DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.03.009

极值广义顺序统计量的矩收敛[①]

艾亚敏, 陈守全

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 本文讨论了极值广义顺序统计量的一种收敛: 矩收敛. 在 3 种极值分布类型基础上, 得到了极值广义顺序统计量矩收敛的性质.

关 键 词: 极值; 广义顺序统计量; 矩收敛

中图分类号: O211.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2019)03-0062-05

文献[1]用统一的方法描述了各种顺序统计量, 包括普通顺序统计量、序列顺序统计量、累加第 Ⅱ 型删失顺序统计量、记录值等. 若存在参数 $n \in \mathbb{N}$, $k > 0$, $m_1, m_2, \cdots, m_{n-1} \in \mathbb{R}$, $M_r = \sum_{j=r}^{n-1} m_j$, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, 使得 $\gamma_r = k + n - r + M_r > 0$ 对所有的 $r \in \{1, \cdots, n-1\}$ 都成立, 当 $n \geqslant 2$ 时, 记 $\widetilde{\boldsymbol{m}} = (m_1, m_2, \cdots, m_n)$, $\widetilde{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{R}^n$, 当 $n = 1$ 时, F 为任意分布函数. 若随机变量 $U(r, n, \widetilde{\boldsymbol{m}}, k)$, $r = 1, 2, \cdots, n$, 具有联合密度函数

$$f^{U(1, n, \widetilde{\boldsymbol{m}}, k), \cdots, U(n, n, \widetilde{\boldsymbol{m}}, k)(u_1, \cdots, u_n)} = k\left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1} (1-u_i)^{m_i}\right)(1-u_n)^{k-1}$$

其中 $0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant 1$, 则称 $U(r, n, \widetilde{\boldsymbol{m}}, k)$ 为均匀广义顺序统计量. 随机变量

$$X(r, n, \widetilde{\boldsymbol{m}}, k) = F^{\leftarrow}(U(r, n, \widetilde{\boldsymbol{m}}, k)) \qquad r = 1, \cdots, n$$

称为基于分布函数 F 的广义顺序统计量, 其中 $F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : F(x) \geqslant y\}$. 其中的一种特殊情况是当 $m_1 = \cdots m_{n-1} = m$, 随机变量各自表示成 $U(r, n, m, k)$ 和 $X(r, n, m, k)$, $r = 1, \cdots, n$. 对于普通顺序统计量, 若存在常数 $\alpha_n > 0$ 和 $\beta_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} F^n(\alpha_n x + \beta_n) = G(x) \tag{1}$$

则 $G(x)$ 为以下 3 大极值分布类型之一:

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x^{-\alpha}} & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(-x)^\alpha} & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Lambda(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

其中 α 为一正常数. 若(1)式成立, 则称 F 属于 $G(x)$ 的吸引场, 记为 $F \in D(G)$. 更多的内容参见文

① 收稿日期: 2017-12-23
基金项目: 国家自然科学基金项目(11571283).
作者简介: 艾亚敏(1994-), 女, 硕士研究生, 主要从事极值分析的研究.
通信作者: 陈守全, 博士, 副教授.

献[2-3]. 文献[4]已经证明了当 $m_1 = \cdots m_{n-1} = m > -1$，$k > 0$，当且仅当(1)式成立时存在常数 $a_n > 0$ 和 $b_n \in \mathbb{R}$，$n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} F^{X(n,n,m,k)}(a_n x + b_n) = \frac{1}{\Gamma(l)}\Gamma(l, (-\log G(x))^{m+1}) = H(x) \tag{2}$$

对于 H 的所有连续点都成立，且 $a_{\lfloor n^{m+1} \rfloor} = \alpha_n$，$b_{\lfloor n^{m+1} \rfloor} = \beta_n$，其中所有非退化分布 H 的形式为

$$H_1 = H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(l)}\Gamma(l, x^{-(m+1)\alpha}) & x > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0$$

$$H_2 = H_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(l)}\Gamma(l, (-x)^{(m+1)\alpha}) & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0$$

$$H_3 = H_{3,0}(x) = \frac{1}{\Gamma(l)}\Gamma(l, \mathrm{e}^{-(m+1)x}) \qquad x \in \mathbb{R}$$

其中：$l = \dfrac{k}{m+1}$，$\Gamma(a, x)$ 表示不完全伽马函数

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1}\mathrm{e}^{(-t)}\mathrm{d}t, \ a > 0, \ x \geqslant 0$$

文献[5]分析了极值广义顺序统计量的收敛速度；文献[6]研究了极值广义顺序统计量的密度收敛；文献[7]研究了广义顺序统计量的极限理论；文献[8]研究了极值广义顺序统计量的渐近分布的吸引场；文献[9]讨论了独立同混合广义伽马分布随机变量序列的规范化最大值的极限分布及其点点收敛速度；文献[10]给出了卡方分布序列最大值的渐近分布以及逐点收敛速度. 而对于极值广义顺序统计量的矩收敛尚未有文献提及. 本文将给出极值广义顺序统计量的矩收敛.

下节讨论极值广义顺序统计量的收敛性，即对任意的整数 t，

$$\lim_{n\to\infty} E(a_n^{-1}(W_n - b_n))^t = \int_{-\infty}^{\infty} x^t H(\mathrm{d}x)$$

其中 W_n 表示广义顺序统计量的最大值.

定义 $r(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}$ 为 F 的右端点.

定理 1 设(2)式成立.

1) 若 $H = H_{1,\alpha}(x)$，取 $a_{\lfloor n^{m+1} \rfloor} = \left(\dfrac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(n)$，$b_{\lfloor n^{m+1} \rfloor} = 0$. 若存在整数 $t > 0$

$$\int_{-\infty}^{0} |z|^t F^{X(n,n,m,k)}(\mathrm{d}x) < \infty \tag{3}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{W_n}{a_n}\right)^t = \int_{-\infty}^{\infty} x^t H_1(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\Gamma(l)}\Gamma\left(\frac{k\alpha - 1}{\alpha(m+1)}\right)$$

2) 若 $H = H_{2,\alpha}(x)$ 和 F 存在一个右端点 $r(F)$，取

$$a_{\lfloor n^{m+1} \rfloor} = r(F) - \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(n)$$

$$b_{\lfloor n^{m+1} \rfloor} = r(F)$$

则

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{W_n - b_n}{a_n}\right)^t = \int_{-\infty}^{0} x^t H_2(\mathrm{d}x) = \frac{(-1)^t}{\Gamma(l)}\Gamma\left(\frac{k\alpha + t}{\alpha(m+1)}\right)$$

3) 若 $H = H_{3,0}(x)$，取

$$b_{\lfloor n^{m+1} \rfloor} = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(n), \ a_{\lfloor n^{m+1} \rfloor} = f(b_{\lfloor n^{m+1} \rfloor})$$

其中 f 表示 $F \in D(\Lambda)$ 的辅助函数，则

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\frac{W_n-b_n}{a_n}\right)^t=\int_{-\infty}^{\infty}x^tH_3(\mathrm{d}x)=\frac{1}{\Gamma(l)}\left(-\frac{1}{m+1}\right)^t\Gamma^{(t)}(l)$$

其中 $\Gamma^{(t)}(l)$ 是伽马函数在 $x=l$ 处的 t 阶偏导数.

证　由(2)式知，对于任意的 $L>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^{-1}(W_n-b_n))^tI_{[|a_n^{-1}(W_n-b_n)|\leqslant L]}=\int_{-L}^{L}x^tH(\mathrm{d}x)$$

又因为

$$\begin{aligned}&|E(a_n^{-1}(W_n-b_n))^t-\int_{-\infty}^{\infty}x^tH(\mathrm{d}x)|\leqslant\\&|E(a_n^{-1}(W_n-b_n))^t-E(a_n^{-1}(W_n-b_n))^tI_{[|a_n^{-1}(W_n-b_n)|\leqslant L]}|+\\&|E(a_n^{-1}(W_n-b_n))^tI_{[|a_n^{-1}(W_n-b_n)|\leqslant L]}-\int_{-L}^{L}x^tH(\mathrm{d}x)|+\\&|\int_{-L}^{L}x^tH(\mathrm{d}x)-\int_{-\infty}^{\infty}x^kH(\mathrm{d}x)|\end{aligned}$$

所以只需证明

$$\lim_{L\to\infty}\limsup_{n\to\infty}E|a_n^{-1}(W_n-b_n)|^tI_{[|a_n^{-1}(W_n-b_n)|>L]}=0\tag{4}$$

综上所述，要证明定理的结论，只需证明（4）式成立. 由富比尼定理得

$$\begin{aligned}EY^tI_{[Y>L]}=&E\int_0^Y ts^{t-1}\mathrm{d}sI_{[Y>L]}=\\&E\int_0^L ts^{t-1}\mathrm{d}sI_{[Y>L]}+E\int_L^{\infty}ts^{t-1}I_{[Y>L,\,Y>s]}\mathrm{d}s=\\&L^tP[|a_n^{-1}(W_n-b_n)|>L]+\int_L^{\infty}ts^{t-1}P[Y>s]\mathrm{d}s=\\&A+B\end{aligned}$$

由(2)式有

$$\lim_{L\to\infty}\limsup_{n\to\infty}A=\lim_{L\to\infty}L^t(1-H(L)+H(-L))$$

1）

$$\begin{aligned}&\lim_{L\to\infty}\limsup_{n\to\infty}A=\lim_{L\to\infty}L^t(1-H_{1,\alpha}(L))=\\&\lim_{L\to\infty}L^t\left(1-\frac{1}{\Gamma(l)}\Gamma(l,L^{-\alpha(m+1)})\right)=\\&\lim_{L\to\infty}L^t\left(1-\frac{1}{\Gamma(l)}\int_{L^{-\alpha(m+1)}}^{\infty}s^{l-1}\mathrm{e}^{-s}\right)\mathrm{d}s=\\&\lim_{L\to\infty}L^t\ \frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^{L^{-\alpha(m+1)}}s^{l-1}\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s=0\end{aligned}$$

最后一步使用洛必达法则. 记

$$\begin{aligned}B=&\int_L^{\infty}ts^{t-1}(1-F^{X(n,n,m,k)}(a_ns+b_n))\mathrm{d}s+\int_L^{\infty}ts^{t-1}F^{X(n,n,m,k)}(-a_ns+b_n)\mathrm{d}s=\\&B_1+B_2\end{aligned}$$

由文献[4] 中注记 2.6 和

$$1-I_{1-(1-F(a_nx+b_n))^{m+1}}(n,l)=I_{(1-F(a_nx+b_n))^{m+1}}(l,n)$$

得到 $n\to\infty$，$I_{(1-F(a_nx+b_n))^{m+1}}(l,n)\to0$，所以

$$\lim_{L\to\infty}\limsup_{n\to\infty}B_1=0$$

考虑 B_2：

$$B_2=\int_L^{\infty}ts^{t-1}F^{X(n,n,m,k)}(-a_ns)\mathrm{d}s=$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{-a_n L} t\,|s|^{t-1} F^{X(n,n,m,k)}(s)\mathrm{d}s}{a_n^t} \leqslant \frac{\int_{-\infty}^{0} t\,|s|^{t-1} F^{X(n,n,m,k)}(s)\mathrm{d}s}{a_n^t}$$

由(3)式和 $a_n \to \infty$，对所有 $L > 0$，我们有$\lim\limits_{n\to\infty}\sup B_2 = 0$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{W_n - b_n}{a_n}\right)^t = \int_0^\infty x^t H_1(\mathrm{d}x) =$$
$$\frac{(m+1)\alpha}{\Gamma(l)}\int_0^\infty x^{t-\alpha k-1}\mathrm{e}^{-x^{-(m+1)\alpha}}\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^\infty x^{-\frac{t-k\alpha}{(m+1)\alpha}-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{\Gamma(l)}\Gamma\left(\frac{\alpha k - t}{\alpha(m+1)}\right)$$

2) 显然，F 的右端点 $0 < r(F) < \infty$ 得到 $F^{X(n,n,m,k)}$ 的右端点 $0 < r(F^{X(n,n,m,k)}) < \infty$，所以

$$\lim_{L\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sup A = 0$$
$$\lim_{L\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sup B = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{W_n - b_n}{a_n}\right)^t = \int_{-\infty}^0 x^t H_2(\mathrm{d}x) =$$
$$\frac{(m+1)\alpha}{\Gamma(l)}\int_{-\infty}^0 x^t(-x)^{k\alpha-1}\mathrm{e}^{-(-x)^{(m+1)\alpha}}\mathrm{d}x =$$
$$\frac{(-1)^t}{\Gamma(l)}\int_0^\infty x^{\frac{t+k\alpha}{(m+1)\alpha}-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x =$$
$$\frac{(-1)^t}{\Gamma(l)}\Gamma\left(\frac{t+\alpha k}{\alpha(m+1)}\right)$$

3)

$$\lim_{L\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sup A = \lim_{L\to\infty} L^t(1 - H_{3,0}(L) + H_{3,0}(-L)) =$$
$$\lim_{L\to\infty} L^t\left(1 - \frac{1}{\Gamma(l)}\Gamma(l,\mathrm{e}^{-(m+1)L}) + \frac{1}{\Gamma(l)}\Gamma(l,\mathrm{e}^{(m+1)L})\right) =$$
$$\lim_{L\to\infty} L^t\left(1 - \frac{1}{\Gamma(l)}\int_{\mathrm{e}^{-(m+1)L}}^\infty s^{l-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(l)}\int_{\mathrm{e}^{(m+1)L}}^\infty s^{l-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}s\right) =$$
$$\lim_{L\to\infty} L^t\left(\frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^{\mathrm{e}^{-(m+1)L}} s^{l-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(l)}\int_{\mathrm{e}^{(m+1)L}}^\infty s^{l-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}s\right) = 0$$

最后一步使用洛必达法则.

考虑 B_2，记 B_2 为：

$$\int_{-\infty}^{-L} t\,|s|^{t-1} F^{X(n,n,m,k)}(a_n s + b_n)\mathrm{d}s$$

从文献[4]中定理 3.4 的证明中知道对充分大的 n，$F^{X(n,n,m,k)}(a_n s + b_n) \leqslant 1 + \sum\limits_{i=0}^{\infty} y(i)$，其中

$$y(i) = \frac{m+1}{((m+1)i+k)i!\ \Gamma(l)} PQ^{(m+1)i+k}$$

其中常数 P 和 Q 存在，$\sum\limits_{i=0}^{\infty} y(i) < \infty$，当 $L \to \infty$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\sup B_2 \leqslant \int_{-\infty}^{-L} t\,|s|^{t-1}\left(1 + \sum_{i=0}^{\infty} y(i)\right)\mathrm{d}s \to 0$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{W_n - b_n}{a_n}\right)^t = \int_{-\infty}^{\infty} x^t H_{3,0}(\mathrm{d}x) = \\
&\frac{m+1}{\Gamma(l)}\int_{-\infty}^{\infty} x^t \mathrm{e}^{-kx} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(m+1)x}} \mathrm{d}x = \\
&\frac{1}{(m+1)^t \Gamma(l)}\int_{-\infty}^{\infty} x^t \mathrm{e}^{-lx} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} \mathrm{d}x = \\
&\frac{1}{\Gamma(l)}\left(-\frac{1}{m+1}\right)^t \int_0^{\infty} (\ln x)^t \mathrm{e}^{-x} x^{l-1} \mathrm{d}x = \\
&\frac{1}{\Gamma(l)}\left(-\frac{1}{m+1}\right)^t \Gamma^{(t)}(l)
\end{aligned}
$$

其中 $\Gamma^{(t)}(l)$ 是伽马函数在 $x=l$ 处的 t 阶偏导数.

参考文献：

[1] KAMPS U. A Concept of Generalized Order Statistics [J]. Journal of Statistical Planning and Inference，1995，48(1)：1-23.

[2] RESNICK S I. Extreme Values，Regular Variation，and Point Processes [M]. New York：Springer，1987.

[3] HAAN L D，FERREIRA A. Extreme Value Theory：An Introduction [M]. New York：Springer，2006.

[4] NASRI-ROUDSARI D. Extreme Value Theory of Generalized Order Statistics [J]. Journal of Statistical Planning and Inference，1996，55(3)：281-297.

[5] NASRI-ROUDSARI D，CRAMER E. On the Convergence Rates of Extreme Generalized Order Statistics [J]. Extremes，1999，2(4)：421-447.

[6] MAROHN F. Strong Domain of Attraction of Extreme Generalized Order Statistics [J]. Extremes，2002，5(4)：369-386.

[7] BARAKAT H M. Limit Theory of Generalized Order Statistics [J]. Journal of Statistical Planning and Inference，2007，137(1)：1-11.

[8] SCHMIEDT A B. Domains of Attraction of Asymptotic Distributions of Extreme Generalized Order Statistics [J]. Communication in Statistics Theory and Methods，2016，45(7)：2089-2104.

[9] 刘国涛，陈守全. 混合广义伽马分布的渐进性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(1)：84-87.

[10] 朱祖锐，陈守全. 卡方分布序列最大值的收敛速度 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(9)：137-142.

Moment Convergence of Extreme Generalized Order Statistics

AI Ya-min，　CHEN Shou-quan

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this note，we discuss the convergence of extreme generalized order statistics：convergence of moments. Under the three types of extreme distributions，the properties of moment convergence of extreme generalized order statistics are obtained.

Key words：extreme value；generalized order statistics；moment convergence

责任编辑　张　枸