DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.04.013

关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=18y(y+1)(y+2)(y+3)$[①]

杨晓柳， 牟全武

西安工程大学 理学院，西安 710048

摘要：运用 Pell 方程、递推序列、同余式及平方剩余等初等数论知识，证明了不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=18y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有4组非平凡整数解 $(x, y)=(6, 4), (-9, 4), (6, -7), (-9, -7)$，同时给出该不定方程的全部整数解，分别为 $(x, y)=(0, 0), (0, -1), (0, -2), (0, -3), (-1, 0), (-1, -1), (-1, -2), (-1, -3), (-2, 0), (-2, -1), (-2, -2), (-2, -3), (-3, 0), (-3, -1), (-3, -2), (-3, -3), (6, 4), (-9, 4), (6, -7), (-9, -7)$.

关 键 词：不定方程；整数解；递推序列；平方剩余

中图分类号：O156.2 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2019)04-0092-05

在求解不定方程的初等方法中，递推序列法是有效的工具之一．该方法通过将不定方程的求解问题转化为对特定递推序列数论性质的研究，然后综合利用同余及二次剩余等各种初等的方法与技巧制造矛盾，最终找到不定方程的所有解[1-2]．设 p 与 q 为给定的正整数并且互素，一些作者对形如

$$px(x+1)(x+2)(x+3)=qy(y+1)(y+2)(y+3)$$

的四次不定方程做了大量研究[3-19]．在本文里，我们将利用递推序列法给出不定方程

$$5x(x+1)(x+2)(x+3)=18y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

的全部整数解 (x, y).

先将方程(1)化为

$$[5(x^2+3x+1)]^2-90(y^2+3y+1)^2=-65 \tag{2}$$

令

$$u_n+v_n\sqrt{90}=(19+2\sqrt{90})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

这里 $19+2\sqrt{90}$ 是 Pell 方程 $u^2-90v^2=1$ 的基本解．又因 $5+\sqrt{90}$ 是 $x^2-90y^2=-65$ 的最小正整数解，根据文献[1]知，方程 $x^2-90y^2=-65$ 的全部整数解由以下两个结合类给出：

$$\pm(x_n+y_n\sqrt{90})=\pm(5+\sqrt{90})(u_n+v_n\sqrt{90})=\pm(5+\sqrt{90})(19+2\sqrt{90})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\pm(\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{90})=\pm(-5+\sqrt{90})(u_n+v_n\sqrt{90})=\pm(-5+\sqrt{90})(19+2\sqrt{90})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

所以，方程(2)的解应满足 $y^2+3y+1=\pm y_n, \pm\bar{y}$．注意到

$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{90}=-x_{-n}+y_{-n}\sqrt{90}$$

① 收稿日期：2018-01-16
基金项目：国家自然科学基金项目(11271283)；西安工程大学基础课程质量提升项目(104020184).
作者简介：杨晓柳(1992-)，女，硕士研究生，主要从事数论及其应用的研究.
通信作者：牟全武，副教授.

由此可得 $\bar{y}_n = y_{-n}$，且 n 取任意整数，故只需考虑 $y^2+3y+1=\pm y_n$，即

$$(2y+3)^2 = \pm 4y_n + 5 \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

容易验证下列关系式成立：

$$u_{n+1} = 38u_n - u_{n-1} \qquad u_0 = 1,\ u_1 = 19 \tag{4}$$

$$v_{n+1} = 38v_n - v_{n-1} \qquad v_0 = 0,\ v_1 = 2 \tag{5}$$

$$u_{2n} = 2u_n^2 - 1 \qquad v_{2n} = 2u_n v_n \tag{6}$$

$$u_{2n} = u_n^2 + 90v_n^2 \tag{7}$$

$$y_{n+1} = 38y_n - y_{n-1} \qquad y_0 = 1,\ y_1 = 29 \tag{8}$$

$$y_n = u_n + 5v_n \tag{9}$$

$$u_{n+2km} \equiv (-1)^k u_n \pmod{u_m} \qquad v_{n+2km} \equiv (-1)^k v_n \pmod{u_m} \tag{10}$$

$$y_{n+2km} \equiv (-1)^k y_n \pmod{u_m} \tag{11}$$

下面将证明：仅当 $n=0,1,-2$ 时(3)式成立，由此求得方程(2)的全部整数解.

1 $(2y+3)^2 = 4y_n + 5 (n \in \mathbb{Z})$

为了研究当 n 取何值时 $4y_n+5$ 为完全平方数，我们需要证明下述引理：

引理1 设 $2 \mid n$，则 $\left(\dfrac{\pm 20v_{2n}+5}{u_{2n}}\right) = \left(\dfrac{u_n \pm 4v_n}{53}\right)$.

证 对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，有 $u_{-n} = u_n$，$u_n > 0$. 当 $2 \mid n$ 时，$u_n \equiv 1 \pmod 5$，$u_{2n} = 2u_n^2 - 1 \equiv 1 \pmod 8$，$v_n \equiv 0 \pmod 2$，$u_n \equiv 1 \pmod 8$，于是

$$\left(\frac{\pm 20v_{2n}+5}{u_{2n}}\right) = \left(\frac{5}{u_{2n}}\right)\left(\frac{1 \pm 4v_{2n}}{u_{2n}}\right) = \left(\frac{u_{2n}}{5}\right)\left(\frac{1 \pm 8u_n v_n}{u_{2n}}\right) =$$

$$\left(\frac{2u_n^2 \pm 8u_n v_n}{u_{2n}}\right) = \left(\frac{2}{u_{2n}}\right)\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{u_n \pm 4v_n}{u_{2n}}\right) =$$

$$\left(\frac{u_{2n}}{u_n}\right)\left(\frac{u_{2n}}{u_n \pm 4v_n}\right) = \left(\frac{-1}{u_n}\right)\left(\frac{u_n^2 + 90v_n^2}{u_n \pm 4v_n}\right) =$$

$$\left(\frac{106}{u_n \pm 4v_n}\right) = \left(\frac{53}{u_n \pm 4v_n}\right) = \left(\frac{u_n \pm 4v_n}{53}\right)$$

引理2 若 $4y_n+5$ 为完全平方数，则必有 $n \equiv 0,1,-2 \pmod{900}$.

证 采取对序列 $\{4y_n+5\}$ 取素数模并排除非平方剩余的方法，具体分两步.

第一步：对序列 $\{4y_n+5\}$ 取素数模.

mod 281，排除 $n \equiv 2,3,7,9 \pmod{10}$，此时 $4y_n+5 \equiv 194,46,97,41 \pmod{281}$，余 $n \equiv 1,4,5,6,8,10 \pmod{10}$，即余 $n \equiv 1,4,5,6,8,10,11,14,15,16,18,20,21,24,25,26,28,30,31,34,35,36,38,40,41,44,45,46,48,50 \pmod{50}$.

mod 1 949，排除 $n \equiv 5,6,8,10,11,14,16,18,20,21,24,26,30,31,34,35,36,40,41,45,46 \pmod{50}$，余 $n \equiv 1,4,15,25,28,44,48,50 \pmod{50}$，即余 $n \equiv 1,4,15,25,28,38,44,48,50,51,54,65,75,78,88,94,98,100,101,104,115,125,128,138,144,148,150 \pmod{150}$.

mod 149，排除 $n \equiv 4,15,28,48,88,94,98,100,101,115,128,138,144 \pmod{150}$，余 $n \equiv 1,25,38,44,50,51,54,65,75,78,104,125,148,150 \pmod{150}$.

mod 601，排除 $n \equiv 25,51,54,78,104,125 \pmod{150}$，余 $n \equiv 1,38,44,50,65,75,148,150 \pmod{150}$，即余 $n \equiv 1,38,44,50,65,75,148,150,151,188,194,200,215,225,298,300 \pmod{300}$.

mod 122 401，排除 $n \equiv 50,65,151,188,194,200,215 \pmod{300}$，余 $n \equiv 1,38,44,75,148,150,225,298,300 \pmod{300}$.

mod 204 299，排除 $n \equiv 44,75,148,225 \pmod{300}$，余 $n \equiv 1,38,150,298,300 \pmod{300}$，即余 $n \equiv 1$, 38,150,298,300,301,338,450,598,600,601,638,750,898,900(mod 900).

mod 2 699，排除 $n\equiv 38,298,301,338,598,600 \pmod{900}$，余 $n\equiv 1,150,300,450,601,638,750,898,900 \pmod{900}$.

mod 81 001，排除 $n\equiv 150,300,638,750 \pmod{900}$，余 $n\equiv 1,450,601,898,900 \pmod{900}$.

mod 6 554 699，排除 $n\equiv 601 \pmod{900}$，余 $n\equiv 1,450,898,900 \pmod{900}$.

第二步：设法排除 $n\equiv 450 \pmod{900}$.

要排除 $n\equiv 450 \pmod{900}$，即排除 $n\equiv 450,1\,350 \pmod{1\,800}$.

mod 1 601，排除 $n\equiv 50,150 \pmod{200}$，即排除 $n\equiv 450,1\,350 \pmod{1\,800}$.

综上所述，仅剩下 $n\equiv 1,898,900 \pmod{900}$，即 $n\equiv 0,1,-2 \pmod{900}$. 引理 2 得证.

引理 3　当 $n\equiv 0 \pmod{900}$ 时，则仅当 $n=0$ 时 $4y_n+5$ 为完全平方数.

证　当 $n=0$ 时，$4y_n+5=4y_0+5=9=3^2$. 当 $n\equiv 0 \pmod{900}$ 且 $n\neq 0$ 时，可令

$$n=2\times k\times 3^2\times 5^2\times 2^t \qquad t\geqslant 1,\ 2\nmid k$$

对 $\{u_n\pm 4v_n\}$ 取模 53，可得两个剩余序列周期都为 13，而对 $\{2^t\}$ 模 13 的剩余序列的周期为 12，接下来，对 k 分两种情况讨论：

情况 1　$k\equiv 1 \pmod 4$ 时，令

$$m=\begin{cases}2^t & t\equiv 0,1,4,9,10,11 \pmod{12}\\ 3^2\times 2^t & t\equiv 2,3,5,8 \pmod{12}\\ 5^2\times 2^t & t\equiv 6,7 \pmod{12}\end{cases}$$

则 $m\equiv 1,2,3,5,7,10 \pmod{13}$，此时相应地有

$$u_m+4v_m\equiv 27,18,21,45,50,41 \pmod{53} \tag{12}$$

另一方面，由(11) 式可推出 $4y_n+5\equiv 20v_{2m}+5 \pmod{u_{2m}}$，再利用引理 1 及(12) 式得

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{20v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{u_m+4v_m}{53}\right)=-1$$

此时 $4y_n+5$ 不是完全平方数.

情况 2　$k\equiv -1 \pmod 4$ 时，令

$$m=\begin{cases}2^t & t\equiv 3,4,5,6,7,10 \pmod{12}\\ 3^2\times 2^t & t\equiv 2,8,9,11 \pmod{12}\\ 5^2\times 2^t & t\equiv 1,12 \pmod{12}\end{cases}$$

则 $m\equiv 3,6,8,10,11,12 \pmod{13}$，此时相应地有

$$u_m-4v_m\equiv 41,50,45,21,18,27 \pmod{53} \tag{13}$$

由(11) 式可推出 $4y_n+5\equiv -20v_{2m}+5 \pmod{u_{2m}}$，再根据引理 1 及(13) 式得

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-20v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{u_m-4v_m}{53}\right)=-1$$

此时 $4y_n+5$ 也不是完全平方数.

综上讨论，引理 3 得证.

引理 4　若 $n\equiv 1 \pmod{900}$，则仅当 $n=1$ 时 $4y_n+5$ 为完全平方数.

证　当 $n=1$ 时，$4y_n+5=4y_1+5=121=11^2$. 当 $n\equiv 1 \pmod{900}$ 且 $n\neq 1$ 时，可设

$$n=1+2\times k\times 3^2\times 5^2\times 2^t \qquad t\geqslant 1,\ 2\nmid k$$

令 $m=2^t\,(t\geqslant 1)$，则 $m\equiv 2,4 \pmod 6$，$u_m\equiv 18 \pmod{37}$. 由(11) 式得 $y_n\equiv -y_1\equiv -29 \pmod{u_m}$，又因为 $u_m\equiv 1 \pmod 8$，$u_m\equiv 1 \pmod 3$，所以

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-111}{u_m}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{3}{u_m}\right)\left(\frac{37}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{37}\right)=\left(\frac{18}{37}\right)=-1$$

由此可知 $4y_n+5$ 不是完全平方数. 引理 4 得证.

引理 5 若 $n \equiv -2 \pmod{900}$，则仅当 $n=-2$ 时，$4y_n+5$ 为完全平方数.

证 当 $n=-2$ 时，$4y_n+5=4y_{-2}+5=37^2$. 若 $n\equiv -2\pmod{900}$ 且 $n\neq -2$，可设

$$n=-2+2\times k\times 3^2\times 5^2\times 2^t \qquad t\geqslant 1,\ 2\nmid k$$

注意到对 $\{u_n\}$ 模 151 的周期为 75，而对 $\{2^t\}$ 模 75 的周期为 20，令

$$m=\begin{cases}2^t & t\equiv 1,2,3,7,9,10,11,13,17,18 \pmod{20}\\ 3^2\times 2^t & t\equiv 0,4,5,14,15 \pmod{20}\\ 5\times 2^t & t\equiv 6,19 \pmod{20}\\ 5^2\times 2^t & t\equiv 8,12,16 \pmod{20}\end{cases}$$

容易验证 $\left(\dfrac{u_m}{151}\right)=-1$. 另外，根据(11)式得 $y_n\equiv -y_{-2}\equiv -341 \pmod{u_m}$，所以

$$4y_n+5=-4\times 341+5\equiv -1\,359 \pmod{u_m}$$

由于 $u_m\equiv 1\pmod 8$，故

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-1\,359}{u_m}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{151}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{151}\right)=-1$$

所以 $4y_n+5$ 不是完全平方数，引理 5 得证.

2 $(2y+3)^2=-4y_n+5\ (n\in\mathbb{Z})$

引理 6 $-4y_n+5$ 是完全平方数当且仅当 $n=0$.

证 由 $-4y_n+5\geqslant 0$ 得 $y_n\leqslant 1$. 根据(8)式可知，当 $n\neq 0$ 时必有 $y_n\geqslant 9$，所以 $n=0$. 反之显然成立.

3 结 论

定理 1 不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=18y(y+1)(y+2)(y+3)$ 有 4 组非平凡整数解 $(x,y)=(6,4),(-9,4),(6,-7),(-9,-7)$.

证 由引理 3 得 $(2y+3)^2=4y_0+5=3^2$，即 $y=0,-3$；

由引理 4 得 $(2y+3)^2=4y_1+5=11^2$，即 $y=4,-7$；

由引理 5 得 $(2y+3)^2=4y_{-2}+5=37^2$，即 $y=17,-20$；

由引理 6 得 $(2y+3)^2=-4y_0+5=1^2$，即 $y=-1,-2$.

将 y 值代入方程(1)可得全部 20 组整数解，其中包括 16 组平凡解使得(1)式的两端都为 0，这些平凡解为 $(x,y)=(0,0),(0,-1),(0,-2),(0,-3),(-1,0),(-1,-1),(-1,-2),(-1,-3),(-2,0),(-2,-1),(-2,-2),(-2,-3),(-3,0),(-3,-1),(-3,-2),(-3,-3)$. 另外有 4 组非平凡解，即 $(x,y)=(6,4),(-9,4),(6,-7),(-9,-7)$.

参考文献：

[1] 曹珍富. 丢番图方程引论 [M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012：10-16，38-45.

[2] 柯 召，孙 琦. 谈谈不定方程 [M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011：15-29.

[3] COHN J H E. The Diophantine Equation $Y(Y+1)(Y+2)(Y+3)=12X(X+1)(X+2)(X+3)$ [J]. Pacific J Math, 1971, 37(2): 331-335.

[4] 罗 明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，1991，8(1)：1-8.

[5] 程 瑶，马玉林. 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2007，24(3)：27-30.

[6] 罗 明. 二次域 $Q(\sqrt{3})$ 的单位给出的两个递归数列中的三角数问题 [J]. 数学年刊(A 辑)，2008，29(2)：283-290.

[7] 罗 明，朱德辉，马芙蓉. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报

(自然科学版)，2009，34(5)：16-21.
[8] 段辉明，杨春德. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2009，32(1)：60-63.
[9] 瞿云云，曹 慧，罗永贵，等. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=15y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(6)：9-14.
[10] 郭凤明，罗 明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2013，30(5)：101-105.
[11] 郭凤明，罗 明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(10)：13-16.
[12] 张 洪，罗 明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=Dy(y+1)(y+2)(y+3)$(其中 $D=21，23$) [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2015，32(7)：56-61.
[13] 王 聪. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=30y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2016，33(1)：29-32.
[14] 林昌娜，罗 明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=34y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：10-14.
[15] 张 配，罗 明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=39y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆科技学院学报(自然科学版)，2017，19(3)：120-122.
[16] 张 配，罗 明. 关于不定方程 $7x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(2)：5-9.
[17] 李益孟，罗 明. 关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(8)：83-88.
[18] 胡邦群，罗 明. 关于不定方程 $6x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(10)：17-21.
[19] 陈 琼. 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=33y(y+1)(y+2)(y+3)$的整数解的研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(4)：35-40.

On the Diophantine Equation $5x(x+1)(x+2)(x+3)=18y(y+1)(y+2)(y+3)$

YANG Xiao-liu，　MU Quan-wu
School of Science，Xi'an Polytechnic University，Xi'an 710048，China

Abstract：Using some techniques of elementary number theory involving Pell's equation，recurrent sequence，congruence and quadratic residues，this paper proves that the diophantine equation $5x(x+1)(x+2)(x+3)=18y(y+1)(y+2)(y+3)$ has only four non-trivial solutions，i. e. $(x，y)=(6，4)，(-9，4)，(6，-7)，(-9，-7)$，and gives all of its integer solutions，i. e. $(x，y)=(0，0)，(0，-1)，(0，-2)，(0，-3)，(-1，0)，(-1，-1)，(-1，-2)，(-1，-3)，(-2，0)，(-2，-1)，(-2，-2)，(-2，-3)，(-3，0)，(-3，-1)，(-3，-2)，(-3，-3)，(6，4)，(-9，4)，(6，-7)，(-9，-7)$.

Key words：diophantine equation；integer solution；recurrent sequence；quadratic residue

责任编辑　廖　坤