其中，“;”表示关于芬斯勒度量 $\overline{F}$ 的 Berwald 联络的水平协变导数，“|”表示关于芬斯勒度量 F 的 Berwald 联络的水平协变导数，$\overline{\mathbf{S}}$ 和 $\mathbf{S}$ 分别表示 $\overline{F}$ 和 F 的 S-曲率.

由(14)式，我们可以得到

$$\overline{\mathbf{S}}_{;m} y^m = (\mathbf{S} + F^2 c^r I_r)_{;m} y^m =$$

$$\mathbf{S}_{;m}y^m + c^r I_r (F^2)_{;m} y^m + F^2 I_r c^r_{;m} y^m + F^2 c^r I_{r;m} y^m \tag{19}$$

根据(10)式，并利用测地系数 G^i 和 S-曲率 $\mathbf{S}$ 的齐次性，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{;m}y^m = y^m \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x^m} - \overline{G}^l_m y^m \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y^l} = \\ \mathbf{S}_{|m}y^m - 2(Py^l - Q^l)\mathbf{S}_{y^l} = \\ \mathbf{S}_{|m}y^m - 2P\mathbf{S} + F^2 c^l \mathbf{S}_{y^l}\end{aligned} \tag{20}$$

类似地，由(11),(12)式，我们可以得到

$$\begin{aligned}c^r_{;m}y^m = y^m \frac{\partial c^r}{\partial x^m} + c^t \overline{G}^r_{tm} y^m = \\ c^r_{|m}y^m + c^t(P_t y^r + P\delta^r_t - Q^r_t) = \\ c^r_{|m}y^m + P_t c^t y^r + F^2 c^t c^p C^r_{tp}\end{aligned} \tag{21}$$

由(10)－(12)式，结合测地系数 G^i 和平均 Cartan 张量 $\boldsymbol{I}$ 的齐次性，可得

$$\begin{aligned}I_{r;m}y^m = y^m \frac{\partial I_r}{\partial x^m} - \overline{G}^l_m y^m \frac{\partial I_r}{\partial y^l} - I_t \overline{G}^t_{rm} y^m = \\ I_{r|m}y^m - 2(Py^l - Q^l)I_{r\cdot l} - I_t(P_r y^t + P\delta^t_r - Q^t_r) = \\ I_{r|m}y^m + PI_r + F^2 c^l I_{r\cdot l} + I_t c^t y_r - F^2 I_t c^p C^t_{rp}\end{aligned} \tag{22}$$

根据(16)式可知

$$(F^2)_{;m}y^m = (\mathrm{e}^{-2c(x)}\overline{F}^2)_{;m}y^m = -2\mathrm{e}^{-2c(x)}\overline{F}^2 P = -2PF^2 \tag{23}$$

将(20)－(23)式代入(19)式，我们可以得到

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{S}}_{;m}y^m = \mathbf{S}_{|m}y^m + c^r I_r (F^2)_{|m} y^m + F^2 I_r c^r_{|m} y^m + F^2 c^r I_{r|m} y^m = \\ \mathbf{S}_{|m}y^m - 2P\mathbf{S} + F^2 c^l \mathbf{S}_{y^l} + F^2 (I_r C^r)_{|0} + F^4 c^r c^l I_{r\cdot l}\end{aligned} \tag{24}$$

将(13),(14)式和(24)式代入(17)式，经整理可得(15)式成立.

特别地，根据定理 2，我们得到下面的结论：

推论 1　设 $\overline{F}$ 和 F 是流形 M 上的两个共形相关的芬斯勒度量，即 $\overline{F}(x, y) = \mathrm{e}^{c(x)}F(x, y)$. 若 c 为常数，则 $\overline{\mathbf{PRic}} = \mathbf{PRic}$.

推论 1 表明：若两个芬斯勒度量是位似相关的，则度量的射影 Ricci 曲率是保持不变的.

本文所得到的结论对于进一步探讨芬斯勒度量的射影 Ricci 曲率的性质，以及深入揭示射影 Ricci 曲率对芬斯勒度量的几何结构和性质的影响有着重要意义.

参考文献：

[1] CHENG X Y, SHEN Z M. A Comparison Theorem on the Ricci Curvature in Projective Geometry [J]. Annals of Global Analysis and Geometry, 2003, 23(2): 141－155.

[2] SHEN Z M. Volume Comparison and Its Applications in Riemann-Finsler Teometry [J]. Advances in Mathematics, 1997, 128: 306－328.

[3] SHEN Z M. Lectures on Finsler Geometry [M]. Singapore: World Scientific Co, 2001.

[4] CHENG X Y, SHEN Z M. A Class of Finsler Metrics with Isotropic S-Curvature [J]. Israel Journal of Mathematics, 2009, 169(1): 317－340.

[5] CHENG X Y, SHEN Z M. TIAN Y F. A Class of Einstein (α, β)-Metrics [J]. Isral Journal of Mathematics, 2012, 192(10): 221－249.

[6] MO X H, YU C T. On the Ricci Curvature of a Randers Metric of Isotropic S-Curvature [J]. Acta Math Sin, 2008, 24(6): 911－916.

[7] 程新跃，马小玉，沈玉玲. 射影 Ricci 曲率及其射影不变性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(8): 92－96.

[8] CHENG X Y, SHEN Y L, MA X Y. On a Class of Projective Ricci Flat Finsler Metrics [J]. Publ Math Debrecen, 2017, 90(1/2): 169-180.

[9] CHENG X Y, MA X Y, SHEN Y L. On Projective Ricci Flat Kropina Metrics [J]. Journal of Mathematics (PRC), 2017, 37(4): 705-713.

[10] BACSO S, CHENG X Y. Finsler Conformal Transformations and the Curvature Invariances [J]. Publ Math Debrecen, 2007, 70(1/2): 221-231.

[11] SZILASI J, VINCZE C S. On Conformal Equivalence of Riemann-Finsler Metrics [J]. Publ Math Debrecen, 1998, 52(1/2): 167-185.

[12] ANTONELLI P L. Handbook of Finsler Geometry [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004.

[13] CHEN G Z, CHENG X Y, ZOU Y Y. On Conformal Transformations between Two (α, β)-Metrics [J]. Differential Geometry and Its Applications, 2013, 31(2): 300-307.

[14] SHEN Z M. Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2001.

On the Comparison Theorem and Conformal Invariance of a Projective Ricci Curvature

CHENG Xin-yue[1], LI Ting-ting[2], YIN Li[2]

1. School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China;

2. You Can Secondary School Department, Chongqing New Oriental Training School, Chongqing 400020, China

Abstract: In this paper, we study the projective Ricci curvature in Finsler geometry. First, we obtain that a comparison theorem on the projective Ricci curvature on a complete Finsler manifold. Then, we characterize the relations between two projective Ricci curvatures for two conformally related Finsler metrics on a manifold. On this basis, we prove that if two Finsler metrics are homothetically related, then their projective Ricci curvatures are equal.

Key words: Finsler metric; projective Ricci curvature; Ricci curvature; S-curvature; conformally related

责任编辑 廖 坤
崔玉洁