DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.03.011

非定常 Navier-Stokes 方程有限元算子分裂算法[①]

刘　青，　尚月强

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：在连续解的正则性假设条件下，基于亚格子稳定模型和算子分裂方法提出了非定常不可压 Navier-Stokes 方程的有限元算子分裂算法. 其主要思想是：利用算子分裂方法把非线性项和不可压缩项分开，首先求解一个线性化的 Burger's 问题得到有限元解 $\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}$，然后再求解一个 Stokes 问题得到解 $\boldsymbol{u}_h^{n+1}$. 证明了速度的误差估计关于时间是一阶收敛的，并给出数值实验验证了理论的正确性.

关　键　词：不可压缩流体；Navier-Stokes 方程；有限元；算子分裂方法；误差估计

中图分类号：O241.82　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673－9868(2019)03－0075－09

不可压缩流体是流体力学中的一个重要问题，广泛用于天气、海洋以及血液循环等方面. Navier-Stokes 方程正好为描述这种流体运动规律提供了一种数学模型. 近几十年来，很多作者研究了 Navier-Stokes 方程的有限元解法[1－3]. 本文考虑的是非定常 Navier-Stokes 方程的有限元算子分裂算法. 算子分裂方法主要思想是在时间上分为若干步，使得不同的算子出现在不同的方程中，从而降低难度. 该方法最开始由文献[2－3]提出，已经用于空间离散、有限差分和谱方法中. 文献[4]给出的算子分裂方法是将非线性项和不可压缩性项分开处理. 本文在文献[4]的基础上给出稳定化的有限元算子分裂算法，该方法主要分为两步：第一步是线性椭圆型问题，可看作是线性化的 Burger's 问题；第二步是一般的 Stokes 问题. 通过理论推导，给出了速度的误差估计和收敛精度，并用数值实验验证了方法的正确性. 相比标准的有限元方法，我们的方法得到的误差估计更小.

1　预备知识

考虑下面的 Navier-Stokes 方程：

$$\boldsymbol{u}_t - \nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f},\ \text{in}\ \Omega\times(0,\ T] \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0,\ \text{in}\ \Omega\times(0,\ T] \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = 0,\ \text{on}\ \partial\Omega\times(0,\ T] \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}\,|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0,\ \text{in}\ \Omega \tag{4}$$

其中：Ω 是在 $\mathbb{R}^2$ 上具有利普希茨连续边界的有界区域，$\boldsymbol{u}(x,t)\in\mathbb{R}^d$ 表示速度矢量，$\boldsymbol{p}(x,t)\in\mathbb{R}$ 是压力，$\boldsymbol{f}(x,t)$ 是流体驱动的体积力，$\nu>0$ 为流体粘性系数，$\boldsymbol{u}_0$ 是使得 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ 的初始速度，并且 $\boldsymbol{u}_t=\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

对于上面给出的 Navier-Stokes 方程，我们引入下面的希尔伯特空间：

---

① 收稿日期：2018－03－22
基金项目：重庆市基础科学与前沿技术研究专项项目(cstc2016jcyjA0348).
作者简介：刘　青(1995－)，女，硕士研究生，主要从事偏微分方程数值解的研究.
通信作者：尚月强，博士，教授.

$$H=\{\boldsymbol{u}\in L^2(\Omega)\mid \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\mid_{\partial\Omega}=0\}$$

$$V=\{\boldsymbol{u}\in H_0^1\mid \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\}$$

其中:$(\cdot,\cdot)$ 表示空间 $L^2(\Omega)^2$ 或 $L^2(\Omega)$ 的标准内积,$(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{u})$ 和 $\|\nabla\boldsymbol{u}\|_0$ 为空间 V 的一般标量和范数. 在这篇文章中,我们用字母 C 表示一个与时间步长和网格参数无关的正数.

设 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 满足下面的条件:

(R1) $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}^0(0,T;\boldsymbol{H})\cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}^2(\Omega))$,$\nabla\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$.

(R2a) $\boldsymbol{u}_t\in\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$.

(R2b) $\boldsymbol{u}_t\in\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$.

(R3) $\int_0^T t\,\|\boldsymbol{u}_{tt}(t)\|_{-1}^2\,\mathrm{d}t\leqslant C$.

(R4) $\int_0^T \|\boldsymbol{u}_{tt}(t)\|_{V'}^2\,\mathrm{d}t\leqslant C$.

定义三线性项 $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ 为 $c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$,$\forall\boldsymbol{u}\in H^1(\Omega)$,$\boldsymbol{v}\in H^1(\Omega)$,$\boldsymbol{w}\in H_0^1(\Omega)$,它有如下的性质:

$$c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0,\ \forall\boldsymbol{u}\in H,\ \boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)$$

$$c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\leqslant C\begin{cases}\|\boldsymbol{u}\|_1\|\boldsymbol{v}\|_1\|\boldsymbol{w}\|_1, & \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in H_0^1(\Omega)\\ \|\boldsymbol{u}\|_0\|\boldsymbol{v}\|_2\|\boldsymbol{w}\|_1, & \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\in H_0^1(\Omega),\ \boldsymbol{v}\in H^2(\Omega)\\ \|\boldsymbol{u}\|_0^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{u}\|_1^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{v}\|_1\|\boldsymbol{w}\|_1, & \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in H_0^1(\Omega)\end{cases}$$

并且定义:

$$\tilde{c}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\frac{1}{2}(c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})-c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})),\ \forall\boldsymbol{u}\in H^1(\Omega),\ \boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega),\ \boldsymbol{w}\in H_0^1(\Omega)$$

2 有限元算子分裂算法

2.1 时间离散的算子分裂方法

步骤一 寻找解 $\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}$ 使得

$$\frac{\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{u}^n}{\delta t}-\nu\Delta\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}+(\boldsymbol{u}^n\cdot\nabla)\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{f}^n \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}\mid_{\partial\Omega}=\boldsymbol{0} \tag{6}$$

步骤二 根据(5)式解得的 $\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}$ 求解 $\boldsymbol{u}^{n+1}$ 和 $\boldsymbol{p}^{n+1}$ 使得

$$\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\delta t}-\nu\Delta(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}})+\nabla\boldsymbol{p}^{n+1}=\boldsymbol{0} \tag{7}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{0} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1}\mid_{\partial\Omega}=\boldsymbol{0} \tag{9}$$

其中 δt 是时间步长,满足 $0<\delta t<1$,$t_n=n\delta t$,$n=0,1,\cdots,N-1$,和 $N=\left[\frac{T}{\delta t}\right]$.

2.2 亚格子稳定化的有限元方法

对于方程(5)-(9)的有限元离散,我们假设 $T^\mu=\{K\}(\mu=h)$ 是准均匀的三角形网格剖分并且网格尺寸 $0<\mu<1$. 定义数值格式中出现的亚格子模型为:

$$G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\alpha(\nabla(I-\Pi_\mu)\boldsymbol{u},\nabla(I-\Pi_\mu)\boldsymbol{v}),\ \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^d \tag{10}$$

其中 $\alpha>0$ 是稳定化参数,根据算子 Π_h 的定义,下列关系式成立:

$$G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\alpha(\nabla(I-\Pi_\mu)\boldsymbol{u},\nabla(I-\Pi_\mu)\boldsymbol{v})=\alpha(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})-\alpha(\nabla\Pi_\mu\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}),\ \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^d \tag{11}$$

我们定义 $R_0=\{\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega):\boldsymbol{v}|_K\in P_0,\ \forall K\in \boldsymbol{T}^\mu(\Omega)\}$，$L_\mu=R_0^{2\times 2}$，$L=L^2(\Omega)^{2\times 2}$，其中 P_0 是常量元素 K 的空间，那么标准的 L^2 －正交投影 $\Pi_\mu: L\longrightarrow L_\mu$ 有如下性质：

$$(\nabla \Pi_\mu \boldsymbol{u},\ \nabla \boldsymbol{v})=(\nabla \boldsymbol{u},\ \nabla \boldsymbol{v}),\ \forall \boldsymbol{u}\in H_0^1(\Omega)^d,\ \boldsymbol{v}\in L_\mu \tag{12}$$

$$\|\nabla \Pi_\mu \boldsymbol{v}\|_0\leqslant C\|\nabla \boldsymbol{v}\|_0,\ \forall \boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^d \tag{13}$$

下面给出亚格子稳定化的有限元算子分裂算法：

步骤一　对于给定的 $\boldsymbol{u}_h^n\in V_h$ 使得对于所有的 $\boldsymbol{v}_h^n\in V_h$，有

$$\frac{1}{\delta t}(\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{u}_h^n,\ \boldsymbol{v}_h)+\nu(\nabla \boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}},\ \nabla \boldsymbol{v}_h)+\tilde{c}(\boldsymbol{u}_h^n,\ \boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{v}_h)+G(\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{v}_h)=(\boldsymbol{f}^n,\ \boldsymbol{v}_h) \tag{14}$$

步骤二　寻找解 $\boldsymbol{u}_h^{n+1}\in V_h$ 和 $\boldsymbol{p}_h^{n+1}\in Q_h$ 使得对于所有的 $(\boldsymbol{v}_h,\ \boldsymbol{q}_h)\in V_h\times Q_h$ 有

$$\frac{1}{\delta t}(\boldsymbol{u}_h^{n+1}-\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{v}_h)+\nu(\nabla(\boldsymbol{u}_h^{n+1}-\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}),\ \nabla \boldsymbol{v}_h)-(\boldsymbol{p}_h^{n+1},\ \nabla\cdot \boldsymbol{v}_h)=0 \tag{15}$$

$$(\nabla\cdot \boldsymbol{u}_h^{n+1},\ \boldsymbol{q}_h)=0 \tag{16}$$

上述提到的方法中，步骤二可以看作是一般的 Stokes 问题．其中有限元空间 $V_h\subset H_0^1(\Omega)$，$Q_h\subset L_0^2(\Omega)$ 且 V_h 和 Q_h 要求满足下面的条件：

（H1）存在与 h 无关的 $\beta>0$，使得对于所有的 $h>0$ 有：

$$\inf_{\boldsymbol{q}_h\in Q_h-Ker\,B_h^t}\left(\sup_{\boldsymbol{v}_h\in V_h-\{0\}}\frac{(\boldsymbol{q}_h,\ \nabla\cdot \boldsymbol{v}_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_1\|\boldsymbol{q}_h\|_{Q_h/\ker B_h^t}}\right)\geqslant\beta>0$$

其中 $B_h: V_h\longrightarrow Q_h'$ 和 $B_h^t: Q_h\longrightarrow V_h'$ 定义如下：

$$B_h(\boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{q}_h)=B_h^t(\boldsymbol{q}_h)(\boldsymbol{v}_h)=(\boldsymbol{q}_h,\ \nabla\cdot \boldsymbol{v}_h),\ \forall \boldsymbol{v}_h\in V_h,\ \forall \boldsymbol{q}_h\in Q_h$$

（H2）存在与 h 无关的 $\gamma>0$，使得对于所有的 $\boldsymbol{v}\in H^r(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{q}\in H^s(\Omega)$ 以及任意的 $h>0$ 有：

$$\inf_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h\|_m\leqslant\gamma h^{k_1-m}\|\boldsymbol{v}\|_r,\ 0\leqslant m\leqslant k_1,\ k_1=\min\{k+1,\ r\}$$

$$\inf_{\boldsymbol{q}_h\in Q_h}\|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h\|_m\leqslant\gamma h^{k_2-m}\|\boldsymbol{q}\|_s,\ 0\leqslant m\leqslant k_2,\ k_2=\min\{k,\ s\}$$

（H3）存在与 δt 和 h 无关的 $C>0$，使得：

$$\delta t\geqslant Ch^2$$

3　误差估计

3.1　速度的半离散误差估计

定义速度误差函数为：

$$\boldsymbol{e}_c^{n+1}=\boldsymbol{u}(t_{n+1})-\boldsymbol{u}^{n+1}$$

$$\boldsymbol{e}_c^{n+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{u}(t_{n+1})-\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{r}_c^{n+1}=\boldsymbol{p}(t_{n+1})-\boldsymbol{p}^{n+1}$$

定理 1[4]　假设(R1),(R2b),(R3)和(R4)成立，那么对 $N=0,\cdots,\left[\frac{T}{\delta t}\right]-1$，和足够小的 δt，有下面的估计：

$$\|\boldsymbol{e}_c^{N+1}\|_0^2+\delta t\nu\sum_{n=0}^{N}\|\boldsymbol{e}_c^{n+1}\|_1^2\leqslant C\delta t^2 \tag{17}$$

3.2　全离散解的误差估计

设有限元解 $(\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{u}_h^{n+1},\ \boldsymbol{p}_h^{n+1})$ 是半离散分步解 $(\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{u}^{n+1},\ \boldsymbol{p}^{n+1})$ 的逼近解，我们定义如下误差：

$$\boldsymbol{e}_d^{n+1}=\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}_h^{n+1}$$

$$\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{r}_d^{n+1}=\boldsymbol{p}^{n+1}-\boldsymbol{p}_h^{n+1}$$

引入与有限元空间有关的误差函数：

$$\begin{aligned}E_n(h)=&\inf_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\|\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h\|_1+\frac{1}{h}\inf_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\|\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h\|_0+\\&\inf_{q_h\in Q_h}\|\boldsymbol{p}^{n+1}-\boldsymbol{q}_h\|_0+\\&\inf_{\boldsymbol{w}_h\in\ker B_h}\|\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{w}_h\|_1+\frac{1}{h}\inf_{\boldsymbol{w}_h\in\ker B_h}\|\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{w}_h\|_0\end{aligned}$$

$$E(h)=\max_{n=0,\cdots,N}E_n(h)$$

引理1[4] 设 V_h 和 Q_h 满足inf-sup条件(H1)，则对于 $\boldsymbol{u}\in V$ 满足：

$$\inf_{\boldsymbol{w}_h\in\ker B_h}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}_h\|_1\leqslant C\inf_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h\|_1$$

$$\inf_{\boldsymbol{w}_h\in\ker B_h}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}_h\|_0\leqslant Ch\inf_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h\|_1$$

定理2 设(R1),(R2b),(R3),(H1)和(H3)成立，那么对于 $N=0,\cdots,\left[\frac{T}{\delta t}\right]-1$ 和足够小的 δt 和 h，满足：

$$\|\boldsymbol{e}_d^{N+1}\|_0^2+\|\boldsymbol{e}_d^{N+\frac{1}{2}}\|_0^2+\delta t\nu\sum_{n=0}^{N}\{\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}\|_1^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2\}\leqslant C(E(h))^2 \tag{18}$$

证 让(5)式和(14)式与 $\boldsymbol{v}_h$ 做内积，且让两式相减得：$\forall(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{q}_h)\in V_h\times Q_h$，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\delta t}(\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{e}_d^n,\boldsymbol{v}_h)+(\nu+\alpha)(\nabla\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\nabla\boldsymbol{v}_h)=\\&\tilde{c}(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{v}_h)-\tilde{c}(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{v}_h)+\alpha(\Pi_h\nabla\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}},\nabla\boldsymbol{v}_h)\end{aligned}\tag{19}$$

$$\frac{1}{\delta t}(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{v}_h)+\nu(\nabla(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}),\nabla\boldsymbol{v}_h)-(\boldsymbol{r}_d^{n+1},\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h)=0\tag{20}$$

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{e}_d^{n+1},\boldsymbol{q}_h)=0\tag{21}$$

对于任意给定的$(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{q}_h)\in V_h\times\ker(B_h)\times Q_h$，由(15)式可得：

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2-\|\boldsymbol{e}_d^n\|_0^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{e}_d^n\|_0^2+2\nu\delta t\|\nabla\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2+\\&\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}\|_0^2-\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2+\\&\nu\delta t\{\|\nabla\boldsymbol{e}_d^{n+1}\|_0^2-\|\nabla\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2+\|\nabla(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}})\|_0^2\}+\\&2\delta t\alpha\|\nabla\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2+2\delta t\alpha\|\nabla\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2=\\&2(\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{e}_d^n,\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)+2\delta t\nu(\nabla\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\nabla(\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h))+2(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{w}_h)+\\&2\delta t\nu(\nabla(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}),\nabla(\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h))+2\delta t\tilde{c}(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)-\\&2\delta t\tilde{c}(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)-2\delta t(\boldsymbol{r}_d^{n+1},\nabla\cdot(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{w}_h))+\\&2\delta t(\nabla\cdot\boldsymbol{e}_d^{n+1},\boldsymbol{p}^{n+1}-\boldsymbol{q}_h)+2\delta t\,G(\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)-\\&2\delta t\,G(\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)\end{aligned}\tag{22}$$

下面对(22)式右端各项估计：

$$2(\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{e}_d^n,\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)\leqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{e}_d^n\|_0^2+c\|\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h\|_0^2$$

$$2\delta t\nu(\nabla\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\nabla(\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h))\leqslant2\delta t\nu\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2\|\nabla(\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)\|_0^2\leqslant$$

$$\frac{\delta t\nu}{7}(\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}\|_0^2+\|\nabla(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}})\|_0^2)+c\delta t\|\nabla(\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)\|_0^2$$

$$2(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{w}_h)\leqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{e}_d^{n}\|_0^2+c\|\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{w}_h\|_0^2$$

$$2\delta t\nu(\nabla(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}),\nabla(\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h))\leqslant 2\delta t\nu\|\nabla(\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{e}_d^{n})\|_0\|\nabla(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{w}_h)\|_0\leqslant$$

$$\frac{\delta t\nu}{7}(\|\nabla(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}})\|_0^2)+c\delta t\|\nabla(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{w}_h)\|_0^2-2\delta t(\boldsymbol{r}_d^{n+1},\nabla\cdot(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{w}_h))=$$

$$-2\delta t(\boldsymbol{p}^{n+1}-\boldsymbol{q}_h,\nabla\cdot(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{w}_h))+2\delta t(\boldsymbol{p}_h^{n+1}-\boldsymbol{q}_h,\nabla\cdot(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{w}_h))\leqslant$$

$$\delta t\|\boldsymbol{p}_h^{n+1}-\boldsymbol{q}_h\|_0^2+c\delta t\|\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{w}_h\|_1^2 \tag{23}$$

因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{n+1}=0$ 且 $\boldsymbol{w}_h\in\ker(B_h)$.

$$2\delta t(\nabla\cdot\boldsymbol{e}_d^{n+1},\boldsymbol{p}^{n+1}-\boldsymbol{q}_h)\leqslant c\delta t\|\boldsymbol{p}_h^{n+1}-\boldsymbol{q}_h\|_0^2+\frac{\delta t\nu}{7}\|\nabla\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2$$

$$2\delta t\,G(\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)\leqslant 2\delta t\alpha\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0\|\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{v}_h\|_0\leqslant$$

$$\delta t\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2+c\alpha^2\delta t\|\nabla(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{v}_h)\|_0^2-2\delta t\,G(\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)\leqslant$$

$$\delta t\|\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2+c\alpha^2\delta t\|\nabla(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{v}_h)\|_0^2 \tag{24}$$

对于三线性项有：

$$2\delta t(\tilde{c}(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)-\tilde{c}(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h))=$$

$$2\delta t(-\tilde{c}(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}})+\tilde{c}(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)-$$

$$\tilde{c}(\boldsymbol{e}_d^n,\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}})+\tilde{c}(\boldsymbol{e}_d^n,\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)) \tag{25}$$

在(25)式中右端第一项为 0，对其余各项估计：

$$2\delta t\tilde{c}(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)=$$

$$-2\delta t\tilde{c}(\boldsymbol{e}_d^n,\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)+2\delta t\tilde{c}(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)\leqslant$$

$$c\nu\delta t(\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1\|\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h\|_1+\|\boldsymbol{u}^n\|_1\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1\|\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h\|_1)\leqslant$$

$$c\nu\delta t\|\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h\|_1(\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2)+$$

$$\frac{\delta t\nu}{7}\|\nabla\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2+\|\nabla(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}})\|_0^2+c\delta t\|\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h\|_1^2 \tag{26}$$

由定理 1 可知，$\|\boldsymbol{e}_c^{n+\frac{1}{2}}\|_1\leqslant C\delta t^{\frac{1}{2}}$，且由(R1)可得：

$$-2\delta t\tilde{c}(\boldsymbol{e}_d^n,\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}})=$$

$$2\delta t\tilde{c}(\boldsymbol{e}_d^n,\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}})-2\delta t\tilde{c}(\boldsymbol{e}_d^n,\boldsymbol{u}(t_n+1),\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}})\leqslant$$

$$c\delta t\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{e}_c^{n+\frac{1}{2}}\|_1\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1+c\delta t\|\boldsymbol{e}_d^n\|_0\|\boldsymbol{u}(t_n+1)\|_2\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1\leqslant$$

$$c\delta t^{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{e}_c^{n+\frac{1}{2}}\|_1+\|\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h\|_1(\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1^2+c\delta t\|\boldsymbol{e}_d^n\|_0\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1)\leqslant$$

$$c\delta t^2\|\boldsymbol{e}_d^n\|_0\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1+\frac{\delta t\nu}{7}(\|\nabla\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2+\|\nabla(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}})\|_0^2)+$$

$$c\delta t\|\boldsymbol{e}_d^n\|_0^2+\frac{\delta t\nu}{7}(\|\nabla\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2+\|\nabla(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}})\|_0^2)\leqslant$$

$$\delta t\|\boldsymbol{e}_d^n\|_0^2+\nu\delta t^3\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1^2+\frac{\delta t\nu}{7}(\|\nabla\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2+\|\nabla(\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}})\|_0^2) \tag{27}$$

同理，可得：

$$2\delta t\tilde{c}(\boldsymbol{e}_d^n, \boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)=$$

$$-2\delta t(\tilde{c}(\boldsymbol{e}_d^n, \boldsymbol{e}_c^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h)+\tilde{c}(\boldsymbol{e}_d^n, \boldsymbol{u}(t_n+1), \boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h))\leqslant$$

$$C\delta t\|\boldsymbol{e}_d^n\|_0^2+\nu\delta t^3\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1^2+C\delta t\|\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{v}_h\|_1^2 \tag{28}$$

将(23),(24),(26),(27),(28)式代入(22)式，并且两边同时取下确界可得：

$$\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2-\|\boldsymbol{e}_d^n\|_0^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{e}_d^n\|_0^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2+$$

$$\nu\delta t\,(\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}\|_1^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2)\leqslant$$

$$Ch^2(E_n(h))^2+C\delta t(E_n(h))^2+C\delta t\|\boldsymbol{e}_d^n\|_0^2+\nu\delta t^3\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1^2+$$

$$C\nu\delta t(E_n(h))(\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}\|_1^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2)+C\alpha^2\delta t(E_n(h))^2 \tag{29}$$

然后将(29)式两端从0加到 $N-1$，当时间足够小时，得：

$$\|\boldsymbol{e}_d^{N+1}\|_0^2+\sum_{n=0}^{N}(\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{e}_d^n\|_0^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2)+$$

$$\nu\delta t\sum_{n=0}^{N}(\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}\|_1^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2)\leqslant$$

$$C\left(1+\frac{h^2}{\delta t}\right)(E(h))^2+C\delta t\sum_{n=0}^{N}\|\boldsymbol{e}_d^n\|_0^2+\nu\delta t^3\sum_{n=0}^{N}\|\boldsymbol{e}_d^n\|_1^2+$$

$$C(E(h))\nu\delta t\sum_{n=0}^{N}(\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}\|_1^2+\|\boldsymbol{e}_d^{n+1}-\boldsymbol{e}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2)+C\alpha^2(E(h))^2$$

对于足够小的 δt 和 h，由离散的Gronwall引理，(H3)和三角不等式得证定理2成立.

结合定理1和定理2，我们可估计

$$\boldsymbol{e}^{n+1}=\boldsymbol{u}(t_{n+1})-\boldsymbol{u}_h^{n+1}=\boldsymbol{e}_c^{n+1}+\boldsymbol{e}_d^{n+1}$$

推论 设(R1),(R2b),(R3),(H1),(H2)和(H3)成立，设对于所有的 $n=0,\cdots,\left[\frac{T}{\delta t}\right]-1$，$\boldsymbol{u}^{n+1}$，$\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}\in H^k(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{p}^{n+1}\in H^{k-1}(\Omega)$ 且一致有界，那么对于 $n=0,\cdots,\left[\frac{T}{\delta t}\right]-1$，以及足够小的 $\delta t>0$ 和 h，有如下估计：

$$\|\boldsymbol{e}^{N+1}\|_0^2+\delta t\nu\sum_{n=0}^{N}\|\boldsymbol{e}^{n+1}\|_1^2\leqslant C(\delta t^2+h^{2k})$$

4 数值实验

利用FreeFem++软件[11]进行一些实验验证理论预测的正确性.

4.1 解析解

选择Navier-Stokes方程的精确解为：

$$u_1=10x^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1)\exp(-t)$$
$$u_2=-10x(x-1)(2x-1)y^2(y-1)^2\exp(-t)$$
$$p=10(3x^2+3y^2-2)\exp(-t)$$

其中解的区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^2$，在这个问题中 $P_1^b-P_1$ 元用于空间离散，并且取 $\nu=1.0\times10^{-7}$，$T=0.1$，$\alpha=0.1h$. 表1给出了数值结果. 从表1可知：我们的方法对空间和时间离散是一阶收敛的，同时数值结果也表明我们的理论预测是正确的. 为了对比我们现在的方法和标准的有限元方法，当网格尺寸 $h=\frac{1}{128}$，时间步长 $\Delta t=\frac{1}{800}$ 时，我们分别计算 $\nu=1,0.1,0.01,0.001$ 时方程的解. 从表2可以看出我们的有限元算子分裂算法得到的误差估计更小.

表 1　稳定化的有限元算子分裂算法近似解的误差

h	Δt	$\Vert \nabla u - \nabla u^h \Vert_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}$	收敛阶	计算时间 /s
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{100}$	0.016 677	—	0.265
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{200}$	0.005 894 4	1.500 44	1.652
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{400}$	0.002 351 27	1.325 91	10.666
$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{800}$	0.001 029 7	1.191 22	75.571
$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1\,600}$	0.000 478 311	1.106 2	1 002.16

表 2　有限元算子分裂算法与标准有限元法比较表

ν	标准的有限元方法		有限元算子分裂算法	
	$\Vert \nabla u - \nabla u^h \Vert_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}$	计算时间 /s	$\Vert \nabla u - \nabla u^h \Vert_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}$	计算时间 /s
1	0.005 601 3	80.262	0.000 204 712	79.797
0.1	0.009 462 24	66.89	0.000 207 468	82.005
0.01	0.010 037 6	81.108	0.000 394 542	82.026
0.001	0.010 643 1	71.778	0.003 376 52	80.38

4.2　圆柱绕流

考虑一个定义在 $\Omega=[0,2.2]\times[0,0.41]$ 上的圆柱绕流问题，其中圆心为 $(x,y)=(0.2,0.2)$，半径为 0.05，取入流速度为

$$u_1(0,y,t)=u_1(2.2,y,t)=\frac{6}{0.41^2}\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)y(0.41-y)$$

$$u_1(0,y,t)=u_1(2.2,y,t)=0$$

并且在其他边界上满足无滑边界条件.

在这个问题中，Hood-Taylor 元用于空间离散，粘性系数 $\nu=0.001$，网格大小为 $h=\frac{1}{32}$，稳定化参数 $\alpha=0.1h^2$，时间步长 $\Delta t=0.001$，分别取得最后时刻 $T=4,6,7$. 图 1 给出了区域 Ω 的网格剖分，图 2 描述了算法关于动能和时间 T 的关系，图 3 对比了不同时刻的流线图.

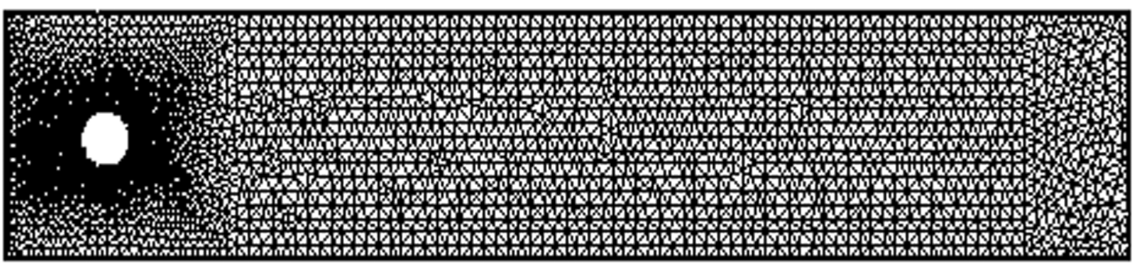

图 1　网格剖分图

5　结　　论

本文主要结合亚格子稳定模型和有限元算子分裂算法，理论上给出了全离散速度的误差估计，并用数值实验验证了理论的正确性和方法的有效性. 对比标准的有限元方法，我们的方法得到的误差估计更小.

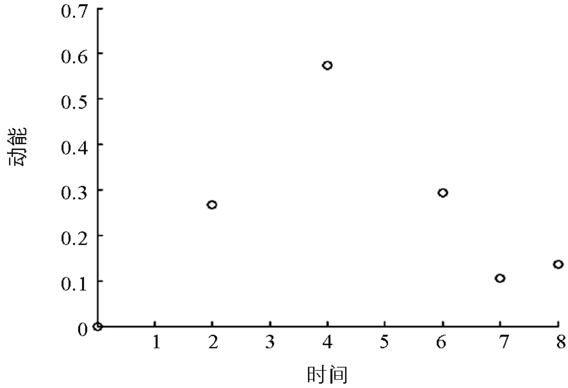

图 2　圆柱绕流动能与时间关系图

(a) T=4

(a) T=6

(a) T=7

图3 当 Δt=0.001 时圆柱绕流的流线在不同时刻的形状

参考文献:

[1] CHORIN A J. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations [J]. Computational Fluid Mechanics, 1968, 22(104): 745-762.

[2] GIRAULT V, RAVIART P A. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms [M] // Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms. New York: Springer-Verlag, 1986.

[3] GLOWINSKI R. Finite Element Methods for Incompressible Viscous Flow [J]. Handbook of Numerical Analysis, 2003, 9: 3-1176.

[4] BLASCO J, CODINA R. Error Estimates for an Operator-Splitting Method for Incompressible Flows [J]. Applied Numerical Mathematics, 2004, 51(1): 1-17.

[5] QUARTERONI A, SALERI F, VENEZIANI A. Factorization Methods for the Numerical Approximation of Navier-Stokes Equations [J]. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 188(1-3): 505-526.

[6] SHEN J. On Error Estimates of Projection Methods for Navier-Stokes Equations: First-Order Schemes [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(1): 57-77.

[7] GUERMOND J L, QUARTAPELLE L. On the Approximation of the Unsteady Navier-Stokes Equations by Finite Element Projection Methods [J]. Numerische Mathematik, 1998, 80(2): 207-238.

[8] BLASCO J, CODINA R, HUERTA A. A Fractional-Step Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations Related to a Predictor-Multicorrector Algorithm [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2015, 28(10): 1391-1419.

[9] KIM J，MOIN P. Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations [J]. Journal of Computational Physics，1985，59(2)：308-323.

[10] DONEA J，GIULIANI S，LAVAL H，et al. Finite Element Solution of the Unsteady Navier-Stokes Equations by a Fractional Step Method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，1982，30(1)：53-73.

[11] HECHT F. New Development in Freefem＋＋ [J]. Journal of Numerical Mathematics，2012，20(3-4)：251-266.

[12] 杨晓成，尚月强. Navier-Stokes 方程的回溯两水平有限元变分度尺度方法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(10)：47-57.

The Finite Element Operator Splitting Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations

LIU　Qing，　SHANG Yue-qiang

School of Mathematics and Statistic，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Under the regularity assumptions on the continuous solution，we provide a finite element operator splitting method for the simulation of unsteady incompressible Navier-Stokes equations，which is based on the subgrid model. It is a two-step scheme in which the nonlinearity and incompressibility are split into different steps. First，a linear Burger's system is solved，and the solution of the finite element $\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}$ is obtained. Then a Stokes problem is solved，and its solution $\boldsymbol{u}_h^{n+1}$ is obtained. We derive the error bound of the approximate velocity which is first-order in time. Numerical experiments have verified the correctness of the theoretical analysis.

Key words：incompressible flow；Navier-Stokes equation；finite element；operator splitting method；error analysis

责任编辑　张　枸