

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.05.008

求解带间断系数非线性椭圆问题的两重网格法^①

李 明^{1,2}, 郑洲顺¹, 赵金娥²

1. 中南大学 数学与统计学院, 长沙 410083; 2. 红河学院 数学学院, 云南 蒙自 661199

摘要: 利用有限差分法离散带间断系数的非线性椭圆问题, 针对离散后所得到的非线性方程组, 从减少计算量的角度出发, 只使用一个辅助的粗层网格空间, 并在最细层网格上求解线性校正方程组, 构造了两重网格(NETG)法. 数值结果表明, 新算法在计算量和计算时间方面优于以往的算法.

关键词: 非线性椭圆问题; 两重网格法; 有限差分法; 线性校正方程组

中图分类号: O241.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2019)05-0048-05

多重网格法(Multigrid method, MG)是求解偏微分方程离散化方程组的高性能计算方法^[1-10].

目前, 关于求解带间断系数的非线性椭圆问题的多重网格法鲜见报道. 为发展带间断系数的非线性椭圆问题的快速数值算法, 本文通过减少辅助的粗网格空间、降低细层网格上的计算量, 提出了基于差分格式的两重网格(NETG)法. 数值试验表明, 在相同计算精度的前提下, 本文算法在计算量和计算时间方面优于以往的瀑布型多重网格(CMG)法. 本文算法可与其它离散格式结合, 推广至其它非线性偏微分方程.

1 模型问题

考虑与非线性 Helmholtz 方程、天体物理学中的 Lane-Emden 方程有着紧密联系的一类非线性椭圆问题

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla u) = f(u) \text{ in } \Omega \tag{1}$$

其中: Ω 是一个二维多边形区域, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)^T$ 为梯度算子, $f(u)$ 是与 x, y, u 有关的函数, $\alpha > 0$ 为已知的间断常数, $u = u(x, y) \in C_0^2(\Omega)$ 为待求函数.

为便于讨论, 取 Ω 为矩形区域 $[0, L_x] \times [0, L_y]$, 将 Ω 沿 x, y 方向均分成 m, n 等份. 即 $h_x = \frac{L_x}{m}$, $h_y = \frac{L_y}{n}$. 网格点 (x_i, y_j) 对应于 $x_i = i \times h_x, y_j = j \times h_y, i = 0, 1, 2, \dots, m, j = 0, 1, 2, \dots, n$.

① 收稿日期: 2017-06-25

基金项目: 国家重点研发计划项目(2017YFB0305601; 2017YFB0701700); 云南省科技厅项目(2017FH001-012, 2017FH001-015);

红河学院中青年学术带头人后备人才项目(2015HB0304); 红河学院科研项目(XJ15Y19).

作者简介: 李明(1983-), 男, 副教授, 主要从事偏微分方程数值解法研究.

在非边界点 (x_i, y_j) 处采用二阶中心差分格式离散模型问题(1), 可得到对应于步长 $h = \max\{h_x, h_y\}$ 的非线性方程组

$$F_h(\mathbf{u}) = 0$$

其中 $\mathbf{u}$ 为待求的解向量, 其维数依赖于步长 h .

类似地, 选取一组步长 $h_s = 2^{s-1} h_1$, 可得一系列对应的网格层 Ω_s 和非线性方程组

$$F_s(\mathbf{u}) = 0 \quad s = 1, 2, \dots, M \quad (2)$$

文中用下标 s 从小到大表示网格从细到粗.

2 两重网格法

在使用牛顿法、拟牛顿法等迭代法求解大规模非线性方程组时, 选择一个合适的初始值, 有助于降低求解过程中的迭代次数. 为了给最细层网格上的非线性方程组提供初始值, 文献[6-8] 讨论了求解非线性椭圆问题的 CMG 法. 这类方法的基本思路是, 首先使用迭代法求解未知点较少的最粗层上的非线性方程组, 接着使用插值算子为相邻细层网格上的非线性方程组提供迭代初始值, 如此递进, 直至最细层网格.

在 CMG 法中各粗层网格的主要作用是为了给最细层网格提供初始值. 为了减少这些辅助网格层上的计算量, 我们使用插值算子, 将最粗层网格的解插值到最细层网格, 为该层上的非线性方程组的求解提供迭代初始值.

另一方面, 在相同未知点规模的情况下, 非线性方程组的求解代价高于线性方程. 为降低求解非线性方程组的计算量, 借鉴文献[9]的思路, 在最细层网格上只需求解线性校正方程组, 以降低该层上的求解计算量.

综上所述, 通过减少中间辅助网格层以及在细层上求解线性方程代替直接求解非线性方程都可降低计算量. 基于这种思路, 我们设计了求解带间断系数的非线性椭圆方程离散化方程组的两重网格(NETG)法, 其核心思想是选择合适步长, 离散形成粗细两层网格, 使用插值算子将粗网格上的非线性方程组的高精度近似解插值到细层上, 为该层上的线性校正方程组的求解提供迭代初始值. 该算法过程如下

算法 1 两重网格法(NETG)

步骤 1 给定误差限 ϵ_1, ϵ_2 , 以 $\mathbf{u}_M^0$ 为初始值, 迭代 m_M 次求解 $F_M(\mathbf{u}) = 0$, 得 $\mathbf{u}_M^*$.

步骤 2 将 $\mathbf{u}_M^*$ 插值到细网格 Ω_1 上得 $\mathbf{u}_1^0$, 置 $A_1^0 := F_1'(\mathbf{u}_1^0)$, 置 $k := 0$.

步骤 3 计算 $\mathbf{b}_1^k := F_1(\mathbf{u}_1^k)$, 求解线性校正方程组 $A_1^0 \Diamond \mathbf{u}_1^k = -\mathbf{b}_1^k$ 得 $\Diamond \mathbf{u}_1^k$, 并置

$$\mathbf{u}_1^{k+1} := \mathbf{u}_1^k + \Diamond \mathbf{u}_1^k$$

步骤 4 置 $k := k + 1$, $\mathbf{u}_1^k := \mathbf{u}_1^{k+1}$. 若 $\|F_1(\mathbf{u}_1^k)\| \leq \epsilon_1$ 或 $\|\Diamond \mathbf{u}_1^k\| \leq \epsilon_2$, 置 $m_1 := k$, $\mathbf{u}_1^* := \mathbf{u}_1^k$, 否则转步骤 3.

注 $F_1'(\mathbf{u}_1^0)$ 表示非线性函数 $F_1(\mathbf{u})$ 在 $\mathbf{u}_1^0$ 处的 Jacobian 矩阵.

可以看出, NETG 法只使用了两个网格层(即粗层 Ω_M 和细层 Ω_1), 无需使用中间网格层, 并且在最细网格层上只需求解线性校正方程组, 因此该算法结构简单, 计算量更少.

3 数值实验

为验证算法的有效性, 我们在区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上考虑如下数值算例.

例 1 右端非线性函数 $f(u) = g(x, y) - u^3$, 间断系数为

$$\alpha = \begin{cases} c & 0 \leq x \leq 1; 0.5 \leq y \leq 1 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y < 0.5 \end{cases}$$

其中

$$g(x,y)=\alpha 20\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y)+1000\sin^3(\pi x)\sin^3(\pi y)$$

真解为

$$u=10\sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

例 2 右端非线性函数 $f(u)=g(x,y)-u\exp(u)$, 间断系数 α 同上. 其中,

$$\begin{aligned} g(x,y) = & 5\alpha\exp(5-5y)\sin(\pi x)(5y-2)(x-1) + \\ & \pi\alpha y(\exp(5-5y)-1)(2\cos(\pi x)+\pi\sin(\pi x)-\pi x\sin(\pi x)) - \\ & \frac{(y\sin(\pi x)(x-1)(\exp(5-5y)-1))}{\exp(y\sin(\pi x)(x-1)(\exp(5-5y)-1))} \end{aligned}$$

真解为

$$u=y\sin(\pi x)(1-x)(\exp(5(1-y))-1)$$

选取 CMG 法作为对比算法, 其插值算子为线性插值. 在 NETG 法中, 使用三次多项式插值作为插值算子. 取网格层 $M=4$, 取精度控制条件为 $\epsilon_1=\epsilon_2=10^{-8}$, 使用牛顿法求解非线性方程, 最粗层上迭代初始值取为零向量. 记 Ω_M, Ω_1 分别表示最粗、最细层上的网格规模; 令 $E=\|u-u_1^*\|_\infty$ 表示问题真解与算法求出的数值解的最大范数误差; 对于 CMG 法, r 从左向右分别表示最粗层 Ω_M 到最细层 Ω_1 上的迭代次数, 对于 NETG 法, r 从左向右分别表示 Ω_M 和 Ω_1 上的迭代次数; t 表示计算时间.

为便于比较 CMG 法和 NETG 法在求解不同规模离散化方程组时的计算效率, 使用这两种算法求解最细网格层规模分别为 $128\times 128, 256\times 256, 512\times 512, 1\,024\times 1\,024$ 的离散化方程组, 将例 1、例 2 对应的最大范数误差和所需计算时间绘制于图 1(a)、(b) 中, 图中点型从左到右分别对应最细网格层规模: $128\times 128, 256\times 256, 512\times 512, 1\,024\times 1\,024$.

从表 1 及表 2 可以看出, 随着间断系数中的 c 取值从 10^9 (或 10^8) 变化到 10^{-8} , CMG 法、NETG 法除在最粗层上的迭代次数略受影响, 在其它层网格上的迭代步数为 3 次左右. 由于最粗层上未知点较少, 对整体计算量的影响不大. 因此 CMG 法、NETG 法的计算效率几乎不受间断系数取值的影响. 此外, 随着求解规模的增加, 各层上的迭代次数基本保持不变. 这表明, NETG 法和 CMG 法一样, 具有很好的稳健性.

表 1 CMG 法和 NETG 法求解算例 1 的数值结果

c	Ω_M	Ω_1	CMG			NETG		
			e	r	t/s	e	r	t/s
10^{-8}	80 * 80	640 * 640	1.72e-06	53, 3, 3, 2	40.8	1.72e-06	53, 1	14.7
	100 * 100	800 * 800	1.10e-06	53, 3, 2, 2	68.6	1.10e-06	53, 1	26.7
10^{-4}	80 * 80	640 * 640	1.72e-06	31, 3, 3, 2	31.1	1.72e-06	31, 1	12.2
	100 * 100	800 * 800	1.10e-06	30, 3, 2, 2	61.0	1.10e-06	30, 1	21.3
10^3	80 * 80	640 * 640	9.23e-06	8, 3, 3, 2	26.2	9.23e-06	8, 1	11.2
	100 * 100	800 * 800	5.90e-06	8, 2, 2, 2	56.4	5.90e-06	8, 1	20.4
10^9	80 * 80	640 * 640	9.27e-06	9, 3, 3, 3	36.7	9.27e-06	9, 3	12.5
	100 * 100	800 * 800	5.93e-06	9, 3, 3, 3	66.9	5.93e-06	9, 3	21.5

表 2 CMG 法和 NETG 法求解算例 2 的数值结果

c	Ω_M	Ω_1	CMG			NETG		
			e	r	t/s	e	r	t/s
10^{-8}	80 * 80	640 * 640	1.25e-05	88, 3, 3, 3	57.8	1.25e-05	88, 2	22.4
	100 * 100	800 * 800	8.00e-06	88, 3, 3, 3	104.6	7.96e-06	88, 1	28.7
10^{-4}	80 * 80	640 * 640	1.25e-05	80, 3, 3, 3	42.3	1.25e-05	80, 2	19.8
	100 * 100	800 * 800	8.00e-06	79, 3, 3, 3	88.9	7.97e-06	79, 1	22.4
10^4	80 * 80	640 * 640	1.26e-05	39, 3, 3, 3	41.2	1.26e-05	39, 2	20.5
	100 * 100	800 * 800	8.12e-06	39, 3, 3, 3	60.2	8.08e-06	39, 1	21.4
10^8	80 * 80	640 * 640	1.26e-05	39, 3, 3, 3	47.3	1.26e-05	39, 3	20.1
	100 * 100	800 * 800	8.12e-06	39, 3, 3, 3	67.8	8.08e-06	39, 3	21.4

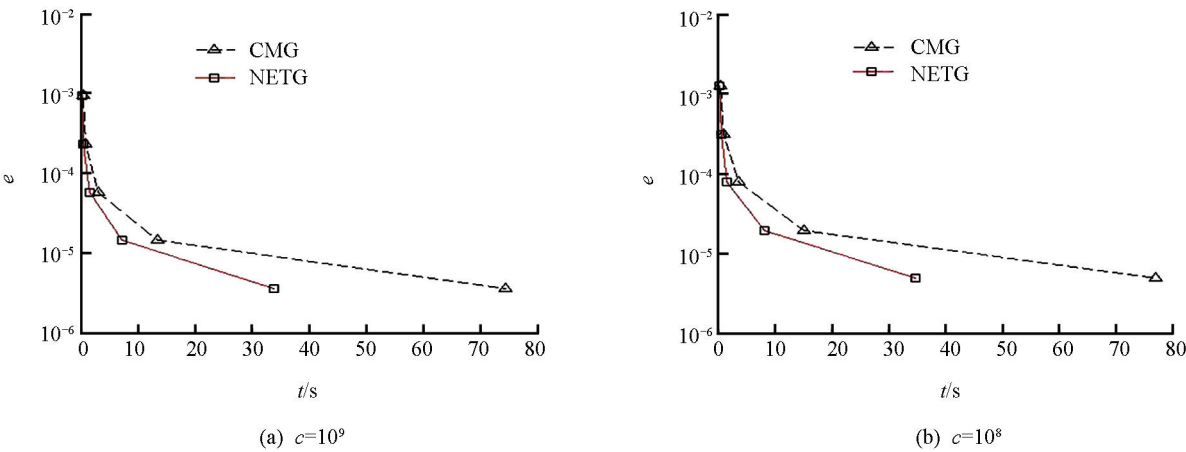


图 1 误差时间对比图

此外,从表 1、表 2、图 1 可以看出,在相同计算条件下,NETG 法具有和 CMG 法相同的计算精度,在最粗、最细网格层的迭代次数也与 CMG 法相同,但 NETG 的计算时间仅为 CMG 的一半左右.这是因为 NETG 没有使用中间网格层,且在最细层网格上求解的是线性校正方程组,而不是非线性方程组.本文提出的 NETG 能更快求出带间断系数的非线性椭圆问题的数值解.

参考文献:

[1] BRANDT A. Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems [J]. Mathematics of Computation, 1977, 31(138): 333-390.

[2] LI M, LI C L, CUI X Z, et al. Cascadic Multigrid Methods Combined with Sixth Order Compact Scheme for Poisson Equation [J]. Numerical Algorithms, 2016, 71(4): 715-727.

[3] 李明, 赵金娥. 二维椭圆问题的经济外推瀑布多重网格法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(7): 68-72.

[4] LI M, LI C L. New Cascadic Multigrid Methods for Two-Dimensional Poisson Problem Based on the Fourth-Order Compact Difference Scheme [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2018, 41(3): 920-928.

[5] 潘克家, 汤井田, 胡宏伶, 等. 直流电阻率法 2.5 维正演的外推瀑布式多重网格法 [J]. 地球物理学报, 2012, 55(8): 2769-2778.

[6] TIMMERMANN G. A Cascadic Multigrid Algorithm for Semilinear Elliptic Problems [J]. Numerische Mathematik, 2000, 86(4): 717-731.

[7] 邹战勇. 半线性椭圆型问题 Mortar 有限元逼近的瀑布型多重网格法 [J]. 数学理论与应用, 2006, 26(1): 39-41.

[8] 禹海雄, 孙 哲. 一类半线性椭圆问题的瀑布型多重网格法 [J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2011, 38(8): 79-81.

[9] 禹海雄. 几类非线性问题的多重网格解法 [D]. 长沙: 湖南大学, 2011.

[10] 陈维翰. 用多重网格法改进偏微分方程反问题的广义脉冲谱算法 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 1995, 13(4): 1-6.

A Two-Level Method for Solving Nonlinear Elliptic Problems with a Jumping Coefficient

LI Ming^{1,2}, ZHENG Zhou-shun¹, ZHAO Jin-e²

1. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China;
2. Department of Mathematics, Honghe University, Mengzi Yunnan 661199, China

Abstract: An efficient two-level method is studied to solve the nonlinear systems which arise from a nonlinear elliptic problem with a jumping coefficient by a finite difference method. Only one auxiliary coarse grid space is needed with a suitable mesh size discretization, and linear correction equations are applied instead of the nonlinear systems on the finest grid space. Numerical results are given to verify the computational cost and efficiency of the proposed approach and the results are compared with the existing numerical methods for solving nonlinear elliptic problems with a jumping coefficient.

Key words: nonlinear elliptic problem; two-grid method; finite different method; linear correcting equations

责任编辑 张 枸