第 41 卷第 2 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2019 年 2 月
Vol. 41　No. 2　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Feb.　2019

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.02.011

平面上的逆 Bonnesen-型 Minkowski 不等式[①]

周　媛[1]，　张增乐[2]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 重庆文理学院 数学与财经学院，重庆 永川 402160

摘要： 研究了平面中形如 $A_{K,L}^2-A_KA_L\leqslant U_{K,L}$ 的 Minkowski 不等式的上界，即逆 Bonnesen-型 Minkowski 不等式. 设 K,L 是平面中的凸体，其面积分别为 A_K,A_L，其中 $A_{K,L}$ 为两凸体的混合面积，$U_{K,L}$ 为与 K,L 有关的几何不变量. 利用平面上给定两凸体的支持函数，构造一类与给定凸体相关的新凸体. 通过对新凸体几何性质的讨论，得到了一些新的加强的逆 Bonnesen-型 Minkowski 不等式，并用此类不等式可推出一些已有结果.

关　键　词： 凸体；支持函数；Minkowski 不等式；逆 Bonnesen-型 Minkowski 不等式

中图分类号： O186.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-9868(2019)02-0070-05

对于欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的点集 K，如果对任意 $x,y\in K$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，都有 $\lambda x+(1-\lambda)y\in K$，则称 K 为凸集. 具有非空内点的紧凸集称为凸体. 若凸体 K 的边界 ∂K 的曲率半径 $\rho>0$，则称凸体 K 为卵形域. 如果 K 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界凸集，则以 2π 为周期的周期函数 $p(\theta)$ 称为 K 的支持函数. $p(\theta)$ 是某个卵形域 K 的支持函数的充要条件是

$$\rho=p(\theta)+p''(\theta)>0\qquad 0\leqslant\theta<2\pi$$

凸体 K 的周长、面积积分公式分别为：

$$P=\int_0^{2\pi}p\,\mathrm{d}\theta\qquad A=\frac{1}{2}\int_{\partial K}p\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p(p+p'')\mathrm{d}\theta$$

凸体 K,L 的面积分别记为 A_K,A_L，支持函数分别为 p_K,p_L. 在 Minkowski 加法下，凸体 $K+L$ 的面积表达式为

$$A_{K+L}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p_K+p_L)(p_K+p_L+p''_K+p''_L)\mathrm{d}\theta=A_K+A_L+2A_{K,L}$$

其中 $A_{K,L}$ 表示两凸体的混合面积，其对应表达式为

$$A_{K,L}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p_K(p_L+p''_L)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p_L(p_K+p''_K)\mathrm{d}\theta$$

等周不等式是著名的几何不等式之一，它是最早用基本几何不变量来刻画平面几何图形的几何不等式. 经典等周不等式的几何意义是：平面上周长固定的简单闭曲线中，圆所围成的面积最大. 目前，等周不等式已推广到高维欧氏空间、常曲率曲面中，并应用到其他的数学分支(参见文献[1-12]). 其中 Minkowski 不等式是经典等周不等式的推广之一.

本文主要研究平面上的逆 Bonnesen-型 Minkowski 不等式，形如

$$A_{K,L}^2-A_KA_L\leqslant U_{K,L}\tag{1}$$

其中 $U_{K,L}$ 是与 K,L 有关的非负几何不变量. 设 K,L 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的卵形域，其支持函数分别为 p_K,p_L.

① 收稿日期：2018-06-11
基金项目：国家自然科学基金项目(11671325).
作者简介：周　媛(1993-)，女，硕士研究生，主要从事积分几何与凸几何分析的研究.
通信作者：张增乐，博士.

通过利用 K 和 L 的支持函数，构造了一类新凸体 M_t，其支持函数为：

$$p_{M_t}=(1-t)p_K+tCp_L \qquad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{2}$$

其中 C 为与 K,L 相关的几何不变量，t 随 C 取值的不同而改变其取值范围的参数. 当 $t=0$ 时，M_t 为凸体 K；当 $C=1$，$t=1$ 时，M_t 为凸体 L. 设：

$$\begin{cases}\vartheta_m(K,L)=\min\left\{\dfrac{\rho_K(\theta)}{\rho_L(\theta)}: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}\\ \vartheta_M(K,L)=\max\left\{\dfrac{\rho_K(\theta)}{\rho_L(\theta)}: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}\end{cases} \tag{3}$$

当 $C=-\vartheta_m(K,L)$，$0<t\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，和当 $C=-\vartheta_M(K,L)$，$\dfrac{1}{2}\leqslant t<1$ 时，我们确定新凸体 M_t，通过讨论凸体 M_t 的几何性质，我们得到一些新的逆 Bonnesen-型 Minkowski 不等式，并且加强了文献[12]中定理 4.6 的结果，同时也给出了等号成立条件.

引理 1 设 K,L 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的卵形域，则

$$\rho_m(K,L)\leqslant\vartheta_m(K,L)\leqslant\frac{\rho_K}{\rho_L}\leqslant\vartheta_M(K,L)\leqslant\rho_M(K,L) \tag{4}$$

证 $\rho_m(K,L)$ 和 $\rho_M(K,L)$ 的定义[12]可分别等价于：

$$\rho_m(K,L)=\frac{\rho_m(\partial K)}{\rho_M(\partial L)} \qquad \rho_M(K,L)=\frac{\rho_M(\partial K)}{\rho_m(\partial L)}$$

由 $\vartheta_m(K,L)$ 与 $\vartheta_M(K,L)$ 的定义((3)式)，不等式(4)显然成立.

利用引理 1，我们得到以下结果.

定理 1 设 K,L 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的卵形域，则：

$$\begin{cases}A_{K,L}^2-A_KA_L\leqslant(A_{K,L}-\vartheta_m(K,L)A_L)^2\\ A_{K,L}^2-A_KA_L\leqslant\left(\dfrac{A_K}{\vartheta_m(K,L)}-A_{K,L}\right)^2\end{cases} \tag{5}$$

不等式(5)等号成立当且仅当 K 与 L 位似.

证 取(2)式中 $C=-\vartheta_m(K,L)$，我们有

$$p_{M_t}=(1-t)p_K-t\vartheta_m(K,L)p_L$$

当 $0<t\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，由 ρ 的定义和引理 1，得到

$$p_{M_t}+\frac{\partial^2 p_{M_t}}{\partial\theta^2}=(1-t)(p_K+p_K'')-t\vartheta_m(K,L)(p_L+p_L'')\geqslant(1-t)\rho_K-t\frac{\rho_K}{\rho_L}\rho_L\geqslant 0$$

因此 $p_{M_t}=(1-t)p_K-t\vartheta_m(K,L)p_L$ 是一类凸集 M_t 的支持函数，M_t 的面积 A_t 为

$$A_t=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p_{M_t}\left(p_{M_t}+\frac{\partial^2 p_{M_t}}{\partial\theta^2}\right)\mathrm{d}\theta=$$
$$(1-t)^2A_K-2t(1-t)\vartheta_m(K,L)A_{K,L}+t^2(\vartheta_m(K,L))^2A_L$$

特别地，当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$A_{t=\frac{1}{2}}=\frac{A_K}{4}-\frac{\vartheta_m(K,L)A_{K,L}}{2}+\frac{\vartheta_m^2(K,L)A_L}{4}\geqslant 0 \tag{6}$$

将(6)式改写成两种形式：

$$-A_K\leqslant\vartheta_m^2(K,L)A_L-2\vartheta_m(K,L)A_{K,L}$$
$$-A_L\leqslant\frac{A_K}{\vartheta_m^2(K,L)}-\frac{2A_{K,L}}{\vartheta_m(K,L)}$$

代入不等式(1)中，我们分别得到如下新的逆 Bonnesen-型 Minkowski 不等式：

$$A_{K,L}^2-A_KA_L\leqslant A_{K,L}^2+(\vartheta_m^2(K,L)A_L-2\vartheta_m(K,L)A_{K,L})A_L=(A_{K,L}-\vartheta_m(K,L)A_L)^2$$

$$A_{K,L}^2-A_KA_L\leqslant A_{K,L}^2+A_K\left(\frac{A_K}{\vartheta_m^2(K,L)}-\frac{2A_{K,L}}{\vartheta_m(K,L)}\right)=\left(\frac{A_K}{\vartheta_m(K,L)}-A_{K,L}\right)^2$$

不等式(5)等号成立的条件是 $M_{t=\frac{1}{2}}$ 的面积为0. 此时 $M_{t=\frac{1}{2}}$ 只能是一条线段或一个点. 如果 $M_{t=\frac{1}{2}}$ 是一条线段，则由(2)式可知，K 的支持函数为

$$p_K=2p_{M_t}+p_L\vartheta_m(K,L)$$

这与 K 为卵形域矛盾，因此 $M_{t=\frac{1}{2}}$ 只能为一个点，即等号成立当且仅当 K 与 L 位似.

由定理 1，我们得到以下逆 Bonnesen -型 Minkowski 不等式：

推论 1　设 K,L 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的卵形域，则：

$$\begin{cases}A_{K,L}^2-A_KA_L\leqslant(A_{K,L}-\rho_m(K,L)A_L)^2\\ A_{K,L}^2-A_KA_L\leqslant\left(\dfrac{A_K}{\rho_m(K,L)}-A_{K,L}\right)^2\end{cases}\tag{7}$$

证　注意到，定理 1 中(5)式不等号右边括号内几何量是非负的，即：

$$A_{K,L}-\vartheta_m(K,L)A_L\geqslant0\qquad\frac{A_K}{\vartheta_m(K,L)}-A_{K,L}\geqslant0\tag{8}$$

由引理 1，可证得

$$p_L(p_K+p''_K)\geqslant\vartheta_m(K,L)p_L(p_L+p''_L)$$

两边同时积分，我们有

$$A_{K,L}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p_L(p_K+p''_K)\mathrm{d}\theta\geqslant\frac{1}{2}\vartheta_m(K,L)\int_0^{2\pi}p_L(p_L+p''_L)\mathrm{d}\theta=\vartheta_m(K,L)A_L$$

因此，不等式(8)的第一个不等式成立. 同理，可证得(8)式第二个不等式成立. 由不等式(4)和(8)，我们有：

$$A_{K,L}-\vartheta_m(K,L)A_L\leqslant A_{K,L}-\rho_m(K,L)A_L$$

$$\frac{A_K}{\vartheta_m(K,L)}-A_{K,L}\leqslant\frac{A_K}{\rho_m(K,L)}-A_{K,L}$$

再由定理 1 可推出不等式(7).

在文献[12]中，利用 Blaschke 滚动定理也得到了(7)式. 由上述证明，可发现(5)式强于(7)式，因此我们加强了文献[12]中的结果.

定理 2　设 K,L 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的卵形域，则：

$$\begin{cases}A_{K,L}^2-A_KA_L\leqslant(\vartheta_M(K,L)A_L-A_{K,L})^2\\ A_{K,L}^2-A_KA_L\leqslant\left(A_{K,L}-\dfrac{A_K}{\vartheta_M(K,L)}\right)^2\end{cases}\tag{9}$$

不等式(9)等号成立当且仅当 K 与 L 位似.

证　用类似于定理 1 的讨论，取(2)式中 $C=-\vartheta_M(K,L)$. 当 $\frac{1}{2}\leqslant t<1$ 时，我们得到一类凸集 M_t，其支持函数为

$$-p_{M_t}=t\vartheta_M(K,L)p_L-(1-t)p_K$$

则其面积为

$$A_t=(1-t)^2A_K-2t(1-t)\vartheta_M(K,L)A_{K,L}+t^2(\vartheta_M(K,L))^2A_L$$

特别地，当 $t=\frac{1}{2}$ 时，有

$$A_{t=\frac{1}{2}}=\frac{A_K}{4}-\frac{\vartheta_M(K,L)A_{K,L}}{2}+\frac{\vartheta_M^2(K,L)A_L}{4}\geqslant0\tag{10}$$

(10)式可改写为：

$$-A_K\leqslant\vartheta_M^2(K,L)A_L-2\vartheta_M(K,L)A_{K,L}$$

$$-A_L \leqslant \frac{A_K}{\vartheta_M^2(K, L)} - \frac{2A_{K,L}}{\vartheta_M(K, L)}$$

代入不等式(1)中，得到不等式(9). 同理，等号成立时，$M_{t=\frac{1}{2}}$ 只能为一个点，即 K 与 L 位似.

类似推论1的证明，由定理2，可得以下较弱的逆 Bonnesen-型 Minkowski 不等式.

推论2 设 K, L 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的卵形域，则：

$$\begin{cases} A_{K,L}^2 - A_K A_L \leqslant (\rho_M(K, L) A_L - A_{K,L})^2 \\ A_{K,L}^2 - A_K A_L \leqslant \left(A_{K,L} - \dfrac{A_K}{\rho_M(K, L)}\right)^2 \end{cases} \tag{11}$$

由定理1和定理2，我们可得如下新的逆 Bonnesen-型 Minkowski 不等式：

定理3 设 K, L 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的卵形域，则

$$A_{K,L}^2 - A_K A_L \leqslant \frac{A_L^2}{4}(\vartheta_M(K, L) - \vartheta_m(K, L))^2 \tag{12}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 位似.

证 将不等式(5),(9)中的第一个不等式，两边同时开根号，分别得到：

$$\sqrt{A_{K,L}^2 - A_K A_L} \leqslant A_{K,L} - \vartheta_m(K, L) A_L$$

$$\sqrt{A_{K,L}^2 - A_K A_L} \leqslant \vartheta_M(K, L) A_L - A_{K,L}$$

不等式两边分别相加再平方，得到不等式(12).

下面，我们将给出文献[12]中定理4.6等号成立条件.

定理4 设 K, L 为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的卵形域，则

$$A_{K,L}^2 - A_K A_L \leqslant \frac{A_L^2}{4}(\rho_M(K, L) - \rho_m(K, L))^2 \tag{13}$$

等号成立当且仅当 K 与 L 为圆盘.

证 由引理1和定理3，有

$$A_{K,L}^2 - A_K A_L \leqslant \frac{A_L^2}{4}(\vartheta_M(K, L) - \vartheta_m(K, L))^2 \leqslant \frac{A_L^2}{4}(\rho_M(K, L) - \rho_m(K, L))^2 \tag{14}$$

下面证明(13)式等号成立. 若 K, L 为圆盘，显然(13)式等号成立. 反之，假设(13)式等号成立，则必有(14)式中第一个不等式等号成立，此时 K 与 L 位似，从而

$$A_{K,L}^2 - A_K A_L = \frac{A_L^2}{4}(\vartheta_M(K, L) - \vartheta_m(K, L))^2 = 0$$

即

$$\rho_M(K, L) = \rho_m(K, L)$$

有

$$\frac{\rho_M(\partial K)}{\rho_m(\partial L)} = \frac{\rho_m(\partial K)}{\rho_M(\partial L)} \tag{15}$$

若 ρ_L 不是常数，则有

$$\rho_M(\partial L) > \rho_m(\partial L)$$

由于

$$\rho_M(\partial K) \geqslant \rho_m(\partial K)$$

则

$$\rho_M(K, L) > \rho_m(K, L)$$

这与(15)式矛盾，故 ρ_L 是常数. 再由(15)式，有

$$\rho_M(\partial K) = \rho_m(\partial K)$$

故 ρ_K 是常数. 综上所述，等号成立当且仅当 K 与 L 均为圆盘.

参考文献：

[1] BANCHOFF T F，POHL W F. A Generalization of the Isoperimetric Inequality [J]. Journal of Differential Geometry，1971，6(2)：175－192.

[2] BURAGO Y D，ZALGALLER V A. Geometric Inequalities [M]. Berlin：Springer-Verlag，1988.

[3] CROKE C B. A Sharp Four Dimensional Isoperimetric Inequality [J]. Commentarii Mathematici Helvetici，1984，59(1)：187－192.

[4] ENOMOTO K. A Generalization of the Isoperimetric Inequality on S^2 and Flat Tori in S^3 [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1994，120(2)：553－558.

[5] GRINBER E L. Isoperimetric Inequalities and Identities for k-Dimensional Cross-Sections of Convex Bodies [J]. Mathematische Annalen，1991，291(1)：75－86.

[6] 张增乐，罗　淼，陈方维. 平面上的新凸体与逆 Bonnesen -型不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(4)：27－30.

[7] GYSIN L M. The Isoperimetric Inequality for Nonsimple Closed Curves [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1993，118(1)：197－203.

[8] 杨　林，罗　淼，侯林波. 逆的对偶 Brunn-Minkowski 不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(4)：85－89.

[9] HOWARD R. The Sharp Sobolev Inequality and the Banchoff-Pohl Inequality on Surfaces [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1998，126(9)：2779－2787.

[10] 曾春娜，周家足，岳双珊. 两平面凸域的对称混合等周不等式 [J]. 数学学报(中文版)，2012，55(2)：355－362.

[11] 王鹏富，徐文学，周家足，等. 平面两凸域的 Bonnesen 型对称混合不等式 [J]. 中国科学(数学)，2015，45(3)：245－254.

[12] LUO M，XU W X，ZHOU J Z. Translative Containment Measure and Symmetric Mixed Isohomothetic Inequalities [J]. Science China Mathematics，2015，58(12)：2593－2610.

Reverse Bonnesen-Style Minkowski Inequalities in the Plane

ZHOU　Yuan[1]，　ZHANG Zeng-le[2]

1. *School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China；*

2. *School of Mathematics and Finance，Chongqing University of Arts and Sciences，Yongchuan Chongqing 402160，China*

Abstract：We study in this paper the upper bound of the Minkowski inequality in the plane，i. e. a reverse Bonnesen-style Minkowski inequality，such as $A_{K,L}^2 - A_K A_L \leqslant U_{K,L}$. Let K and L be convex bodies whose areas are A_K and A_L，respectively，and $A_{K,L}$ is the mixes area of the two convex bodies and $U_{K,L}$ is the geometric invariant related to K and L. We construct a class of convex body by the support function of the given convex bodies. By discussing the geometric properties of the new convex body，we obtain some new stronger reverse Bonnesen-style Minkowski inequalities and some results can be derived from those inequalities.

Key words：convex body；support function；Minkowski inequality；reverse Bonnesen-style Minkowski inequality

责任编辑　廖　坤