DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.05.010

最优控制问题的 Tikhonov 正则化[①]

赵清梅，　张俊容

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 主要研究了约束线性二次最优控制问题. 通过一阶最优性条件将它等价地转化为单调变分不等式问题，并利用变分不等式的 Tikhonov 正则化方法研究了约束线性二次最优控制问题的正则化，证明了扰动问题的解收敛到原问题的最小范数解.

关　键　词： CLQ 问题；变分不等式；Tikhonov 正则化；扰动问题

中图分类号： O232　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-9868(2019)05-0059-05

在本文中，设控制系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\ t\in[0,\ T] \\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{1}$$

性能指标为

$$J(\boldsymbol{u}(\cdot))=\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}}[\langle \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(t)\rangle+2\langle \boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t)\rangle+\langle \boldsymbol{N}(t)\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{u}(t)\rangle]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\langle \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(T),\ \boldsymbol{x}(T)\rangle$$

设 $\boldsymbol{A}(\cdot)\in L^{\infty}([0,\ T];\ \mathbb{R}^{n\times n})$，$\boldsymbol{B}(\cdot)\in L^{\infty}([0,\ T];\ \mathbb{R}^{n\times m})$，$\boldsymbol{R}(\cdot)\in L^{\infty}([0,\ T];\ S^n)$，$\boldsymbol{M}(\cdot)\in L^{\infty}([0,\ T];\ \mathbb{R}^{m\times n})$，$\boldsymbol{N}(\cdot)\in L^{\infty}([0,\ T];\ S^m)$，$\boldsymbol{G}\in S_+^n$，并且 $\boldsymbol{R}(\cdot)$，$\boldsymbol{M}(\cdot)$，$\boldsymbol{N}(\cdot)$ 满足

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{R}(\cdot) & \boldsymbol{M}(\cdot) \\ \boldsymbol{M}(\cdot)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{N}(\cdot) \end{pmatrix}\in L^{\infty}([0,\ T];\ S_+^{n+m})$$

其中：S^n 表示 $n\times n$ 阶对称矩阵全体，S_+^n 表示 $n\times n$ 阶半正定对称矩阵全体.

设控制集 U 为 $\mathbb{R}^m$ 中的有界闭凸集，可行控制集 $\mathscr{U}_{ad}$ 定义为

$$\mathscr{U}_{ad}:=\{\boldsymbol{u}(\cdot):[0,\ T]\longrightarrow U \mid \boldsymbol{u}(\cdot)\text{Lebesgue 可测}\}$$

由以上假设知 $J(\boldsymbol{u}(\cdot))$ 为凸函数.

本文考虑的约束线性二次最优控制问题(CLQ)为：求 $\overline{\boldsymbol{u}}(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，使得

$$J(\overline{\boldsymbol{u}}(\cdot))=\inf_{\boldsymbol{u}(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}} J(\boldsymbol{u}(\cdot)) \tag{2}$$

满足(2)式的 $\overline{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ 和(1)式关于 $\overline{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ 的解 $\overline{\boldsymbol{x}}(\cdot)$ 组成的$(\overline{\boldsymbol{x}}(\cdot),\ \overline{\boldsymbol{u}}(\cdot))$ 称为最优对.

由 Pontryagin 最大值原理[1]，最优对$(\overline{\boldsymbol{x}}(\cdot),\ \overline{\boldsymbol{u}}(\cdot))$ 若存在，必满足一阶最优性条件：

$$\begin{cases} \dot{\overline{\boldsymbol{x}}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\overline{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}(t)\overline{\boldsymbol{u}}(t) \\ \boldsymbol{p}(t)=-\boldsymbol{A}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}(t)+\boldsymbol{R}(t)\overline{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{M}(t)^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{u}}(t) \\ \overline{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{p}(T)=-\boldsymbol{G}\overline{\boldsymbol{x}}(T) \\ \int_0^{\mathrm{T}}\langle \boldsymbol{B}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}(t)-\boldsymbol{M}(t)\overline{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{N}(t)\overline{\boldsymbol{u}}(t),\ \boldsymbol{v}(t)-\overline{\boldsymbol{u}}(t)\rangle\mathrm{d}t\leqslant 0 \qquad \forall\,\boldsymbol{v}(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad} \end{cases} \tag{3}$$

---

① 收稿日期：2018-02-28

基金项目：国家自然科学基金项目(11701470).

作者简介：赵清梅(1993-)，女，四川绵阳人，硕士研究生，主要从事最优控制、优化算法研究.

通信作者：张俊容，博士，副教授.

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{p}(t)=-\boldsymbol{A}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}(t)+\boldsymbol{R}(t)\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{M}(t)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}}(t)\\ \boldsymbol{p}(T)=-\boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{x}}(T)\end{cases}\tag{4}$$

称为伴随方程.

在 L^2 上定义范数 $\|\cdot\|_2$ 和内积 $\langle\varphi,\psi\rangle_{L^2}$,

$$\|\varphi\|_2:=\left(\int_0^{\mathrm{T}}|\varphi(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\qquad \langle\varphi,\psi\rangle_{L^2}:=\int_0^{\mathrm{T}}\langle\varphi(t),\psi(t)\rangle\mathrm{d}t$$

设 $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{u}(\cdot)$ 为(1)式中微分方程关于 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 的解, $\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{u}(\cdot)$ 为(4)式中伴随方程关于 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{u}(\cdot)$ 的解. 定义映射 $F\circ\cdot:\mathscr{U}_{ad}\longrightarrow L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$

$$F\circ\boldsymbol{u}(\cdot)=-\boldsymbol{B}(\cdot)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}\circ\boldsymbol{u}(\cdot)+\boldsymbol{M}(\cdot)\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{u}(\cdot)+\boldsymbol{N}(\cdot)\boldsymbol{u}(\cdot)\tag{5}$$

于是(3)式可转化为抽象变分不等式 $VI(F,\mathscr{U}_{ad})$: 求解 $\bar{\boldsymbol{u}}\in\mathscr{U}_{ad}$ 使得

$$\langle F\circ\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{u}}\rangle_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}\geqslant 0\qquad\forall\boldsymbol{v}\in\mathscr{U}_{ad}$$

这样, 一阶必要性条件可等价写成变分不等式 $VI(F,\mathscr{U}_{ad})$ 的形式, 而在凸性的条件下, 一阶必要条件为充要条件(定理2), 故可以将最优控制问题等价转化为变分不等式问题. 进而利用变分不等式问题的Tikhonov正则化方法来证明CLQ问题的正则性.

1 预备知识

变分不等式是研究偏微分方程, 最优控制等的工具. 经过几十年的研究, 变分不等式理论和算法得到了很好的完善和发展[2-4]. 在本节中我们列出本文用到的变分不等式理论中的相关结论.

定义1[2] 设 $\boldsymbol{X}$ 为Hilbert空间, 其上赋予内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\boldsymbol{X}}$ 和范数 $\|\cdot\|_{\boldsymbol{X}}$. K 为 $\boldsymbol{X}$ 中的非空闭凸子集, $F:K\longrightarrow\boldsymbol{X}$ 为给定的映射, 变分不等式问题 $VI(F,K)$ 定义为: 求解 $\bar{u}\in K$ 使得

$$\langle F\circ\bar{u},v-\bar{u}\rangle_{\boldsymbol{X}}\geqslant 0\qquad\forall v\in K$$

定义2[2] 设 K 为Hilbert空间 $\boldsymbol{X}$ 中的非空闭凸子集, $F:K\longrightarrow\boldsymbol{X}$ 称为

(ⅰ) 单调映射, 若对于任意的 $u,v\in K$ 有

$$\langle F\circ u-F\circ v,u-v\rangle_{\boldsymbol{X}}\geqslant 0$$

(ⅱ) 强单调映射, 若存在常数 $\mu>0$, 使得对任意的 $u,v\in K$ 有

$$\langle F\circ u-F\circ v,u-v\rangle_{\boldsymbol{X}}\geqslant\mu\|u-v\|_{\boldsymbol{X}}^2$$

引理1[2] 设 K 为Hilbert空间 $\boldsymbol{X}$ 中的非空有界闭凸集, 若 $F:K\longrightarrow\boldsymbol{X}$ 连续且单调, 则变分不等式 $VI(F,K)$ 有解. 此外, 若 F 强单调, 则变分不等式 $VI(F,K)$ 有唯一解.

引理2[2] 设 K 为Hilbert空间 $\boldsymbol{X}$ 中的非空闭凸集, 若 $F:K\longrightarrow\boldsymbol{X}$ 连续且强单调, 则变分不等式 $VI(F,K)$ 存在唯一解.

引理3[5] 设 K 为Hilbert空间 $\boldsymbol{X}$ 中的非空闭凸集, 若 $F:K\longrightarrow\boldsymbol{X}$ 连续且单调, 则 $\bar{u}$ 是变分不等式 $VI(F,K)$ 的解当且仅当 $\bar{u}$ 是对偶变分不等式的解: 求解 $\bar{u}\in K$ 使得

$$\langle F\circ v,v-\bar{u}\rangle_{\boldsymbol{X}}\geqslant 0\qquad\forall v\in K$$

在变分不等式理论中, 如果 F 只是单调的而不是强单调的, 变分不等式的解可能不唯一. 处理这类问题的思路之一是在 F 上增加扰动 εI 使它强单调, 利用扰动强单调变分不等式的解来逼近原问题的解. 于是学者们引入了变分不等式的Tikhonov正则化理论[6-9].

设 K 为Hilbert空间 $\boldsymbol{X}$ 中的非空闭凸集, $F:K\longrightarrow\boldsymbol{X}$ 连续且单调, 对任意的 $\varepsilon>0$, 定义扰动变分不等式 $VI(F+\varepsilon I,K)$: 求解 $u^{\varepsilon}\in K$ 使得

$$\langle F\circ u^{\varepsilon}+\varepsilon u^{\varepsilon},v-u^{\varepsilon}\rangle_{\boldsymbol{X}}\geqslant 0\qquad\forall v\in K$$

称上述扰动问题为原问题的Tikhonov正则化问题. 由假设, 对任意的 $\varepsilon>0$, 扰动变分不等式 $VI(F+\varepsilon I,K)$ 有唯一解 u^{ε}. 称集合 $\{u^{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ 为原变分不等式 $VI(F,K)$ 的Tikhonov正则化轨道.

下面这个定理说明扰动问题的解收敛到原问题的最小范数解.

定理 1[2]　设 K 为 Hilbert 空间 $\boldsymbol{X}$ 中的非空闭凸集，若 $F: K \longrightarrow \boldsymbol{X}$ 连续且单调，且变分不等式 $VI(F, K)$ 的解集非空，则

(i) $\| u^{\varepsilon} \|_{\boldsymbol{X}} \leqslant \| \bar{u} \|_{\boldsymbol{X}}$，其中 $\bar{u}$ 为变分不等式 $VI(F, K)$ 的最小范数解；

(ii) u^{ε} 在 $\boldsymbol{X}$ 上收敛于 $\bar{u}$.

2　主要结果

首先证明在一定的条件下，一阶最优性条件(3) 和 CLQ 问题(2) 等价.

定理 2　若存在可行控制 $\bar{\boldsymbol{u}}(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}$ 满足一阶最优性条件(3)，则 $\bar{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ 为 CLQ 问题(2) 的最优控制.

证　由于 U 为 $\mathbb{R}^m$ 中的闭凸集，容易验证 $\mathscr{U}_{ad}$ 为 $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ 中的闭凸集. 对任意的可行控制 $\boldsymbol{u}(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}$，定义

$$\boldsymbol{u}^{\lambda}(\cdot) = \bar{\boldsymbol{u}}(\cdot) + \lambda(\boldsymbol{u}(\cdot) - \bar{\boldsymbol{u}}(\cdot)) \in \mathscr{U}_{ad}$$

其中 $\lambda \in (0, 1)$. 设 $\boldsymbol{x}^{\lambda}(\cdot)$ 为微分方程(1) 关于 $\boldsymbol{u}^{\lambda}(\cdot)$ 的解，并记 $\delta \boldsymbol{x}(\cdot) = \boldsymbol{x}^{\lambda}(\cdot) - \bar{\boldsymbol{x}}(\cdot)$，则 $\delta \boldsymbol{x}(\cdot)$ 满足

$$\begin{cases} \delta \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\delta \boldsymbol{x}(t) + \lambda \boldsymbol{B}(t)(\boldsymbol{u}(t) - \bar{\boldsymbol{u}}(t)), \ t \in [0, T] \\ \delta \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{6}$$

设 $\boldsymbol{p}(t)$ 为如下方程的解：

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}(t) = -\boldsymbol{A}(t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{R}(t)\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{M}(t)^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{u}}(t) \\ \boldsymbol{p}(T) = -\boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{x}}(T) \end{cases} \tag{7}$$

由 $J(\boldsymbol{u}(\cdot))$ 为凸函数可得

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{u}(\cdot)) - J(\bar{\boldsymbol{u}}(\cdot)) \geqslant & \frac{J(\boldsymbol{u}^{\lambda}(\cdot)) - J(\bar{\boldsymbol{u}}(\cdot))}{\lambda} = \\ & \int_0^{\mathrm{T}} \langle \boldsymbol{R}(t)\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{M}(t)^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{u}}(t), \frac{\delta \boldsymbol{x}(t)}{\lambda} \rangle \mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{T}} \langle \boldsymbol{M}(t)\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{N}(t)\bar{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{u}(t) - \\ & \bar{\boldsymbol{u}}(t) \rangle \mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{x}}(T), \frac{\delta \boldsymbol{x}(T)}{\lambda} \rangle + \circ(1) = \\ & \int_0^{\mathrm{T}} \langle \boldsymbol{p}(t), \frac{\delta \boldsymbol{x}(t)}{\lambda} \rangle \mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{T}} \langle \boldsymbol{A}(t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}(t), \frac{\delta \boldsymbol{x}(t)}{\lambda} \rangle \mathrm{d}t + \\ & \int_0^{\mathrm{T}} \langle \boldsymbol{M}(t)\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{N}(t)\bar{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{u}(t) - \bar{\boldsymbol{u}}(t) \rangle \mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{x}}(T), \frac{\delta \boldsymbol{x}(T)}{\lambda} \rangle + \circ(1) = \\ & -\int_0^{\mathrm{T}} \langle \boldsymbol{p}(t), \frac{\delta \dot{\boldsymbol{x}}(t)}{\lambda} \rangle \mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{T}} \langle \boldsymbol{A}(t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}(t), \frac{\delta \boldsymbol{x}(t)}{\lambda} \rangle \mathrm{d}t + \\ & \int_0^{\mathrm{T}} \langle \boldsymbol{M}(t)\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{N}(t)\bar{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{u}(t) - \bar{\boldsymbol{u}}(t) \rangle \mathrm{d}t + \circ(1) = \\ & \int_0^{\mathrm{T}} \langle -\boldsymbol{B}(t)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{M}(t)\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{N}(t)\bar{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{u}(t) - \bar{\boldsymbol{u}}(t) \rangle \mathrm{d}t + \circ(1) \geqslant \\ & \circ(1) \end{aligned}$$

令 $\lambda \longrightarrow 0^+$，得到 $J(\boldsymbol{u}(\cdot)) - J(\bar{\boldsymbol{u}}(\cdot)) \geqslant 0$. 由 $\boldsymbol{u}(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}$ 的任意性，$\bar{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ 为 CLQ 问题(2) 的最优控制.

定理 3　设 F 为(4) 式中定义的映射，则存在常数 $L \geqslant 0$ 使得

$$\| F \circ \boldsymbol{u}_1 - F \circ \boldsymbol{u}_2 \|_2 \leqslant L \| \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \|_2 \qquad \forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathscr{U}_{ad} \tag{8}$$

并且，

$$\langle F \circ \boldsymbol{u}_1 - F \circ \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \rangle_{L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} \geqslant 0 \qquad \forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathscr{U}_{ad} \tag{9}$$

证　对任意 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathscr{U}_{ad}$，记

$$\delta \boldsymbol{u}(\cdot) = \boldsymbol{u}_1(\cdot) - \boldsymbol{u}_2(\cdot) \qquad \delta \boldsymbol{x}(\cdot) = \boldsymbol{x}_1(\cdot) - \boldsymbol{x}_2(\cdot)$$

其中 $\boldsymbol{x}_1(\cdot), \boldsymbol{x}_2(\cdot)$ 为方程(1) 关于 $\boldsymbol{u}_1(\cdot), \boldsymbol{u}_2(\cdot)$ 的解，记 $\delta \boldsymbol{p}(\cdot) = \boldsymbol{p}_1(\cdot) - \boldsymbol{p}_2(\cdot)$，其中 $\boldsymbol{p}_1(\cdot)$ 是方程(6) 关于$(\boldsymbol{x}_1(\cdot), \boldsymbol{u}_1(\cdot))$ 的解，$\boldsymbol{p}_2(\cdot)$ 是方程(6) 关于$(\boldsymbol{x}_2(\cdot), \boldsymbol{u}_2(\cdot))$ 的解.

由关于 $\delta\boldsymbol{x}(\cdot)$ 的微分方程的先验估计，存在常数 $C_1 \geqslant 0$ 使得

$$\|\delta\boldsymbol{x}(t)\|_2 \leqslant C_1 \|\delta\boldsymbol{u}(t)\|_2 \tag{10}$$

类似地，由关于 $\delta\boldsymbol{p}(\cdot)$ 的微分方程解的先验估计，存在常数 $C_2 \geqslant 0$ 使得

$$\|\delta\boldsymbol{p}(t)\|_2 \leqslant C\|\boldsymbol{R}(t)\delta\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{M}(t)\delta\boldsymbol{u}(t)\|_2 \leqslant C_2\|\delta\boldsymbol{u}(t)\|_2 \tag{11}$$

由(10),(11)式可得，存在常数 $L \geqslant 0$ 使得

$$\|F\circ\boldsymbol{u}_1 - F\circ\boldsymbol{u}_2\|_2 = \|-\boldsymbol{B}(t)^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{p}(t)+\boldsymbol{M}(t)\delta\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{N}(t)\delta\boldsymbol{u}(t)\|_2 \leqslant L\|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2\|_2$$

于是(8)式成立，下面证明(9)式.

由于 $\delta\boldsymbol{x}(t)$ 满足微分方程

$$\begin{cases}\delta\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\delta\boldsymbol{x}(t)+\lambda\boldsymbol{B}(t)(\boldsymbol{u}_1(t)-\boldsymbol{u}_2(t))\\ \delta\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{12}$$

并且 $\boldsymbol{p}_2(t)$ 满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{p}_2(t)=-\boldsymbol{A}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2(t)+\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{M}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2(t)\\ \boldsymbol{p}_2(T)=-\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_2(T)\end{cases} \tag{13}$$

类似于前面的推导过程，可得

$$J(\boldsymbol{u}_1(\cdot))-J(\boldsymbol{u}_2(\cdot)) \geqslant \frac{J(\boldsymbol{u}_2(\cdot)+\lambda(\boldsymbol{u}_1(\cdot)-\boldsymbol{u}_2(\cdot)))-J(\boldsymbol{u}_2(\cdot))}{\lambda}=$$
$$\int_0^{\mathrm{T}}\langle-\boldsymbol{B}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2(t)+\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{N}(t)\boldsymbol{u}_2(t),\ \boldsymbol{u}_1(t)-\boldsymbol{u}_2(t)\rangle\mathrm{d}t+\circ(1)$$

令 $\lambda\to 0^+$，得到

$$J(\boldsymbol{u}_1(\cdot))-J(\boldsymbol{u}_2(\cdot)) \geqslant \int_0^{\mathrm{T}}\langle F\circ\boldsymbol{u}_2(t),\ \boldsymbol{u}_1(t)-\boldsymbol{u}_2(t)\rangle\mathrm{d}t \tag{14}$$

相应地，可得

$$J(\boldsymbol{u}_2(\cdot))-J(\boldsymbol{u}_1(\cdot)) \geqslant \int_0^{\mathrm{T}}\langle F\circ\boldsymbol{u}_1(t),\ \boldsymbol{u}_2(t)-\boldsymbol{u}_1(t)\rangle\mathrm{d}t \tag{15}$$

结合(14),(15)式，可得

$$\int_0^{\mathrm{T}}\langle F\circ\boldsymbol{u}_2(t)-F\circ\boldsymbol{u}_1(t),\ \boldsymbol{u}_2(t)-\boldsymbol{u}_1(t)\rangle\mathrm{d}t \geqslant 0 \qquad \forall\,\boldsymbol{u}_1(\cdot),\boldsymbol{u}_2(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$$

即 F 单调.

下面研究CLQ问题的Tikhonov正则化. 设 $\varepsilon>0$，定义关于性能指标的Tikhonov正则化扰动

$$J^{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\cdot))=J(\boldsymbol{u}(\cdot))+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}t$$

则CLQ问题的Tikhonov正则化扰动问题(TRCLQ)为：求 $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$，使得

$$J^{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(\cdot))=\inf_{\boldsymbol{u}(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}}J^{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\cdot)) \tag{16}$$

由前面的讨论，$\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(\cdot)$ 是扰动问题(16)的解当且仅当 $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(\cdot)$ 满足一阶最优性条件：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}^{\varepsilon}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}^{\varepsilon}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t)\\ \dot{\boldsymbol{p}}(t)=-\boldsymbol{A}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}(t)+\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{x}^{\varepsilon}(t)+\boldsymbol{M}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t)\\ \boldsymbol{x}^{\varepsilon}(0)=\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{p}(T)=-\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{\varepsilon}(T)\\ \int_0^{\mathrm{T}}\langle\boldsymbol{B}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}(t)-\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{x}^{\varepsilon}(t)-\boldsymbol{N}(t)\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t)-\varepsilon\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t),\ \boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t)\rangle\mathrm{d}t\leqslant 0 \qquad \forall\,\boldsymbol{v}(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}\end{cases}$$

进一步，一阶最优条件(17)可转化为变分不等式问题 $VI(F+\varepsilon I,\mathscr{U}_{ad})$：求解 $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$ 使得

$$\langle F\circ\boldsymbol{u}^{\varepsilon}+\varepsilon\boldsymbol{u}^{\varepsilon},\ \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\rangle_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}\geqslant 0 \qquad \forall\,\boldsymbol{v}\in\mathscr{U}_{ad}$$

其中 F 由(5)式定义.

下面证明CLQ问题的Tikhonov正则化轨道 $\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ 收敛.

定理4　设控制集 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧凸集，则CLQ问题(2)有唯一最小范数解，并且其Tikhonov正则化

扰动问题(16)的解收敛到原问题的最小范数解.

证　U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧凸集，则可行控制 $\mathscr{U}_{ad}$ 是 $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ 中的弱紧凸集. 由定理3可以知道 F 单调，由引理1，变分不等式 $VI(F,\mathscr{U}_{ad})$ 解集非空闭凸. 故 $VI(F,\mathscr{U}_{ad})$ 有唯一最小范数解. 由定理2，$VI(F,\mathscr{U}_{ad})$ 的最小范数解也是 CLQ 问题的最小范数解. 因此 CLQ 问题(2)有唯一最小范数解. Tikhonov 正则化扰动问题(16)的解收敛到原问题的最小范数解直接由定理1得到.

致谢：感谢西南大学数学与统计学院张海森老师对本文提供的建议和指导.

参考文献：

[1] CHAMBERS M L，PONTRYAGIN L S，BOLTYANSKII V G，et al. The Mathematical Theory of Optimal Processes [M]. Oxford：Pergamon Press，1964.

[2] FACCHINEI F，PANG J S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems [M]. New York：Springer，2004.

[3] 张　亮，吴至友. 非凸变分不等式的四步投影算法及其收敛性分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(10)：109-113.

[4] 许　微，彭建文. 基于投影交替方向法求解结构型单调变分不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(1)：90-97.

[5] MINTY G J. Monotone (Nonlinear) Operators in Hilbert Space [J]. Duke Mathematical Journal，1962，29(3)：341-346.

[6] BROWDER F E. Existence and Approximation of Solutions of Nonlinear Variational Inequalities [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences，1966，56(4)：1080-1086.

[7] HE Y R. The Tikhonov Regularization Method for Set-Valued Variational Inequalities [J]. Abstract and Applied Analysis，2012，2012：1-10.

[8] QI H D. Tikhonov RegularizationMethods for Variational Inequality Problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1999，102(1)：193-201.

[9] LUO X P. Tikhonov RegularizationMethods for Inverse Variational Inequalities [J]. Optimization Letters，2014，8(3)：877-887.

The Tikhonov Regualization of the Optimal Control Problem

ZHAO Qing-mei，　ZHANG Jun-rong

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，the problem of linear quadratic (LQ) optimal control with constraint is discussed. First，this problem is equivalently converted to a monotonic variational inequality problem through first-order optimality conditions. Then，by the Tikhonov regularization method of variational inequalities，the regularization of the problem is studied. Finally，we prove that the solution of the perturbation problem converges to the minimum norm solution of the original problem.

Key words：CLQ problem；variational inequality；Tikhonov regularization；perturbation problem

责任编辑　张　枸