DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.03.008

三维 Bénard 系统弱解的长时间渐近性[①]

徐桢荔，　朱朝生

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 研究了 3 维 Bénard 系统的弱解的长时间渐近性，借助能量方法给出了弱解在 H^1 中的衰减估计.

关　键　词： Bénard 系统；衰减估计；能量不等式

中图分类号：O175.29　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673－9868(2019)03－0058－04

研究如下 $\mathbb{R}^3$ 中的 Bénard 系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+F_N(\|\nabla u\|)(u\nabla)u+\xi\omega+\nabla p=0\\ \operatorname{div} u=0\\ u(x,0)=0\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \omega}{\partial t}-\Delta \omega+(u\nabla)\omega=0\\ \omega(x,0)=0\end{cases}\tag{2}$$

其中：$u=u(x,t)$，$\omega=\omega(x,t)$，$p=p(x,t)$ 分别表示不可压缩的粘性流体的速率、温度、压力；$\xi\in\mathbb{R}^3$ 为常向量且满足 $|\xi|\leqslant 1$；$u\nabla=\sum\limits_{i=1}^{3}u_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$；且对 $N\geqslant 1$，$F_N(r)=\min\left\{1,\dfrac{N}{r}\right\}$.

Bénard 系统是描述不可压缩流体的动力模型方程，至今已有大量工作致力于该系统的研究. 在 Bénard 系统解的研究中，文献[1－6]研究了 Bénard 系统解的存在性，文献[7－8]讨论了解的正则性，文献[9]证明了解在时间趋于无穷大的爆破，并给出了强解的精确估计，从而得到了解在大时间情况下的增长和衰减.

本文的主要目的是借助于文献[10]的方法，研究 3 维 Bénard 系统(1)－(2)弱解的长时间渐近性.

先作一些基本的假设. $L^p(\mathbb{R}^3)$ 定义为

$$\|g\|_{L^p}=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} & 1\leqslant p<\infty\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^3}|g(x)| & p=\infty\end{cases}$$

$L^q(0,T;X)$ 定义为所有可测函数 $u:(0,T)\longmapsto X$ 组成的空间，且范数为：

① 收稿日期：2018－01－05
基金项目：国家自然科学基金项目(11571283)；重庆市博士后科研项目(渝 XM201102006).
作者简介：徐桢荔(1993－)，女，硕士研究生，主要从事偏微分方程现代理论研究.
通信作者：朱朝生，副教授.

$$\| u \|_{L^q(0, T; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \| u \|_X^q \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} & 1 \leqslant q < \infty \\ ess \sup\limits_{t \in [0, T]} \| u \|_X & p = \infty \end{cases}$$

为简化表述，我们用 $\| \cdot \|$ 表示$(L^2(\mathbb{R}^3))^d$ 的范数. 令

$$b(u, v, z) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i, j=1}^{3} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} z_j \mathrm{d}x$$

$$c(u, \omega, \eta) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \eta \mathrm{d}x$$

又令

$$b_N(u, v, z) = F_N(\| \nabla v \|) b(u, v, z)$$

下面给出本文中 3 维 Bénard 系统(1)-(2) 的弱解的定义:

定义 1 设 $u_0 \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3$，$\omega_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. 向量场$\{u(x, t), \omega(x, t)\}$被称为 3 维 Bénard 系统(1)-(2)的弱解，如果$\{u, \omega\}$满足下列条件:

(i) $u \in L^\infty(0, T; (L^2(\mathbb{R}^3))^3) \cap L^2(0, T; (H^1(\mathbb{R}^3))^3)$，$\omega \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3))$;

(ii) 对任意 $\phi \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T)))^3$，$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T))$，满足 $\nabla \cdot \phi = 0$，$\nabla \cdot \varphi = 0$，有

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \{ u \cdot \phi_t - \nabla u \cdot \nabla \phi + F_N(\| \nabla u \|) \nabla \phi : u \otimes u - \xi \omega \cdot \phi \} \mathrm{d}x \mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}^3} u_0 \phi(0) \mathrm{d}x$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \{ \omega \cdot \varphi_t - \nabla \omega \cdot \nabla \varphi + \nabla \varphi : u \otimes \omega \} \mathrm{d}x \mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}^3} \omega_0 \varphi(0) \mathrm{d}x$$

(iii) 能量不等式:

$$\| u(t) \|^2 + 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} | \nabla u(x, s) |^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}s \leqslant \| u_0 \|^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

$$\| \omega(t) \|^2 + 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} | \nabla \omega(x, s) |^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}s \leqslant \| \omega_0 \|^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

本文的主要结果如下:

定理 1 假设$\{u(x, t), \omega(x, t)\}$是 3 维 Bénard 系统(1)-(2) 的弱解. 则$\{u, \omega\}$在 H^1 中有如下衰减估计:

$$t^{\frac{1}{2}} \| \nabla u(t) \| + t^{\frac{1}{2}} \| \nabla \omega(t) \| \to 0 \qquad t \to \infty$$

证 令(1) 式与 $-\Delta u$ 作内积可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \nabla u \|^2 + 2 \| \Delta u \|^2 = 2b_N(u, u, \Delta u) + 2(\xi \omega, \Delta u) \tag{3}$$

令(2) 式与 $-\Delta \omega$ 作内积可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \nabla \omega \|^2 + 2 \| \Delta \omega \|^2 = 2c(u, \omega, \Delta \omega) \tag{4}$$

由(3)-(4) 式可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \nabla u \|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \nabla \omega \|^2 + 2 \| \Delta u \|^2 + 2 \| \Delta \omega \|^2 =$$

$$2b_N(u, u, \Delta u) + 2c(u, \omega, \Delta \omega) + 2(\xi \omega, \Delta u)$$

又由 Gagliardo-Nirenberg 不等式可知:

$$\| u \|_{L^\infty} \leqslant C \| \Delta u \|^{\frac{3}{4}} \| u \|^{\frac{1}{4}}$$

$$\| \nabla u \| \leqslant C \| u \|^{\frac{1}{2}} \| \Delta u \|^{\frac{1}{2}}$$

因此，由 Hölder 不等式和 Young 不等式可得：

$$
\begin{aligned}
2b_N(u,u,\Delta u)=2F_N(\|\nabla u\|)b(u,u,\Delta u)\leqslant \\
C\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|\|\Delta u\|\leqslant \\
C\|\Delta u\|^{\frac{3}{4}}\|u\|^{\frac{1}{4}}\|\nabla u\|\|\Delta u\|\leqslant \\
C\|\Delta u\|^2(\|u\|^{\frac{1}{4}}\|\nabla u\|\|\Delta u\|^{-\frac{1}{4}})\leqslant \\
C\|\Delta u\|^2(\|u\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}
$$

$$2c(u,\omega,\Delta\omega)\leqslant C\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\omega\|\|\Delta\omega\|\leqslant C\|\nabla u\|\|\Delta\omega\|^2$$

$$2(\xi\omega,\Delta u)\leqslant 2\|\xi\omega\|\|\Delta u\|\leqslant|\xi|^2\|\omega\|^2+\|\Delta u\|^2$$

因此可得：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\omega\|^2+2\|\Delta u\|^2+2\|\Delta\omega\|^2\leqslant \\
\|\Delta u\|^2(C\|u\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}+1)+\|\Delta\omega\|^2(C\|\nabla u\|+|\xi|^2)
\end{aligned}
$$

整理可得：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|^2+\|\nabla\omega\|^2)\leqslant \\
\|\Delta u\|^2(C\|u\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}-1)+\|\Delta\omega\|^2(C\|\nabla u\|+|\xi|^2-2)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

下面用反证法证明：对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $M>0$，使得对 $t\geqslant M$，有 $\|u\|\|\nabla u\|\leqslant\varepsilon$.

假设存在正常数 ε_0，使得对所有 $t\geqslant 0$，有：

$$\|u\|\|\nabla u\|\geqslant\varepsilon_0$$

则由能量不等式可得：

$$\|u_0\|\|\nabla u\|\geqslant\varepsilon_0$$

即

$$\|\nabla u\|\geqslant C\varepsilon_0 \tag{6}$$

又由能量不等式可知：

$$\int_0^\infty\|\nabla u\|\mathrm{d}t<\infty$$

与(6) 式矛盾. 因此有：

$$\|u\|\|\nabla u\|\leqslant\varepsilon,\ t\geqslant M$$

代入(5) 式，由 $|\xi|\leqslant 1$ 可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|^2+\|\nabla\omega\|^2)\leqslant 0,\ t\geqslant M$$

联合能量不等式可得：

$$
\begin{aligned}
(t-M)(\|\nabla u\|^2+\|\nabla\omega\|^2)\leqslant \\
\int_M^t(\|\nabla u(s)\|^2+\|\nabla\omega(s)\|^2)\leqslant \\
\frac{1}{2}(\|u(M)\|^2+\|\omega(M)\|^2)\leqslant \\
\frac{1}{2}(\|u_0\|^2+\|\omega_0\|^2)=C
\end{aligned}
$$

因此可得：

$$t\|\nabla u(t)\|^2+t\|\nabla\omega(t)\|^2\longrightarrow 0,\ t\rightarrow\infty$$

参考文献:

[1] BIRNIR B, SVANSTEDT N. Existence Theory and Strong Attractors for the Rayleigh-Bénard Problem with a Large Aspect Ratio [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A, 2012, 10(1-2): 53-74.

[2] KAPUSTYAN A V, PANKOV A V, VALERO J. On Global Attractors of Multivalued Semiflows Generated by the 3D BénardSystem [J]. Set-Valued and Variational Analysis, 2012, 20(4): 667-667.

[3] ÇELEBI A O. Global Attractor for the Regularized BénardProblem [J]. Applicable Analysis, 2014, 93(9): 1989-2001.

[4] KAPUSTYAN O V, PANKOV A V. Global φ-Attractor for a Modified 3D Bénard System on Channel-Like Domains [J]. Nonautonomous Dynamical Systems, 2014, 1(1): 1-9.

[5] ANH C T, SON D T. Pullback Attractors for Nonautonomous 2D Bénard Problem in Some Unbounded Domains [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2013, 36(13): 1664-1684.

[6] TEMAM R, ROSA R, CABRAL M. Existence and Dimension of the Attractor for the Bénard Problem on Channel-Like Domains [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A, 2012, 10(1-2): 89-116.

[7] CHENG F, XU C J. Analytical Smoothing Effect of Solution for the Boussinesq Equations [EB/OL]. (2017-02-22) [2017-10-25]. https://arxiv.org/pdf/1702.06737.pdf.

[8] KAPUSTYAN O V, MELNIK V S, VALERO J. A Weak Attractor and Properties of Solutions for the Three-Dimensional Bénard Problem [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A (DCDS-A), 2012, 18(2-3): 449-481.

[9] BRANDOLESE L, SCHONBEK M. Large Time Decay and Growth for Solutions of a Viscous Boussinesq System [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2012, 364(10): 5057-5090.

[10] REN J. Large Time Behavior for Weak Solutions of the 3D Globally Modified Navier-Stokes Equations [J]. Abstract and Applied Analysis, 2014, 2014(4): 1-5.

Large Time Asymptotic Behavior for Weak Solutions of 3D Bénard System

XU Zhen-li, ZHU Chao-sheng

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we study the large time asymptotic behavior of weak solutions in the three dimensional Bénard system and give the decay estimate of the weak solution in using the energy method.

Key words: Bénard system; decay estimate; energy inequality

责任编辑 张 枸