第 41 卷第 5 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2019 年 5 月
Vol. 41　No. 5　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　May.　2019

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.05.007

小测度缺陷下 Maxwell 方程解的唯一性[①]

小巴桑次仁，　多布杰

西藏大学 理学院数学系，拉萨 850000

摘要：在基于已知背景区域内 Maxwell 方程解的唯一性基础上，研究了区域内存在缺陷时解的唯一性．通过讨论不同边值对应不同特征值的特点获得了当缺陷在测度足够小时解的唯一性依旧成立的结论，并且将该结论延伸至相对一般结构的小测度缺陷的情况．

关　键　词：缺陷；Maxwell 方程；唯一性

中图分类号：O175.23　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2019)05－0044－04

本文将缺陷定义为某些区域内 Maxwell 方程系数不连续但 L^{∞} 模有界的状态，比如液晶缺陷为液晶细胞中的一些较小测度区域内液晶 Q 张量(或电容率张量 ε)不连续但 L^{∞} 模有界．在研究 Maxwell 方程解的唯一性方面，文献[1]中获得了系数的正则性降到逐段 $W^{1,\infty}$ 时的唯一性，并且文中也涉及到存在缺陷的情况．由于 Maxwell 方程的系数(电容率张量)ε 与液晶理论中的张量 Q 有着直接的联系[2]，因此通过光信号研究液晶结构时可以用张量 ε 替代张量 Q 进行相关的结构分析．缺陷的研究是液晶经典理论以及液晶应用研究领域的重点与难点，解释缺陷自身的结构是液晶经典理论方面具有挑战性的问题[3-5]．通过电磁波反问题研究液晶结构是当前的研究热点，其正问题可被描述成电磁波散射问题．解决 Maxwell 方程组解的唯一性问题成为解决其相关问题的难点．本文采用全新的方法对文献[1]相关缺陷的唯一性结论给出了全新的证明，并且将测度较小的点缺陷和线缺陷相应的唯一性结论从特殊情况推广至一般的复杂结构缺陷情况．

1　问题的提出

假定 $\omega_{\eta}^{i} \subset \Omega$ 为具有较小 Lebesgue 测度的可测子集．每一个小区域 ω_{η}^{i} 包含一个缺陷，每个点缺陷和线缺陷(图中区域内的点和曲线段)分别由一个具有规则形状的较小区域所覆盖，且每个小区域 ω_{η}^{i} 可以与边界 $\partial\Omega$ 有交集(如图 1 所示)．令 $\omega_{\eta}=\bigcup_{i=1}^{n} \omega_{\eta}^{i}$，$|\omega_{\eta}|$ 表示 ω_{η} 的测度．

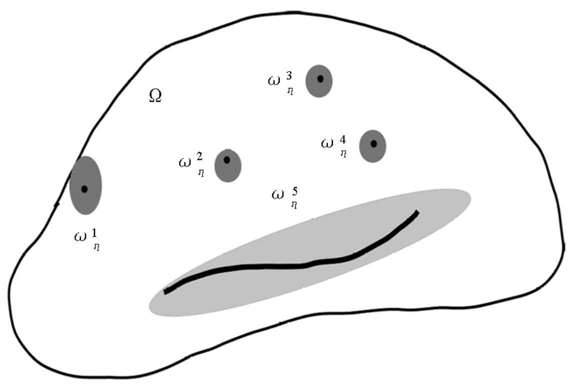


图 1　点缺陷、线缺陷以及规则的小测度区域

Maxwell 方程的正散射问题解的唯一性可以描述成，在给定 Silver-Muller 散射条件的前提下证明方程系数满足相应正则性条件时解的唯一性，其中：有界区域 Ω 的外部由于方程系数转化成为常数，其唯一性可以通过 Rellich 引理进行证明(参见文献[6-8]中对方程的介绍及对引理的详细证明)；区域内部

① 收稿日期：2018－09－16
基金项目：霍英东青年教师基金基础性研究课题(151102)．
作者简介：小巴桑次仁(1981－)，男，博士，副教授，主要从事电磁波反问题理论的研究．
通信作者：多布杰，副教授．

当方程系数为逐段$W^{1,\infty}$时，在文献[1]中给予了唯一性证明. 因此本文主要研究方程系数$\varepsilon^{-1}(x)$在无缺陷区域$\Omega\backslash\omega_\eta$内逐段$W^{1,\infty}$且$\varepsilon^{-1}(x)$在$\omega_\eta$内为$L^\infty$时Maxwell方程解的唯一性，即在背景问题的唯一性已初步解决的条件下讨论背景区域上增加小测度缺陷时的唯一性. 更多关于小测度缺陷方面的研究，请查阅文献[9-13]. 为了讨论的方便，令$R>0$为足够大的常数，B_R为半径R的一个开球且确保$\Omega\subset B_{\frac{R}{2}}$；定义如下两个索伯列夫空间$X_T(B_R)$和$X_N(B_R)$，

$$X_T(B_R)=\{\boldsymbol{u}\in H(\mathrm{curl};B_R)\cap H(\mathrm{div};B_R)\ \text{and}\ \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{n}=0\ \text{on}\ \partial B_R\}$$
$$X_N(B_R)=\{\boldsymbol{u}\in H(\mathrm{curl};B_R)\cap H(\mathrm{div};B_R)\ \text{and}\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0\ \text{on}\ \partial B_R\}$$

2 主要结论

定理1 假设开集$B_R\backslash\overline{\omega}_\eta$存在唯一一个连通分量，且在$B_R\backslash\overline{\omega}_\eta$内$\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{x})$为逐段$W^{1,\infty}$的实对称正定矩阵. 若$k$为给定的实常数，$B_R$为$\boldsymbol{u}\in X_T(B_R)\cup X_N(B_R)$的紧支撑且$\boldsymbol{u}$为如下方程的弱解

$$\begin{cases}\nabla\wedge(\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{x})\nabla\wedge\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))=k^2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\\ \mathrm{div}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))=0\end{cases} B_R \tag{1}$$

则当$|\omega_\eta|$足够小时，$\boldsymbol{u}$在B_R内恒等于零.

证 由于$B_R\backslash\overline{\omega}_\eta$为开集且只有一个连通分量，在此区域内$\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{x})$为逐段$W^{1,\infty}$或光滑的实对称正定矩阵，因此由文献[1]中的结论得知在区域$B_R\backslash\overline{\omega}_\eta$内$\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{0}$.

当$\boldsymbol{u}$分别属于$X_T(B_R)$和$X_N(B_R)$时，$(k^2,\boldsymbol{u})$为如下两种问题的特征解：

1) 当$\boldsymbol{u}_\eta\in X_T(B_R)$时对应特征值和特征向量记为$(\lambda_\eta^D,\boldsymbol{u}_\eta)$，满足如下方程

$$\forall\boldsymbol{w}\in X_T(B_R),\int_{B_R}\varepsilon_\eta^{-1}\nabla\wedge\boldsymbol{u}_\eta\cdot\nabla\wedge\boldsymbol{w}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\lambda_\eta^D\int_{B_R}\boldsymbol{u}_\eta\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2}$$

2) 当$\boldsymbol{v}_\eta\in X_N(B_R)$时对应特征值和特征向量记为$(\lambda_\eta^N,\boldsymbol{v}_\eta)$，满足如下方程

$$\forall\boldsymbol{w}\in X_N(B_R),\int_{B_R}\varepsilon_\eta^{-1}\nabla\wedge\boldsymbol{v}_\eta\cdot\nabla\wedge\boldsymbol{w}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\lambda_\eta^N\int_{B_R}\boldsymbol{v}_\eta\cdot\boldsymbol{w}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{3}$$

其中

$$\varepsilon_\eta^{-1}=\begin{cases}\varepsilon^{-1} & \boldsymbol{x}\in\omega_\eta\\ \mathrm{Id} & \text{otherwise}\end{cases}$$

当$|\omega_\eta|\longrightarrow 0$时，方程(2)趋向如下Dirichlet特征值问题

$$\Delta\boldsymbol{u}_0=\lambda^D\boldsymbol{u}_0\qquad \boldsymbol{u}_0\in H_0^1(B_R) \tag{4}$$

且方程(3)趋向如下Neumann特征值问题

$$\Delta\boldsymbol{v}_0=\lambda^N\boldsymbol{v}_0\qquad \boldsymbol{v}_0\in H_0^1(B_R) \tag{5}$$

在文献[9]中已给出，方程(2)的离散谱σ_η^D收敛于方程(4)的离散谱σ_0^D；类似的方程(3)的离散谱σ_η^N收敛于方程(5)的离散谱σ_0^N，而方程(4)和方程(5)不存在共同的特征值，由此我们将会通过下述推导获得定理1所述的结论. 定义集合d_{DN}如下：

$$d_{DN}=\min\{|\lambda^D-\lambda^N|\}$$

其中：$\lambda^D\in\sigma_0^D$，$\lambda^D<k^2+1$；$\lambda^N\in\sigma_0^N$，$\lambda^N<k^2+1$.

则$d_{DN}>0$且存在$\delta>0$使得在$|\omega_\eta|<\delta$内，

$$d_\eta^D=\max_{\substack{x\in\sigma_\eta^D\\ x<k^2+1}}\min_{\substack{y\in\sigma_0^D\\ y<k^2+1}}|x-y|<\frac{1}{3}d_{DN}$$

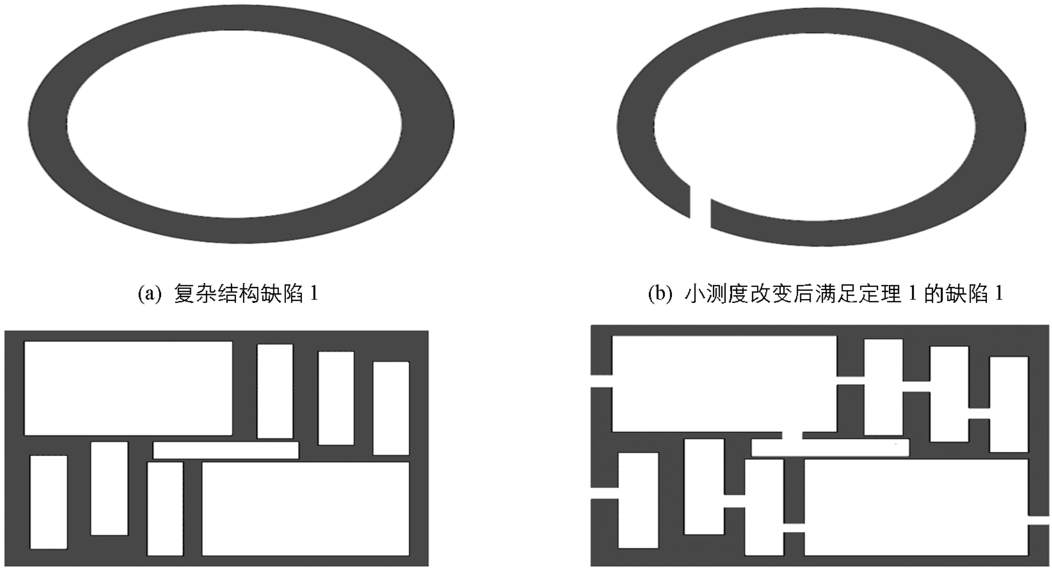
$$d_\eta^N=\max_{\substack{x\in\sigma_\eta^N\\ x<k^2+1}}\min_{\substack{y\in\sigma_0^N\\ y<k^2+1}}|x-y|<\frac{1}{3}d_{DN}$$

若$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_\eta=\boldsymbol{v}_\eta$不恒等于零时，因$k^2\in\sigma^D\cap\sigma_\eta^N$，满足

$$0<d_{DN}\leqslant d_\eta^D+d_\eta^N<\frac{2}{3}d_{DN}$$

矛盾产生，因此假设错误，原命题成立．

定理 1 中所述的缺陷 Ω_D 可以包含有限个满足定理 1 条件的缺陷而非局限于一个缺陷情况，然而定理 1 的结论只适用于缺陷之外的区域必须连通的情况，即 $B_R\backslash\overline{\omega}_\eta$ 存在唯一连通分量．因此下面将定理 1 结论延伸至 $B_R\backslash\overline{\omega}_\eta$ 为不连通的情况，比如存在封闭线缺陷的情况．其中主要的思想是对目标缺陷 ω_η 进行小测度的任意改变，并且确保改变后的缺陷 $\widetilde{\omega}_\eta$ 满足定理 1 的条件．在这种情况下所讨论的缺陷可以为带状，环状或者球状等具有复杂结构的缺陷(图 2)．



(a) 复杂结构缺陷 1　　(b) 小测度改变后满足定理 1 的缺陷 1

(c) 复杂结构缺陷 2　　(d) 小测度改变后满足定理 1 的缺陷 2

图 2　小测度改变前后的复杂结构缺陷

推论 1　对缺陷的区域 ω_η 进行任意改变，且改变后的缺陷 $\widetilde{\omega}_\eta$ 满足定理 1 的条件．当这些改变使得 ω_η 的测度发生微小变化时，定理 1 的结论仍成立，即 $\boldsymbol{u}$ 在 B_R 区域内恒等于零．

证　对于给定的 ω_η 进行小测度的任意改变，并且确保改变后的缺陷 $\widetilde{\omega}_\eta$ 满足定理 1 的条件．此时方程(1) 在 Ω 上对应 Neumann 边值问题的离散谱 $\widetilde{\sigma}_\eta^N$ 在 Ω 上收敛于 σ_η^N；同理在新区域 $\widetilde{\omega}_\eta$ 上，方程(1) 在 Ω 上对应 Dirichlet 边值问题的离散谱 $\widetilde{\sigma}_\eta^D$ 在 Ω 上收敛于 σ_η^D．另外对于 η 足够小时，在两个谱之间距离至少 $\frac{1}{3}d_{DN}$ 时，$\widetilde{\sigma}_\eta^N$ 和 $\widetilde{\sigma}_\eta^D$ 不存在小于 $1+k^2$ 的共同特征值，因此对目标缺陷进行适当的微小扰动可获得推论所述结论．

参考文献：

[1] BALL J M, CAPDEBOSCQ Y, TSERING-XIAO B. On Uniqueness for Time Harmonic Anisotropic Maxwell's Equations with Piecewise Regular Coefficients [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2012, 22(11): 364-375.

[2] DEGENNES G P, PROST J. The Physics of Liquid Crystals [M] //International Series of Monographs on Physics. Oxford: Oxford Science Publications, 1995.

[3] KLEMAN M. Defects in Liquid Crystals [J]. Reports on Progress in Physics, 1989, 52(5): 555-654.

[4] KLEMAN M, LAVRENTOVICH O D. Topological Point Defects in Nematic Liquid Crystals [J]. Philosophical Magazine, 2006, 86(25-26): 4117-4137.

[5] MAJUMDAR A. Equilibrium Order Parameters of Nematic Liquid Crystals in the Landau-De Gennes Theory [J]. European Journal of Applied Mathematics, 2010, 21(2): 181-203.

[6] 小巴桑次仁. RELLICH 引理的新证明 [J]. 数学物理学报(A 辑), 2014, 34(6): 1435-1439.

[7] 小巴桑次仁. 各项同性麦克斯韦方程在系数为弱正则时解的唯一性证明[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(10): 1-4.

[8] 庞礼军. 麦克斯韦方程组与其它普遍规律的等价性[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2000(2): 44-46.

[9] AMMARI H, KANG H. High-Order Terms in the Asymptotic Expansions of the Steady-State Voltage Potentials in the Presence of Conductivity Inhomogeneities of Small Diameter [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2002, 34(5): 1152-1166.

[10] AMMARI H, VOGELIUS M S, VOLKOV D. Asymptotic Formulas for Perturbations in the Electromagnetic Fields Due to the Presence of Inhomogeneities of Small Diameter II, the Full Maxwell Equations [J]. Journal De Mathématiques Pures Et Appliquées, 2001, 80(8): 769-814.

[11] GRIESMAIER R. A General Perturbation Formula for Electromagnetic Fields in Presence of Low Volume Scatterers [J]. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2011, 45(6): 1193-1218.

[12] CAPDEBOSCQ Y, VOGELIUS M S. A General Representation Formula for Boundary Voltage Perturbations Caused by Internal Conductivity Inhomogeneities of Low Volume Fraction [J]. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2003, 37(1): 159-173.

[13] AMMARI H, KHELIFI A. Electromagnetic Scattering by Small Dielectric Inhomogeneities [J]. Journal De Mathématiques Pures Et Appliquées, 2003, 82(7): 749-842.

Uniqueness of Solutions of Maxwell's Equations in the Presence of Defects with Small Measurement

Basang Tsering-Xiao, Duo Bujie

Science School of Tibet University, Lhasa 850000, China

Abstract: Under the condition that the uniqueness of the solutions of Maxwell's equations in the background region is known, this paper studies the uniqueness of the solutions in the region in the presence of defects. By studying the eigenvalue problems for different boundary conditions, we obtain the uniqueness in the presence of defects with small measurement, and then we extent the result to general small measurement defects.

Key words: defect; Maxwell's equation; uniqueness

责任编辑 张 枸