第 41 卷第 4 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2019 年 4 月
Vol. 41　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2019

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.04.015

分数阶微分方程奇异系统边值问题正解的存在性①

康淑瑰[1]，　岳亚卿[2]，　郭建敏[1]

1. 大同大学 数学与统计学院，山西 大同 037009；
2. 山西师范大学 数学与计算机科学学院，山西 临汾 041000

摘要：主要讨论了一类带有奇异项的分数阶微分系统边值问题正解的存在性，通过讨论格林函数的性质，利用 Krasnoselskii 不动点定理得到该问题至少存在一个正解或两个正解的充分条件.

关　键　词：分数阶微分方程；奇异系统；边值问题；Krasnoselskii 不动点定理；正解

中图分类号：O175.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2019)04－0104－05

分数阶微分方程的研究有着十分重要的理论意义和实际应用价值[1-11]．近年来，分数阶微分方程已被广泛地应用于流体力学、材料力学、天文学等学科．随着分数阶微分方程理论的不断发展和完善，分数阶微分方程成为了科学中很多复杂现象建模的重要工具，并不断展现出它独特的优势.

受文献[1－2]的启发，本文利用 Krasnoselskii 不动点定理研究了分数阶微分方程奇异系统边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}\, u_i(t)=\lambda v_i(t) f_i(u(t))+\lambda h_i(t) & 0<t<1 \\ u_i(0)=u_i'(0)=u_i'(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $2<\alpha_i\leqslant 3$，$f_i:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ 连续，$\lim\limits_{u\to 0} f_i(u)=\infty$，$i=1,2,\cdots,n$，$D_{o^+}^{\alpha}$ 是标准的 Riemann-Liouville 型分数阶导数.

1　预备知识

引理 1[6]　若 $g(t)\in C[0,1]$，$2<\alpha\leqslant 3$，分数阶微分方程

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}\, u(t)+g(t)=0 & 0<t<1 \\ u(0)=u'(1)=u'(0)=0 \end{cases} \tag{2}$$

的唯一解是 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s)\mathrm{d}s$，其中

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{(1-s)^{\alpha-2}t^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1 \\ \dfrac{(1-s)^{\alpha-2}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1 \end{cases}$$

引理 2[6]　函数 $G(t,s)$ 具有性质：(ⅰ) 对于任意 $t,s\in(0,1)$，$G(t,s)>0$；(ⅱ) 对于任意 $t,s\in(0,1)$，$G(t,s)\geqslant\theta(t)G(1,s)$．其中 $\theta(t)=t^{\alpha-1}$.

---

①　收稿日期：2018－01－19

基金项目：国家自然科学基金项目(11271235,11871314,61803241)；山西省自然科学基金项目(201801D121001)；大同市科技局项目(2018146).

作者简介：康淑瑰(1964－)，女，教授，主要从事微分方程定性理论的研究.

引理3 假设 $g(t)\in C[0,1]$，则 $u(t)\in C[0,1]$ 是边值问题(2)的解当且仅当 $u(t)\in C[0,1]$ 是积分方程 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s)\mathrm{d}s$ 的解.

引理4[7] 设 E 是Banach空间，P 是 E 中的锥，Ω_1,Ω_2 为 E 中的有界开集且满足 $\theta\in\Omega_1\subseteq\overline{\Omega}_1\subseteq\Omega_2$. 设 $A: P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\longrightarrow P$ 是全连续算子，如果满足下列条件之一：

(i) $\|Au\|\geqslant\|u\|(u\in P\cap\partial\Omega_1)$，且 $\|Au\|\leqslant\|u\|(u\in P\cap\partial\Omega_2)$；

(ii) $\|Au\|\leqslant\|u\|(u\in P\cap\partial\Omega_1)$，且 $\|Au\|\geqslant\|u\|(u\in P\cap\partial\Omega_2)$.

则 A 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中至少有一个不动点.

2 主要结论

为了方便，做以下记号：

$$\Omega_r=\{u\in P:\|u\|<r,\ r>0\}\qquad \partial\Omega_r=\{u\in P:\|u\|=r,\ r>0\}$$

$$\tilde{f}_i(\omega)=\max_{1=1,2,\cdots,n}\{f_i(u):u\in[0,\infty)^n,\ 1\leqslant|u|\leqslant\omega\}\qquad \theta=\min_{t\in(0,1)}\{\theta_1(t),\theta_2(t),\cdots,\theta_n(t)\}$$

$$L=\min_{i=1,2,\cdots,n}\left\{\frac{1}{2}\theta\int_0^1\theta_i(s)G_i(1,s)g_i(s)\mathrm{d}s\right\}\qquad K=\sum_{i=1}^n\int_0^1 G_i(1,s)g_i(s)\mathrm{d}s$$

$$M_r=\max_{1=1,2,\cdots,n}\{f_i(u):u\in[0,\infty)^n,\ \theta r\leqslant|u|\leqslant r\}$$

$$m_r=\min_{1=1,2,\cdots,n}\{f_i(u):u\in[0,\infty)^n,\ \theta r\leqslant|u|\leqslant r\}$$

在本文中，我们给出下面的假设条件：

(A_1) $f_i(u(t)):[0,\infty)^n\longrightarrow[0,\infty)(i=1,2,\cdots,n)$ 连续；

(A_2) 对于任意 $t\in[0,1]$，$v_i(t)\geqslant 0$，$h_i(t)\geqslant 0$ 为连续函数，且 $\int_0^1 v_i(s)\mathrm{d}s>0(i=1,2,\cdots,n)$.

设 $X=C[0,1]$，其范数 $\|u\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$. 在 $E=X\times X\times\cdots\times X=X^n$ 中定义范数 $\|u\|=\sum\limits_{i=1}^n\|u_i\|$，则 $\{E,\|\cdot\|\}$ 是Banach空间. 定义 E 中的锥

$$P=\left\{u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in E:u_i(t)\geqslant 0,\ t\in[0,1],\ i=1,2,\cdots,n,\ \min_{t\in[0,1]}\sum_{i=1}^n u_i(t)\geqslant\theta\|u\|\right\}$$

定义算子 $T=(T_1,T_2,\cdots,T_n):P\longrightarrow E$，其中

$$T_iu(t)=\lambda\int_0^1 G_i(t,s)(v_i(s)f_i(u(s))+h_i(s))\mathrm{d}s\qquad t\in[0,1],\ i=1,2,\cdots,n$$

由引理3知，算子 T 的不动点即系统(1)的解，解的形式为

$$u(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))$$

其中

$$u_i(t)=\lambda\int_0^1 G_i(t,s)(v_i(s)f_i(u(s))+h_i(s))\mathrm{d}s\qquad t\in[0,1],\ i=1,2,\cdots,n$$

引理5 假设条件(A_1)和(A_2)成立，那么算子 $T:P\longrightarrow P$ 是全连续的.

引理6 假设条件(A_1)和(A_2)成立，若存在 $\eta>0$，$1\leqslant j\leqslant n$，$j\in\mathbb{N}$，使得

$$f_j(u(t))\geqslant\eta\sum_{i=1}^n u_i(t)\qquad t\in[0,1],\ u(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))\in\partial\Omega_r$$

那么 $\|Tu\|\geqslant\lambda\eta L\|u\|$，其中

$$L=\frac{1}{2}\theta\int_0^1\theta_j(s)G_j(1,s)v_j(s)\mathrm{d}s$$

证 对于 $u\in\partial\Omega_r$，有

$$\|Tu\|\geqslant\sup_{t\in[0,1]}|T_ju(t)|\geqslant\frac{1}{2}\lambda\int_0^1\theta_j(s)G_j(1,s)(v_j(s)f_j(u(s))+h_j(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\lambda\int_0^1\theta_j(s)G_j(1,s)v_j(s)\eta\sum_{i=1}^n u_i(s)\mathrm{d}s \geqslant \frac{1}{2}\theta\lambda\eta\int_0^1\theta_j(s)G_j(1,s)v_j(s)\mathrm{d}s\,\|u\| = \lambda\eta L\|u\|$$

其中

$$L=\frac{1}{2}\theta\int_0^1\theta_j(s)G_j(1,s)v_j(s)\mathrm{d}s$$

引理 7　假设条件(A_1)和(A_2)成立．令

$$r>\max\left\{\frac{1}{\theta},\ 2\lambda\sum_{i=1}^n\int_0^1 G_i(1,s)h_i(s)\mathrm{d}s\right\}$$

若存在 $\varepsilon>0$，使得 $\tilde{f}_i(r)\leqslant\varepsilon r(i=1,2,\cdots,n)$，那么

$$\|Tu\|\leqslant\lambda K\varepsilon\|u\|+\frac{1}{2}\|u\| \qquad u\in\partial\Omega_r$$

证　对于 $u\in\partial\Omega_r$，有

$$\begin{aligned}\|Tu\| = \sum_{i=1}^n\max_{t\in[0,1]}T_iu(t)\leqslant\\ \lambda\sum_{i=1}^n\int_0^1 G_i(1,s)g_i(s)f_i(u(s))\mathrm{d}s+\lambda\sum_{i=1}^n\int_0^1 G_i(1,s)h_i(s)\mathrm{d}s\leqslant\\ \lambda\sum_{i=1}^n\int_0^1 G_i(1,s)g_i(s)\varepsilon r\mathrm{d}s+\frac{r}{2}=\lambda K\varepsilon\|u\|+\frac{1}{2}\|u\|\end{aligned}$$

引理 6 和引理 7 是基于 $f(u)$ 和 u 的不等式．与此类似，可得如下结论：

引理 8　假设条件(A_1)和(A_2)成立，那么对于 $u\in\partial\Omega_r$，有

$$\|Tu\|\geqslant\lambda\sum_{i=1}^n\frac{m_r}{2}\int_0^1\theta_i(s)G_i(1,s)g_i(s)\mathrm{d}s$$

引理 9　假设条件(A_1)和(A_2)成立，那么对于 $u\in\partial\Omega_r$，有

$$\|Tu\|\leqslant\lambda\left[\sum_{i=1}^n M_r\int_0^1 G_i(1,s)g_i(s)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^n\int_0^1 G_i(1,s)h_i(s)\mathrm{d}s\right]$$

定理 1　假设条件(A_1)和(A_2)成立，且$\lim\limits_{u\to 0}f_i(u)=\infty\ (i=1,2,\cdots,n)$，则：

(i) 若$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f_i(u)}{u}=0(i=1,2,\cdots,n)$，那么对于任意 $\lambda>0$，系统(1)有一个正解；

(ii) 若$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f_i(u)}{u}=\infty(i=1,2,\cdots,n)$，那么对于充分小的 $\lambda>0$，系统(1)有两个正解；

(iii) 若存在 $\lambda_0>0$，使得 $0<\lambda<\lambda_0$，那么系统(1)有一个正解．

证　(i)　由$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f_i(u)}{u}=0$，可知$\lim\limits_{\omega\to\infty}\dfrac{\tilde{f}_i(\omega)}{\omega}=0(i=1,2,\cdots,n)$．取

$$r_2>\max\left\{\frac{1}{\theta},\ 2\lambda\sum_{i=1}^n\int_0^1 G_i(1,s)h_i(s)\mathrm{d}s\right\}$$

使得

$$\tilde{f}_i(r_2)\leqslant\varepsilon r_2 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

其中 $\varepsilon>0$，且满足 $\lambda K\varepsilon<\dfrac{1}{2}$．根据引理 7，可得

$$\|Tu\|\leqslant\lambda K\varepsilon\|u\|+\frac{1}{2}\|u\|<\|u\| \qquad u\in\partial\Omega_r$$

由$\lim\limits_{u\to 0}f_i(u)=\infty$ 知，存在 $r_1<r_2$，使得

$$f_i(u)\geqslant\eta|u| \qquad i=1,2,\cdots,n,\ u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in E,\ |u|\leqslant r_1$$

其中 $\eta > 0$，且满足 $\lambda\eta L > 1$. 于是有

$$f_i(u(t)) \geqslant \eta \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \qquad t \in [0,1],\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \partial\Omega_{r_1}$$

根据引理6，可得

$$\| Tu \| \geqslant \lambda\eta L \| u \| > \| u \| \qquad u \in \partial\Omega_{r_1}$$

由引理4知，存在 $u \in \overline{\Omega}_{r_2} \backslash \Omega_{r_1}$ 为系统(1)的一个解.

(ii) 取 $0 < r_2 < r_3$，则存在 $\lambda_0 > 0$ 使得:

$$\lambda_0 < \frac{r_2}{\sum_{i=1}^{n} M_{r_2} \int_0^1 G_i(1,s) g_i(s) \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 G_i(1,s) h_i(s) \mathrm{d}s}$$

$$\lambda_0 < \frac{r_3}{\sum_{i=1}^{n} M_{r_3} \int_0^1 G_i(1,s) g_i(s) \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 G_i(1,s) h_i(s) \mathrm{d}s}$$

根据引理9可得，对于 $0 < \lambda < \lambda_0$，有 $\| Tu \| < \| u \| (u \in \partial\Omega_{r_p},\ p = 2,3)$. 另一方面，由 $\lim\limits_{u\to 0} f_i(u) = \infty$ 和 $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{f_i(u)}{u} = \infty$ 知，存在 $0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4' < r_4$，使得 $f_i(u) \geqslant \eta \mid u \mid (i = 1,2,\cdots,n)$，其中 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in E$，$0 < \mid u \mid \leqslant r_1$ 或 $\mid u \mid \geqslant r_4'$，且 $\eta > 0$ 满足 $\lambda\eta L > 1$. 于是有

$$f_i(u(t)) \geqslant \eta \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \qquad t \in [0,1],\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \partial\Omega_{r_1}$$

令 $r_4 = \max\left\{2r_3, \frac{1}{\theta} r_4'\right\}$，若 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \partial\Omega_{r_4}$，那么:

$$\min_{t\in[0,1]} \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \geqslant \theta \| u \| = \theta r_4 \geqslant r_4'$$

$$f_i(u(t)) \geqslant \eta \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \qquad t \in [0,1]$$

根据引理6，可得:

$$\| Tu \| \geqslant \lambda\eta L \| u \| > \| u \| \qquad u \in \partial\Omega_{r_1}$$

$$\| Tu \| \geqslant \lambda\eta L \| u \| > \| u \| \qquad u \in \partial\Omega_{r_4}$$

由引理4知，存在 $u_1 \in \overline{\Omega}_{r_2} \backslash \Omega_{r_1}$ 和 $u_2 \in \overline{\Omega}_{r_4} \backslash \Omega_{r_3}$ 为系统(1)的解，且 $r_1 < \| u_1 \| < r_2 < r_3 < \| u_2 \| < r_4$.

(iii) 取 $r_2 > 0$，根据引理9可得，对于 $0 < \lambda < \lambda_0$，有

$$\| Tu \| < \| u \| \qquad u \in \partial\Omega_{r_2}$$

由 $\lim\limits_{u\to 0} f_i(u) = \infty$ 知，存在 $0 < r_1 < r_2$ 使得

$$f_i(u) \geqslant \eta \mid u \mid \qquad u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in E,\ \mid u \mid \leqslant r_1,\ i = 1,2,\cdots,n$$

其中 $\eta > 0$，且满足 $\lambda\eta L > 1$. 于是有

$$f_i(u(t)) \geqslant \eta \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \qquad t \in [0,1],\ u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \partial\Omega_{r_1}$$

根据引理6可得

$$\| Tu \| \geqslant \lambda\eta L \| u \| > \| u \| \qquad u \in \partial\Omega_{r_1}$$

由引理4，存在 $u \in \overline{\Omega}_{r_2} \backslash \Omega_{r_1}$ 为系统(1)的一个解.

参考文献:

[1] 苏新卫. 分数阶微分方程耦合系统边值问题解的存在性[J]. 工程数学学报，2009，26(1)：133-137.

[2] XU X J，JIANG D Q，YUAN C J. Multiple Positive Solutions for a Boundary Value Problem of a Nonlinear Fractional

Differential Equation [J]. Nonlinear Analysis，2009，71(2)：4676-4688.

[3] WANG H Y. Positive Periodic Solutions of Singular Systems with a Parameter [J]. Journal of Differential Equations，2010，249(12)：2986-3002.

[4] ZHANG S Q. Positive Solutions for Boundary-Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2006，36：1-12.

[5] LIANG S H，ZHANG J H. Positive Solutions for Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equation [J]. Nonlinear Analysis，2009，71(11)：5545-5550.

[6] MOUSTAFA E. Positive Solutions for Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equation [J]. Abstract and Applied Analysis，2007，2007：1-8.

[7] 郭大钧，孙经先，刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法 [M]. 济南：山东科学技术出版社，2006.

[8] 汪皎月，项首先，于淑惠. 分数阶中立型微分方程的振动准则 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(11)：106-111.

[9] DUTTA S，BALIARSINGH P. A Note on Paranormed Difference Sequence Spaces of Fractional Order and Their Matrix Transformations [J]. Journal of Egyptian Math Society，2014，22(2)：249-253.

[10] CHEN L，BASU B，MCCABE D. Fractional Order Models for System Identification of Thermal Dynamics of Buildings [J]. Energy and Buildings，2016，133：381-388.

[11] 郭彩霞，郭建敏，田海燕，等. 一类分数阶奇异 q -差分方程边值问题解的存在性和唯一性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(12)：6-10.

Existence of Positive Solutions for Singular Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations

KANG Shu-gui[1]，　YUE Ya-qing[2]，　GUO Jian-min[1]

1. School of Mathematics and Statistics，Datong University，Datong Shanxi 037009，China；

2. School of Mathematics and Computer Science，Shanxi Normal University，Linfen Shanxi 041000，China

Abstract：The existence of positive solutions for a class of fractional differential equations with singular terms is discussed in this paper. By discussing the properties of Green's functions，we use Krasnoselskii fixed point theorem to obtain the sufficient conditions for the problem to have at least one or two positive solutions.

Key words：fractional differential equation；singular system；boundary value problem；Krasnoselskii fixed point theorem；positive solution

责任编辑　廖　坤