DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.02.009

非局部非线性 Schrödinger 方程组解的渐近行为[①]

魏　娟，　朱朝生

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 研究了临界带有非局部非线性项的 Schrödinger 方程组解的渐近行为，通过对方程组解的衰减估计证明其渐近自由解的非存在性.

关　键　词： Schrödinger 方程组；时间衰减估计；渐近自由解

中图分类号：O175.29　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2019)02-0060-04

本文我们研究如下带非局部项的非线性 Schrödinger 方程组：

$$\begin{cases} i\partial_t w_1 + \dfrac{1}{2m_1}\Delta w_1 + \gamma_1 w_1 \displaystyle\int_{-\infty}^{x} |w_1|^2 \mathrm{d}s = \alpha_1 |w_1|^2 w_1 + \beta_1 \overline{w}_1^2 w_2 & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ i\partial_t w_2 + \dfrac{1}{2m_2}\Delta w_2 + \gamma_2 w_2 \displaystyle\int_{-\infty}^{x} |w_2|^2 \mathrm{d}s = \alpha_2 |w_2|^2 w_2 + \beta_2 w_1^3 & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ w_1(0,x) = \psi_1(x),\ w_2(0,x) = \psi_2(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

其中：m_j 为粒子的质量；β_j 是耗散参数；$\alpha_j, \gamma_j, \beta_j \in \mathbb{C}$；$j=1,2$；$w_j$ 为未知复值函数.

Schrödinger 方程在非线性光学、激光、孤波的传播中有重要应用. 文献[1]研究了方程组(1)在没有非局部项的情况下其渐近自由解的非存在性. 文献[2]证明了 Schrödinger 方程在能量空间 $H^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ 中 Cauchy 问题的适定性. 文献[3]证明了一类非线性 Schrödinger 方程存在正解以及解的聚集性，同时给出了解的衰减性估计. 文献[4]研究了带有非线性项 $|u|^p u$ 的高阶非线性 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题. 对于 Schrödinger 方程的其他相关研究，可以参考文献[5-7]. 本文的主要目的是在文献[1]的基础上进一步证明方程组(1)的渐近自由解的非存在性.

首先定义 f 的 Fourier 变换如下：

$$F[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\zeta\cdot x} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \qquad x \in \mathbb{R}$$

对 $m, s \in \mathbb{R}$，Sobolev 空间 $H^{m,s}(\mathbb{R})$ 满足

$$H^{m,s}(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}):\ \|(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}(1-\Delta)^{\frac{m}{2}} f\|_{L^2} < \infty\}$$

用 C 表示不同的正常数. 由方程组(1)可以得到相应的自由 Schrödinger 方程组

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 + \dfrac{1}{2m_1}\Delta u_1 + \gamma_1 u_1 \displaystyle\int_{-\infty}^{x} |u_1|^2 \mathrm{d}s = 0 \\ i\partial_t u_2 + \dfrac{1}{2m_2}\Delta u_2 + \gamma_2 u_2 \displaystyle\int_{-\infty}^{x} |u_2|^2 \mathrm{d}s = 0 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $u_j(0,x) = \phi_j(x)$ $(j=1,2)$. 若存在方程组(2)的 L^2-自由解(u_1, u_2)，使得

---

① 收稿日期：2018-01-03
基金项目：国家自然科学基金项目(11571283)；重庆市博士后科研项目(渝 XM201102006).
作者简介：魏　娟(1991-)，女，硕士研究生，主要从事偏微分方程现代理论的研究.
通信作者：朱朝生，副教授.

$$\lim_{t\to\pm\infty}(\|w_1-u_1\|_{L^2}+\|w_2-u_2\|_{L^2})=0$$

则称方程组(1)的解(w_1,w_2)是渐近自由的.

将方程组(1)的各方程两边分别乘以$\overline{w_1}$和$\overline{w_2}$，取虚部，在$\mathbb{R}$上积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w_1\|_{L^2}^2+\|w_2\|_{L^2}^2)=2\mathrm{Im}\,(\alpha_1\|w_1\|_{L^4}^4+\alpha_2\|w_2\|_{L^4}^4)+2\mathrm{Im}\left(\beta_1\int_{\mathbb{R}}\overline{w_1^3}w_2\mathrm{d}x+\beta_2\int_{\mathbb{R}}w_1^3\overline{w_2}\mathrm{d}x\right)-$$
$$2\mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}}\gamma_1|w_1|^2\int_{-\infty}^{x}|w_1|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}\gamma_2|w_2|^2\int_{-\infty}^{x}|w_2|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x\right)\qquad(3)$$

假设$\mathrm{Im}\,\alpha_j\leqslant 0$，$\mathrm{Im}\,\gamma_j\geqslant 0$，$j=1,2$且$\beta_1=\overline{\beta}_2$，则有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w_1\|_{L^2}^2+\|w_2\|_{L^2}^2)\leqslant 0$(见文献[8-9]). 应用文献[10]中的方法，容易得到方程组(1)的Cauchy问题解的存在性和解的L^∞-时间衰减估计，即下面的引理1：

引理1 设$\mathrm{Im}\,\alpha_j\leqslant 0$，$\mathrm{Im}\,\gamma_j\geqslant 0$，$3m_1=m_2$，$\psi_j(x)\in H^{1,1}(\mathbb{R})$，$j=1,2$，$\beta_1=\overline{\beta}_2$. 假设对某个$\varepsilon>0$，有$\|\psi_1(x)\|_{H^{1,1}}+\|\psi_2(x)\|_{H^{1,1}}<\varepsilon$，则存在方程组(1)的解$w=(w_j)_{j=1,2}$，使得$w\in C([0,\infty];H^{1,1}(\mathbb{R}))$，且$\|w\|_{L^\infty}\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}}$.

引理2[11] 设(u_1,u_2)为方程组(2)的光滑解. 若$\phi_j\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})(j=1,2)$，且$2\leqslant q\leqslant\infty$，则：

(i) 存在正常数C_j，使得$\|u_j\|_{L^q}\geqslant C_jt^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}$($\forall t\geqslant T_0$)；

(ii) 存在常数c_j，使得$\|u_j\|_{L^q}\leqslant c_jt^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}$($\forall t\geqslant 0$).

本文的主要结果如下：

定理1 设$3m_1=m_2$，$\mathrm{Re}\,\alpha_j>0$，$\mathrm{Im}\,\alpha_j\leqslant 0$，$\mathrm{Im}\,\gamma_j\geqslant 0$，$j=1,2$且$\beta_1=\overline{\beta}_2$. 若方程组(1)的解$w\in C([0,\infty);H^{1,1}(\mathbb{R}))$满足衰减估计$\|w\|_{L^\infty}\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}}$，则不存在方程组(2)的自由解$(u_1,u_2)$，使得

$$\phi=(\phi_1(x),\phi_2(x))\neq(0,0)\qquad \phi\in H^{1,1}(\mathbb{R})$$

且

$$\lim_{t\to\infty}(\|w_1(t)-u_1(t)\|_{L^2}+\|w_2(t)-u_2(t)\|_{L^2})=0$$

证 假设存在方程组(2)的解(u_1,u_2)，使得

$$\lim_{t\to\infty}(\|w_1-u_1\|_{L^2}+\|w_2-u_2\|_{L^2})=0\qquad(4)$$

将方程组(1)的各方程两边分别乘以$\overline{u}_1$和$\overline{u}_2$，取实部，在$\mathbb{R}$上积分可得：

$$\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}}\partial_t\overline{w_1}\cdot u_1\mathrm{d}x=-\frac{1}{2m_1}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\Delta\overline{w_1}\cdot u_1\mathrm{d}x-\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}u_1\overline{\gamma}_1\overline{w_1}\overline{\int_{-\infty}^{x}|w_1|^2\mathrm{d}s}\mathrm{d}x+$$
$$\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\overline{\alpha}_1|w_1|^2\overline{w_1}\cdot u_1\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\overline{\beta}_1|w_1|^2\overline{w_2}\cdot u_1\mathrm{d}x\qquad(5)$$

$$\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}}\partial_t\overline{w_2}\cdot u_2\mathrm{d}x=-\frac{1}{2m_2}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\Delta\overline{w_2}\cdot u_2\mathrm{d}x-\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\overline{\gamma}_2u_2\overline{w_2}\overline{\int_{-\infty}^{x}|w_2|^2\mathrm{d}s}\mathrm{d}x+$$
$$\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\overline{\alpha}_2|w_2|^2\overline{w_2}\cdot u_2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\overline{\beta}_2\overline{w_1^3}\cdot u_2\mathrm{d}x\qquad(6)$$

将方程组(2)的各方程两边分别乘以$\overline{w_1}$和$\overline{w_2}$，取实部，在$\mathbb{R}$上积分可得：

$$\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}}\partial_tu_1\cdot\overline{w_1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2m_1}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\Delta\overline{w_1}\cdot u_1\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\gamma_1u_1\overline{w_1}\int_{-\infty}^{x}|u_1|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x\qquad(7)$$

$$\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}}\partial_tu_2\cdot\overline{w_2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2m_2}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\Delta\overline{w_2}\cdot u_2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\gamma_2u_2\overline{w_2}\int_{-\infty}^{x}|u_2|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x\qquad(8)$$

由(5)-(8)式可得

$$\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}}(\partial_t\overline{w_1}\cdot u_1+\partial_t\overline{w_2}\cdot u_2+\partial_tu_1\cdot\overline{w_1}+\partial_tu_2\cdot\overline{w_2})\mathrm{d}x=$$
$$\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(\overline{\alpha}_1|w_1|^2\overline{w_1}\cdot u_1+\overline{\beta}_1|w_1|^2\overline{w_2}\cdot u_1+\overline{\alpha}_2|w_2|^2\overline{w_2}\cdot u_2+\overline{\beta}_2\overline{w_1^3}\cdot u_2)\mathrm{d}x-$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} u_1\bar{\gamma}_1\bar{w}_1\int_{-\infty}^{x}|w_1|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x-\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\bar{\gamma}_2u_2\bar{w}_2\int_{-\infty}^{x}|w_2|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\\
&\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\gamma_1u_1\bar{w}_1\int_{-\infty}^{x}|u_1|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\gamma_2u_2\bar{w}_2\int_{-\infty}^{x}|u_2|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x=\\
&\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(\bar{\alpha}_1|u_1|^4+\bar{\alpha}_2|u_2|^4)\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(\bar{\alpha}_1|w_1|^2\bar{w}_1\cdot u_1-\bar{\alpha}_1|u_1|^4)\mathrm{d}x+\\
&\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(\bar{\alpha}_2|w_2|^2\bar{w}_2\cdot u_2-\bar{\alpha}_2|u_2|^4)\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(\bar{\beta}_1|w_1|^2\bar{w}_2\cdot u_1+\bar{\beta}_2\bar{w}_1^3\cdot u_2)\mathrm{d}x-\\
&\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\left(u_1\bar{\gamma}_1\bar{w}_1\int_{-\infty}^{x}|w_1|^2\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x-\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\left(\bar{\gamma}_2u_2\bar{w}_2\int_{-\infty}^{x}|w_2|^2\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x+\\
&\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\left(\gamma_1u_1\bar{w}_1\int_{-\infty}^{x}|u_1|^2\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\left(\gamma_2u_2\bar{w}_2\int_{-\infty}^{x}|u_2|^2\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x=\\
&\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4+\Phi_5+\Phi_6+\Phi_7+\Phi_8
\end{aligned}\tag{9}
$$

下面估计方程(9)右边的各项．首先由 $\mathrm{Re}\,\alpha_j>0(j=1,2)$ 及引理 2 可知 $\Phi_1\geqslant Ct^{-1}$．其次考虑 Φ_2．因为

$$
\begin{aligned}
\Phi_2&\leqslant\int_{\mathbb{R}}(|\alpha_1||u_1||w_1|^3-|\alpha_1||u_1|^4)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}}(|\alpha_1||u_1||w_1|^3)\mathrm{d}x\leqslant\\
&\|u_1\|_{L^q}\cdot|\alpha_1|\ \|w_1\|^3_{L^{\frac{3q}{q-1}}}\leqslant\frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^q}+\frac{1}{2}|\alpha_1|^2\|w_1\|^6_{L^{\frac{3q}{q-1}}}\qquad q\geqslant 2
\end{aligned}\tag{10}
$$

下面给出(10)式右边两项的估计．由不等式 $\|u_j\|_{L^q}\leqslant c_jt^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}$ $(2\leqslant q\leqslant\infty,\ j=1,2)$ 可得

$$\frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^q}\leqslant c_1^2t^{-\frac{q-2}{q}}$$

由于

$$\lim_{t\to0}\frac{c_1t^{-\frac{q-2}{q}}}{t^{-1}}=0$$

因此

$$\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^q}}{t^{-1}}=0\tag{11}$$

又由 Sobolev 嵌入 $L^{\infty}\circlearrowleft L^{\frac{3q}{q-1}}$ 及引理 1 可知

$$\|w_1\|^6_{L^{\frac{3q}{q-1}}}\leqslant C\|w_1\|^6_{L^{\infty}}\leqslant C(1+t)^{-3}\qquad q\geqslant 2$$

由于

$$\lim_{t\to0}\frac{C(1+t)^{-3}}{t^{-1}}=\lim_{t\to0}\frac{t}{C(1+t)^3}=0$$

因此

$$\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}|\alpha_1|^3\|w_1\|^6_{L^{\frac{3q}{q-1}}}}{t^{-1}}=0\qquad q\geqslant 2\tag{12}$$

由(11)－(12)式可知，当 $t\to0$ 时有 $\Phi_2=o(t^{-1})$．同理可知，方程(9)右边第 3 项、第 4 项，当 $t\to0$ 时有 $\Phi_3=o(t^{-1})$，$\Phi_4=o(t^{-1})$．

下面考虑方程(9)右边第 5 项：

$$\Phi_5\leqslant|\gamma_1|\int_{\mathbb{R}}|w_1|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbb{R}}|u_1||w_1|\mathrm{d}x\leqslant|\gamma_1|\ \|w_1\|^3_{L^2}\|u_1\|_{L^2}$$

重复(10)－(12)式的过程可知，$\Phi_5=o(t^{-1})$．同理有 $\Phi_6=o(t^{-1})$，$\Phi_7=o(t^{-1})$，$\Phi_8=o(t^{-1})$．综上所述，当 $t\geqslant T$(假设 $T\geqslant1$)时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)=\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}}(\partial_t\bar{w}_1\cdot u_1+\partial_t\bar{w}_2\cdot u_2+\partial_tu_1\cdot\bar{w}_1+\partial_tu_2\cdot\bar{w}_2)\mathrm{d}x\geqslant Ct^{-1}\tag{13}$$

其中

$$\varphi(t)=\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}}(u_1\overline{w_1}+u_2\overline{w_2})\mathrm{d}x$$

将(13)式两边同时关于 t 积分，可得

$$\varphi(10T)-\varphi(T)\geqslant C\int_T^{10T}t^{-1}\mathrm{d}t=C\ln 10>0 \tag{14}$$

此外，由 $\varphi(t)$ 的定义可知

$$\varphi(t)=\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}}(u_1(\overline{w_1}-\overline{u_1})+u_2(\overline{w_2}-\overline{u_2}))\mathrm{d}x$$

利用 Schwartz 不等式，有

$$|\varphi(t)|\leqslant\|u_1\|_{L^2}\|w_1-u_1\|_{L^2}+\|u_2\|_{L^2}\|w_2-u_2\|_{L^2}$$

由假设可得 $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)|=0$，这与(14)式矛盾，故定理1得证.

参考文献：

[1] 石仁淑. 一类一维临界非线性薛定谔方程组解的渐近行为 [J]. 延边大学学报(自然科学版)，2015，41(3)：196－198.

[2] CIPOLATTI R，KAVIAN O . On a Nonlinear Schrödinger Equation Modelling Ultra-Short Laser Pulses with a Large Noncompact Global Attractor [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems，2007，17(1)：121－132.

[3] 韦玉程，刘广刚. 一类非线性 Schrödinger 方程正解的存在性 [J]. 应用数学学报，2013，36(6)：1127－1140.

[4] 叶耀军. 一类非线性 Schrödinger 方程的整体小解 [J]. 应用数学学报，2006，29(1)：91－96.

[5] BREZIS H，GALLOUET T. Nonlinear Schrödinger Evolution Equations [J]. Nonlinear Analysis，Theory，Methods，Applications，1980，4(4)：677－681.

[6] 代文霞，朱朝生. 四阶 Schrödinger 方程的动态分歧 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(7)：111－116.

[7] 李苗苗，唐春雷. 一类带临界指数的 Schrödinger-Poisson 方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：35－38.

[8] ZHU C S. Global Attractor of Nonlocal Nonlinear Schrödinger Equation on $\mathbb{R}$ [J]. Advances in Analysis，2016，1(1)：40－60.

[9] ZHU C S，MU C L，PU Z L. Attractor for the Nonlinear Schrödinger Equation with a Non-Local Nonlinear Term [J]. Journal of Dynamical and Control Systems，2010，16(4)：585－603.

[10] HAYASHI N，LI C H，NAUMKIN P I. On a System of Nonlinear Schrödinger Equations in 2D [J]. Differential Integral Equations，2011，24(5/6)：417－434.

[11] BARAB J E. Nonexistence of Asymptotically Free Solutions for a Nonlinear Schrödinger Equation [J]. Journal of Mathematical Physics，1984，25(11)：3270－3273.

Asymptotic Behavior of Solutions for Nonlocal Nonlinear Schrödinger Equations

WEI Juan， ZHU Chao-sheng

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：This paper studies the asymptotic behavior of the solutions of the critical Schrödinger equations with nonlocal nonlinear terms，and prove the nonexistence of the asymptotic free solutions for this system by decay estimates of the solutions of the equations.

Key words：Schrödinger equations；time decay estimate；asymptotic free solution

责任编辑 廖 坤
崔玉洁