第 41 卷第 2 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2019 年 2 月
Vol. 41 No. 2　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Feb. 2019

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.02.010

一类带有周期位势的分数阶耦合系统的正基态解①

贺书文，　商彦英

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 运用 Ekeland 变分原理研究了一类带有不同周期位势的分数阶耦合系统非平凡解的存在性. 证明了该系统存在的非平凡解可以是一个正基态解，该结果将一般的 Schrödinger 耦合系统推广到带有多个不同周期函数的分数阶耦合系统的情形.

关 键 词： 分数阶耦合系统；Ekeland 变分原理；正基态解

中图分类号：O176.3　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673－9868(2019)02－0064－06

考虑下面的分数阶耦合系统：

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u + V_1(x)u = \lambda_1(x)\ u^{p-1} + \beta v^{\frac{p}{2}} u^{\frac{p}{2}-1} & x \in \mathbb{R}^N \\ (-\Delta)^s v + V_2(x)v = \lambda_2(x)\ v^{p-1} + \beta u^{\frac{p}{2}} v^{\frac{p}{2}-1} & x \in \mathbb{R}^N \\ u, v > 0 & x \in \mathbb{R}^N\end{cases} \tag{1}$$

其中：$s \in (0, 1)$，$2s < N$；$(-\Delta)^s$ 为分数阶 Laplace 算子，且 $p \in (2, 2_s^*)$，$2_s^* = \dfrac{2N}{N-2s}$；对于 $i = 1, 2$，$V_i(x)$，$\lambda_i(x)$ 为正的有界连续函数；$\beta > 0$ 为耦合常数. 这类系统广泛地出现在非线性光学、材料学和凝聚理论等领域中. 当 $s = 1$，$\beta = 0$ 时，系统(1) 便退化成两个一般的 Schrödinger 方程，这类问题已经被广泛研究(参见文献[1－3]等). 当 $s = 1$，$p = 4$，$V_i(x)$ 和 $\lambda_i(x)$ 为不同的正常数时，系统(1) 便转化为一般的非线性 Schrödinger 耦合系统，其非平凡正解的存在性结果已经有很多了(参见文献[4－7]等)，特别是在文献[6－7]中，作者证明了对于一些常数 $\beta_2 > \beta_1 > 0$，当 $\beta_1 > \beta > 0$ 或 $\beta > \beta_2$ 时，该 Schrödinger 系统存在非平凡正解. 当 $\beta = 0$ 时，在不同的假设条件下，对于系统(1) 中单个方程的非平凡解的存在性也被考虑(参见文献[8－11]等). 近年来，文献[12] 考虑了下面的耦合系统：

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u + u = (|u|^{2p} + b|u|^{p-1}|v|^{p+1})u & x \in \mathbb{R}^N \\ (-\Delta)^s v + \omega^{2s} v = (|v|^{2p} + b|v|^{p-1}|u|^{p+1})v & x \in \mathbb{R}^N\end{cases} \tag{2}$$

在一定条件下，证明了系统(2) 具有一系列低能量解的存在性结果. 受文献[9－10,12] 的启发，本文利用(Ce) 条件替代(PS) 条件的山路定理、Nehari 流形方法和集中紧性原理来研究系统(1) 正基态解的存在性，主要困难在于解决缺失紧性和排除半平凡解$(u, 0)$ 和$(0, v)$. 本文明显对文献[12] 做了一定的推广，考虑带有多个不同周期函数的分数阶耦合系统正基态解的存在性，现陈述主要结果如下：

定理 1　假设下列条件成立：

---

① 收稿日期：2018－07－11
基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).
作者简介：贺书文(1991－)，男，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：商彦英，副教授.

(H_1) $2s < N$, $s \in (0, 1)$, $p \in (2, 2_s^*)$, $2_s^* = \dfrac{2N}{N-2s}$, 且 $\beta > 0$;

(H_2) $V_i(x), \lambda_i(x) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ 在每个 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 上是 1-周期函数;

(H_3) 存在常数 $V_i, \lambda_i > 0$, 使得 $V_i(x) \geqslant V_i$, $\lambda_i(x) \geqslant \lambda_i$ ($\forall x \in \mathbb{R}^N$), 且 $0 < \lambda_i^* = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^N} \lambda_i(x)$.

则存在 $\beta^* > 0$, 使得当 $\beta \in (\beta^*, +\infty)$ 时, 系统(1) 有正基态解 (u, v).

注 1 条件(H_1) 为引理 4 的证明提供了重要保证, 当 $\beta > 0$ 充分大时, 系统(1) 没有半平凡解.

为了方便, 记 C 为不同的正常数, $L^q(\mathbb{R}^N)$ 和 $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ 中的范数分别记为 $\|\cdot\|_q$ 和 $\|\cdot\|_{\infty}$, $o_n(1)$ 表示当 $n \to +\infty$ 时的无穷小量, $B_r(x)$ 表示一个球心在 $x \in \mathbb{R}^N$ 且半径为 $r > 0$ 的开球.

1 预备知识

首先, 回顾一下有关分数阶 Laplace 算子的基本概念.

对于 $s \in (0, 1)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_N)$, 分数阶 Laplace 算子的可测函数 $u: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(N, s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{1+2s}} \mathrm{d}y$$

其中

$$C(N, s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2s}} \mathrm{d}\zeta \right)^{-1}$$

记 $H^s(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N): [u]_s < +\infty\}$ 为关于下面范数的分数阶 Sobolev 空间:

$$\|u\|_s = \left([u]_s^2 + \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \qquad [u]_s = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $[u]_s$ 为关于函数 u 的 Gagliardo 半范数. 同时, 对 $\forall u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_2^2 = \frac{C(N, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

为简单起见, 本文将忽略归一化常数, 用 E_i 表示的分数阶 Sobolev 空间的内积定义如下:

$$(u, v)_{E_i} = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \, (-\Delta)^{\frac{s}{2}} v \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x) u v \mathrm{d}x$$

相应的范数为 $\|u\|_{E_i}^2 = (u, u)_{E_i}$, 且 E_i 连续地嵌入到 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中, $p \in [2, 2_s^*]$. 记 $E = E_1 \times E_2$, 对 $\forall (u, v) \in E$, 有

$$\|(u, v)\|_E^2 = \|u\|_{E_1}^2 + \|v\|_{E_2}^2$$

此外, 记 E^* 为 E 的对偶空间.

为了考虑系统(1) 的正基态解, 在 E 上定义如下能量泛函:

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2} \|(u, v)\|_E^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_1(x) |u|^p + \lambda_2(x) |v|^p) \mathrm{d}x - \frac{2\beta}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{p}{2}} |v|^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x \tag{3}$$

易知, 系统(1) 的解与泛函 $\Phi \in C^2(E, \mathbb{R})$ 的临界点一一对应.

类似于文献[13-14], 定义与 Φ 相对应的 Nehari 流形如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = &\{(u, v) \in E \backslash \{(0, 0)\}: \Phi'(u, v)(u, v) = 0\} = \\ &\left\{ (u, v) \in E \backslash \{(0, 0)\}: \|(u, v)\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_1(x) |u|^p + \lambda_2(x) |v|^p) \mathrm{d}x + 2\beta \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{p}{2}} |v|^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

并且在 $\mathcal{N}$ 上, 定义

$$c = \inf_{(u, v) \in \mathcal{N}} \Phi(u, v) \tag{5}$$

2 主要结果的证明

为了证明定理 1, 本节给出一些主要的引理.

引理 1　假设条件(H_1)－(H_3)成立，则对 $\forall z=(u,v)\in E\backslash\{(0,0)\}$，存在唯一的 $t_z>0$，使得 $t_z z\in\mathcal{N}$.

证　对每个固定的 $z=(u,v)\in E\backslash\{(0,0)\}$，定义 $\varphi(t)=\Phi(tz)(t\in[0,+\infty))$，则由 $\varphi'(t)=0$ 知 $tz\in\mathcal{N}$，那么

$$\|(u,v)\|_E^2=t^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda_1(x)|u|^p+\lambda_2(x)|v|^p)\mathrm{d}x+2\beta t^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{p}{2}}|v|^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x \tag{6}$$

其中 $t\in(0,+\infty)$. 由条件(H_1)－(H_3)知 $\varphi(0)=0$. 当 $t>0$ 充分小时，$\varphi(t)>0$；当 $t>0$ 充分大时，$\varphi(t)<0$. 且(6)式右端是一个关于 t 的严格增函数. 则易知存在唯一的 $t_z>0$，使得 $\varphi(t_z)=\max\limits_{t\geqslant0}\varphi(t)$ 且 $\varphi'(t_z)=0$，也即是 $\Phi(t_z z)=\max\limits_{t\geqslant0}\Phi(tz)$ 且 $t_z z\in\mathcal{N}$.

注 2　在(H_1)－(H_3)成立的条件下，对 $\forall(u,v)\in\mathcal{N}$，不难得到下列关系式成立：

$$\Phi(tu,tv)\leqslant\Phi(u,v)\qquad\forall t\in[0,+\infty)$$

$$c=\inf_{(u,v)\in\mathcal{N}}\Phi(u,v)>0$$

引理 2(山路几何结构)　假设条件(H_1)－(H_3)成立，容易验证泛函 Φ 满足下列条件：

(i) 存在常数 $\rho_0,\alpha>0$，如果 $\|(u,v)\|_E=\rho_0$，则 $\Phi(u,v)\geqslant\alpha$；

(ii) 存在$(u_0,v_0)\in E$，使得 $\|(u_0,v_0)\|_E>\rho_0$ 且 $\Phi(u_0,v_0)<0$.

在 Φ 满足引理 2 的条件下，由文献[15]知，存在一个$(\mathrm{Ce})_{c'}$ 序列$\{(u_n,v_n)\}\subset E$，使得：

$$\Phi(u_n,v_n)\to c'=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\Phi(\gamma(t))$$

$$(1+\|(u_n,v_n)\|_E)\|\Phi'(u_n,v_n)\|_{E^*}\to0$$

其中

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],E):\gamma(0)=(0,0),\Phi(\gamma(1))<0\}$$

类似于文献[14]中引理 2.4 的证明，有

$$c'=\inf_{(u,v)\in E\backslash\{(0,0)\}}\max_{t\geqslant0}\Phi(tu,tv)=c$$

引理 3　假设条件(H_1)－(H_3)成立，如果对任意的$(\mathrm{Ce})_c$ 序列$\{(u_n,v_n)\}\subset E$，满足：

$$\Phi(u_n,v_n)\to c\qquad(1+\|(u_n,v_n)\|_E)\|\Phi'(u_n,v_n)\|_{E^*}\to0 \tag{7}$$

则序列$\{(u_n,v_n)\}$在 E 中有界.

证　设 $\forall\{(u_n,v_n)\}\subset E$ 且满足(7)式，那么

$$c+o_n(1)=\Phi(u_n,v_n)-\frac{1}{p}\Phi'(u_n,v_n)(u_n,v_n)=$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|(u_n,v_n)\|_E^2$$

即知$\{(u_n,v_n)\}$是有界的.

引理 4　假设条件(H_1)－(H_3)成立，如果(u,v)是系统(1)的正基态解，且存在正常数 $\beta^*>0$，使得 $\beta>\beta^*$ 时有 $u,v\not\equiv0$.

证　运用文献[9－10]的证明思想，不难证得下列单个方程可以分别获得正基态解 u_0 和 v_0：

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u+V_1(x)u=\lambda_1(x)u^{p-1} & x\in\mathbb{R}^N\\ u>0 & x\in\mathbb{R}^N\end{cases}$$

$$\begin{cases}(-\Delta)^s v+V_2(x)v=\lambda_2(x)v^{p-1} & x\in\mathbb{R}^N\\ v>0 & x\in\mathbb{R}^N\end{cases}$$

为证引理 4，只需证

$$c<\min\{\Phi(u_0,0),\Phi(0,v_0)\} \tag{8}$$

由引理 1 知，存在常数 $t_0>0$，使得$(t_0u_0,t_0v_0)\in\mathcal{N}$，有

$$t_0^2\|(u_0,v_0)\|_E^2=t_0^p\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda_1(x)|u_0|^p+\lambda_2(x)|v_0|^p)\mathrm{d}x+2\beta t_0^p\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{\frac{p}{2}}|v_0|^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\geqslant 2\beta t_0^p\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{\frac{p}{2}}|v_0|^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x$$

则

$$t_0\leqslant\left(\frac{\|(u_0,v_0)\|_E^2}{2\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{\frac{p}{2}}|v_0|^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{p-2}}=\beta^{-\frac{1}{p-2}}M \tag{9}$$

再由(4),(5),(9)式和 $\varphi(t)$ 的定义可得

$$\begin{aligned}c\leqslant{}&\Phi(t_0u_0,t_0v_0)=\\&\frac{t_0^2}{2}\|(u_0,v_0)\|_E^2-\frac{t_0^p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda_1(x)|u_0|^p+\lambda_2(x)|v_0|^p)\mathrm{d}x-\frac{2\beta}{p}t_0^p\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{\frac{p}{2}}|v_0|^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x=\\&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)t_0^p\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda_1(x)|u_0|^p+\lambda_2(x)|v_0|^p)\mathrm{d}x+\left(1-\frac{2}{p}\right)\beta t_0^p\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{\frac{p}{2}}|v_0|^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\leqslant\\&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\beta^{-\frac{p}{p-2}}M^p\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda_1^*|u_0|^p+\lambda_2^*|v_0|^p)\mathrm{d}x+\left(1-\frac{2}{p}\right)\beta^{-\frac{2}{p-2}}M^p\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{\frac{p}{2}}|v_0|^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\leqslant\\&\beta^{-\frac{p}{p-2}}M^pC\int_{\mathbb{R}^N}(|u_0|^p+|v_0|^p)\mathrm{d}x+\beta^{-\frac{2}{p-2}}M^pC\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{\frac{p}{2}}|v_0|^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x=\\&g(\beta)\end{aligned}\tag{10}$$

要证(8)式成立,即需证

$$g(\beta)<\min\{\Phi(u_0,0),\Phi(0,v_0)\}$$

注意到在(H_1)的条件下,在(10)式中,当 $\beta\to+\infty$ 时 $g(\beta)\to 0$. 则存在常数 $\beta^*>0$,使得当 $\beta>\beta^*$ 时(8)式成立.

定理 1 的证明 由引理 3 可知,存在有界的$(\mathrm{Ce})_c$ 序列$\{(u_n,v_n)\}\subset E$ 满足(7)式. 现假设

$$\sigma=\lim_{n\to+\infty}\sup\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(y)}(|u_n|^2+|v_n|^2)\mathrm{d}x=0$$

则由分数阶 Sobolev 空间的集中紧性原理(参见文献[9]中引理 II.4),对 $\forall p\in(2,2_s^*)$,在 $L^p(\mathbb{R}^N)\times L^p(\mathbb{R}^N)$ 上有$(u_n,v_n)\to(0,0)$,那么

$$\begin{aligned}0<c={}&\Phi(u_n,v_n)-\frac{1}{2}\Phi'(u_n,v_n)(u_n,v_n)+o_n(1)=\\&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda_1(x)|u_n|^p+\lambda_2(x)|v_n|^p)\mathrm{d}x+\left(1-\frac{2}{p}\right)\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{\frac{p}{2}}|v_n|^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x+o_n(1)\geqslant\\&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)C\int_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^p+|v_n|^p)\mathrm{d}x+\left(1-\frac{2}{p}\right)\beta\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{\frac{p}{2}}|v_n|^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x+o_n(1)=\\&o_n(1)\end{aligned}$$

矛盾,从而 $\sigma>0$.

必要时取子序列(仍记为$\{(u_n,v_n)\}$),那么存在常数 $R>0$ 和$\{y_n\}\subset\mathbb{Z}^N$,使得

$$\int_{B_R(0)}(|\tilde{u}_n|^2+|\tilde{v}_n|^2)\mathrm{d}x=\int_{B_R(y_n)}(|u_n|^2+|v_n|^2)\mathrm{d}x>\frac{\sigma}{2}\tag{11}$$

其中

$$(\tilde{u}_n(x),\tilde{v}_n(x))=(u_n(x+y_n),v_n(x+y_n))$$

又由 Φ 和 $\mathcal{N}$ 的平移不变性知:

$$\Phi(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\to c\qquad(1+\|(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\|_E)\|\Phi'(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\|_{E^*}\to 0$$

必要时再取一个子序列，存在$(\tilde{u}, \tilde{v}) \in E$ 使得

$$\begin{cases}(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) \rightharpoonup (\tilde{u}, \tilde{v}) & x \in E \\ (\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) \to (\tilde{u}, \tilde{v}) & x \in L(B_R(0)) \times L(B_R(0)) \\ (\tilde{u}_n(x), \tilde{v}_n(x)) \to (\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)) & \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^N\end{cases}$$

则由(11)式可得$(\tilde{u}, \tilde{v}) \neq (0, 0)$，再由一般的讨论方法知，$\Phi'(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$，$(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{N}$ 且 $c \leqslant \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$.

此外，由 Fatou 引理和条件(H_2)有

$$c = \liminf_{n \to +\infty} \left[\Phi(u_n, v_n) - \frac{1}{2}\Phi'(u_n, v_n)(u_n, v_n)\right] =$$

$$\liminf_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_1(x) | u_n |^p + \lambda_2(x) | v_n |^p) \mathrm{d}x + \left(1 - \frac{2}{p}\right)\beta\int_{\mathbb{R}^N} | u_n |^{\frac{p}{2}} | v_n |^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right] =$$

$$\liminf_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_1(x) | \tilde{u}_n |^p + \lambda_2(x) | \tilde{v}_n |^p) \mathrm{d}x + \left(1 - \frac{2}{p}\right)\beta\int_{\mathbb{R}^N} | \tilde{u}_n |^{\frac{p}{2}} | \tilde{v}_n |^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right] \geqslant$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_1(x) | \tilde{u} |^p + \lambda_2(x) | \tilde{v} |^p) \mathrm{d}x + \left(1 - \frac{2}{p}\right)\beta\int_{\mathbb{R}^N} | \tilde{u} |^{\frac{p}{2}} | \tilde{v} |^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x$$

$$= \Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) - \frac{1}{2}\Phi'(\tilde{u}, \tilde{v})(\tilde{u}, \tilde{v}) =$$

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$$

那么 $c = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$，又由引理 4 知，当 $\beta > \beta^*$ 时，$\tilde{u}, \tilde{v} \not\equiv 0$. 则$(\tilde{u}, \tilde{v})$ 是系统(1)的非平凡基态解.

下面证明系统(1)存在正基态解. 由引理 1 知，存在 $\tilde{t} > 0$，使得：

$$(\tilde{t} | \tilde{u} |, \tilde{t} | \tilde{v} |) \in \mathcal{N} \qquad \Phi(\tilde{t} | \tilde{u} |, \tilde{t} | \tilde{v} |) \geqslant c$$

又由条件(H_1)－(H_3)、注 2 及泛函 Φ 的形式有

$$\Phi(\tilde{t} | \tilde{u} |, \tilde{t} | \tilde{v} |) \leqslant \Phi(\tilde{t}\tilde{u}, \tilde{t}\tilde{v}) \leqslant \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$$

则$(\tilde{t} | \tilde{u} |, \tilde{t} | \tilde{v} |) = (u, v)$ 是系统(1)的非平凡基态解. 最后由强极大值原理(参见文献[16])可得，对 $\forall x \in \mathbb{R}^N$ 都有 $u, v > 0$.

参考文献：

[1] 陈尚杰. 一类非齐次 Schrödinger 方程非平凡解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(2): 55－59.

[2] TANG X H. Infinitely Many Solutions for Semilinear Schrödinger Equations with Sign-Changing Potential and Nonlinearity [J]. J Math Anal Appl, 2013, 401(1): 407－415.

[3] LIU J, LIAO J F, TANG C L. A Positive Ground State Solution For a Class of Asymptotically Periodic Schrödinger Equations [J]. Comput Math Appl, 2016, 71(4): 965－976.

[4] BARTSCH T, WANG Z Q, WEI J C. Bound States for a Coupled Schrödinger System [J]. J Fixed Point Theory Appl, 2007, 14(2): 353－367.

[5] MANDEL R. Minimal Energy Solutions for Repulsive Nonlinear Schrödinger Systems [J]. J Differ Equations, 2014, 257(2): 450－468.

[6] AMBROSETTI A, COLORADO E. Standing Waves of Some Coupled Nonlinear Schrödinger Equations [J]. J Lond Math Soc, 2007, 75(2): 67－82.

[7] SIRAKOV B. Least Energy Solitary Waves for a System of Nonlinear Schrödinger Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Comm Math Phys, 2007, 271(1): 199－221.

[8] PU Y, LIU J, TANG C L. Existence of Weak Solutions for a Class of Fractional Schrödinger Equations with Periodic Potential [J]. Comput Math Appl, 2017, 73(3): 465－482.

[9] SECCHI S. Ground State Solutions for Nonlinear Fractional Schrödinger Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Math Phys, 2013, 54(3):

1－17.

[10] ZHANG H，XU J X，ZHANG F B. Existence and Multiplicity of Solutions for Superlinear Fractional Schrödinger Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Math Phys，2015，56(8)：1－13.

[11] GONG Y P，LIANG S L. Existence of Solutions for Asymptotically Periodic Fractional Schrödinger Equation [J]. Comput Math Appl，2017，74(8)：3175－3182.

[12] GUO Q，HE X M. Least Energy Solutions for a Weakly Coupled Fractional Schrödinger System [J]. Nonlinear Anal，2016，132(11)：141－159.

[13] 樊自安. 一类非线性 p-Laplacian 方程解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(3)：37－43.

[14] LI G B，TANG X H. Nehari-Type Ground State Solutions for Schrödinger Equations Including Critical Exponent [J]. Appl Math Lett，2014，37(6)：101－106.

[15] SCHECHTER M. A Variation of the Mountain Pass Lemma and Applications [J]. London Math Soc，1991，44(3)：491－502.

[16] VAZQUEZ J L. A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations [J]. Appl Math Optim，1984，12(1)：191－202.

Positive Ground State Solutions for a Class of Fractional Coupled System with Periodic Potentials

HE Shu-wen， SHANG Yan-ying

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this article，we investigate the existence of nontrivial solutions for a class of fractional coupled system with different periodic potentials by using the Ekeland's variational principle. The point is to prove that the nontrivial solutions of the system can be a positive ground state solution，which extends the general Schrödinger coupled system to the case of the fractional coupled system with multiple different periodic functions.

Key words：fractional coupled system；Ekeland's variational principle；positive ground state solution

责任编辑 廖 坤