DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.06.011

一类与贝努利双纽线和共轭点有关的广义解析函数的三阶 Hankel 行列式①

张海燕，　汤　获，　马丽娜

赤峰学院 数学与统计学院，内蒙古 赤峰 024000

摘要：设 $\mathscr{A}$ 表示在单位圆盘 $\mathscr{D}=\{z: |z|<1\}$ 内解析且满足 $f(0)=f'(0)-1=0$ 的函数类. 首先，引入了与贝努利双纽线有关且具有共轭点的广义解析函数类 $SL_c^*(\alpha, \mu)$：

$$SL_c^*(\alpha, \mu)=$$

$$\left\{f\in\mathscr{A}: \frac{2\alpha\mu z^3 f'''(z)+2(2\alpha\mu+\alpha-\mu)z^2 f''(z)+2zf'(z)}{\alpha\mu z^2\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)''+(\alpha-\mu)z\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)'+(1-\alpha+\mu)\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)}\prec\sqrt{1+z},\ z\in\mathscr{D}\right\}$$

然后，讨论了此类函数的三阶 Hankel 行列式 $H_3(1)$，得到其上界估计.

关 键 词：解析函数；共轭点；三阶 Hankel 行列式；贝努利双纽线；上界

中图分类号：O174.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2019)06-0073-06

设 $\mathbb{C}$ 表示复数集，$\mathscr{A}$ 表示单位圆盘 $\mathscr{D}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ 内单叶解析且具有如下形式：

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \tag{1}$$

的函数族.

设 $\mathscr{P}$ 表示单位圆盘 $\mathscr{D}$ 内具有如下形式：

$$p(z)=1+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$$

且满足条件 $\operatorname{Re} p(z)>0$ 的解析函数族.

由文献[1] 中的结论易知，对于函数 $p(z)\in\mathscr{P}$，存在 Schwarz 函数 $\omega(z)$，使得 $p(z)\in\mathscr{P}$ 当且仅当 $p(z)=\dfrac{1+w(z)}{1-w(z)}$.

定义 1[2]　设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在单位圆盘 $\mathscr{D}$ 内解析. 如果存在 $\mathscr{D}$ 内的 Schwarz 函数 $\omega(z)$，满足 $\omega(0)=0$，$|\omega(z)|<1$ 且 $f(z)=g(\omega(z))$，则称 $f(z)$ 从属于 $g(z)$，记为 $f(z)\prec g(z)$. 特别地，如果 $g(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上是单叶的，则 $f(z)\prec g(z)(z\in\mathscr{D})$ 当且仅当 $f(0)=g(0)$，$f(\mathscr{D})\subset g(\mathscr{D})$.

定义 2　设 $SL_c^*(\alpha, \mu)$ 表示具有(1) 式的形式且满足下述条件的函数全体：

$$\left\{f\in\mathscr{A}: \left|\left(\frac{2\alpha\mu z^3 f'''(z)+2(2\alpha\mu+\alpha-\mu)z^2 f''(z)+2zf'(z)}{\alpha\mu z^2\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)''+(\alpha-\mu)z\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)'+(1-\alpha+\mu)\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)}\right)^2-1\right|<1\right\}\ (z\in\mathscr{D})$$

易知若 $f\in SL_c^*(\alpha, \mu)$，则有

① 收稿日期：2018-03-12
基金项目：国家自然科学基金项目(11561001，11761006)；内蒙古高等学校科学研究项目(NJZY16251).
作者简介：张海燕(1981-)，女，副教授，主要从事算子代数与复分析的研究.

$$\frac{2\alpha\mu z^3 f'''(z)+2(2\alpha\mu+\alpha-\mu)z^2 f''(z)+2zf'(z)}{\alpha\mu z^2\left(f(z)+\overline{f(\overline{z})}\right)''+(\alpha-\mu)z\left(f(z)+\overline{f(\overline{z})}\right)'+(1-\alpha+\mu)\left(f(z)+\overline{f(\overline{z})}\right)} \prec \sqrt{1+z} \qquad z\in\mathscr{D} \quad (2)$$

最早在文献[3]中介绍了双纽线函数,其他作者也给出了进一步的研究,详见文献[4-5].

注意到,若在定义2中分别取 $\mu=0$, $\alpha=\mu=0$ 和 $\alpha-1=\mu=0$ 时,则可得如下函数类:

$$\mathrm{SL}_c^*(\alpha,0)\equiv\mathrm{SL}_c^*(\alpha)=\left\{f\in\mathscr{A}:\left|\left(\frac{2\alpha z^2 f''(z)+2zf'(z)}{\alpha z\left(f(z)+\overline{f(\overline{z})}\right)'+(1-\alpha)\left(f(z)+\overline{f(\overline{z})}\right)}\right)^2-1\right|<1\right\} \qquad z\in\mathscr{D}$$

$$\mathrm{SL}_c^*(0,0)\equiv\mathrm{SL}_c^*=\left\{f\in\mathscr{A}:\left|\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)+\overline{f(\overline{z})}}\right)^2-1\right|<1\right\} \qquad z\in\mathscr{D}$$

和

$$\mathrm{SL}_c^*(1,0)\equiv\mathrm{SL}_c^*(1)=\left\{f\in\mathscr{A}:\left|\left(\frac{2zf''(z)+2f'(z)}{\left(f(z)+\overline{f(\overline{z})}\right)'}\right)^2-1\right|<1\right\} \qquad z\in\mathscr{D}$$

文献[6]定义了函数 f 的 q 阶 Hankel 行列式

$$H_q(n)=\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2} \end{vmatrix}$$

其中 $a_1=1$, $n\geqslant 1$, $q\geqslant 1$. 特别地,有:

$$H_2(1)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}=a_1a_3-a_2^2$$

$$H_2(2)=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}=a_2a_4-a_3^2$$

$$H_3(1)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}$$

因为 $f\in\mathscr{A}$, $a_1=1$,故有

$$H_3(1)=a_3(a_2a_4-a_3^2)-a_4(a_4-a_2a_3)+a_5(a_3-a_2^2)$$

易知 $H_3(1)$ 即为经典的 Fekete-Szegö 不等式[7].

近年来,许多学者研究了各类解析函数的三阶 Hankel 行列式 $H_3(1)$,得到了其上界估计,详见文献[8-13]. 文献[3]引入了与贝努利双纽线有关的解析函数类,许多学者对此函数类进行了进一步研究. 如文献[4]讨论了与贝努利双纽线有关的解析函数类的微分从属性质,文献[14-16]分别讨论了贝努利双纽线区域内解析函数类的优化问题以及解析函数的三阶 Hankel 行列式. 受以上工作的启发,本文研究了一类具有共轭点且与贝努利双纽线有关的广义解析函数 $\mathrm{SL}_c^*(\alpha,\mu)$ 的三阶 Hankel 行列式 $H_3(1)$,得到其上界估计.

引理1[8] 如果 $p(z)\in\mathscr{P}$,则 $|c_n|\leqslant 2(n=1,2,\cdots)$.

引理2[9] 如果 $p(z)\in\mathscr{P}$,则存在 $x,z\in\mathbb{C}$ 且 $|x|\leqslant 1$, $|z|\leqslant 1$,使得:

$$2c_2=c_1^2+x(4-c_1^2) \qquad 4c_3=c_1^3+2c_1x(4-c_1^2)-(4-c_1^2)c_1x^2+2(4-c_1^2)(1-|x|^2)z$$

定理1 如果 $f\in\mathrm{SL}_c^*(\alpha,\mu)$,则有:

$$|a_2|\leqslant\frac{1}{2[2\alpha\mu+\alpha-\mu+1]}$$

$$|a_3|\leqslant\frac{5}{16[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1)]} \tag{3}$$

$$|a_4|\leqslant\frac{7}{32[12\alpha\mu+3(\alpha-\mu)+1]} \tag{4}$$

$$|a_5| \leqslant \frac{193}{1\,024[20\alpha\mu + 4(\alpha-\mu)+1]} \tag{5}$$

证　设 $f \in SL_c^*(\alpha,\mu)$，由定义 1 和(2) 式，可得

$$\left(\frac{2\alpha\mu z^3 f'''(z) + 2(2\alpha\mu+\alpha-\mu)z^2 f''(z) + 2zf'(z)}{\alpha\mu z^2\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)'' + (\alpha-\mu)z\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)' + (1-\alpha+\mu)\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)}\right)^2 = 1+\omega(z)$$

其中 $\omega(z)$ 是 Schwarz 函数且满足 $\omega(0)=0$，$|\omega(z)|<1$，$z \in \mathscr{D}$. 令 $\omega(z)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$，通过计算分别比较等式两边 z, z^2, z^3, z^4 的系数，易得：

$$a_2 = \frac{C_1}{2[2\alpha\mu+\alpha-\mu+1]} \qquad a_3 = \frac{4C_2 + C_1^2}{16[6\alpha\mu + 2(\alpha-\mu)+1]}$$

$$a_4 = \frac{16C_3 + 4C_1C_2 + C_1^3}{96[12\alpha\mu + 3(\alpha-\mu)+1]} \qquad a_5 = \frac{384C_4 - 5C_1^4 + 88C_1^2C_2 + 64C_1C_3 + 48C_2^2}{3\,072[20\alpha\mu + 4(\alpha-\mu)+1]}$$

又因 $|C_n| \leqslant 1$，$\sum_{n=1}^{\infty}|C_n| \leqslant 1$，故定理 1 成立.

定理 2　如果 $f \in SL_c^*(\alpha,\mu)$，则

$$|a_2a_3 - a_4| \leqslant MA_4 \tag{6}$$

其中：

$$A_1 = [2\alpha\mu + (\alpha-\mu)+1][6\alpha\mu + 2(\alpha-\mu)+1] \tag{7}$$

$$A_2 = [144\alpha\mu + 36(\alpha-\mu)+12] + 4[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1)][2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1] \tag{8}$$

$$A_3 = 36\alpha\mu + 9(\alpha-\mu) + 3 + [2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1][6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1] \tag{9}$$

$$M = \frac{1}{768[12\alpha\mu+3(\alpha-\mu)+1][2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1][6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]} \tag{10}$$

$$r = \frac{2\sqrt{256A_1^2 + 3(16A_1+A_2)(16A_1+A_2-A_3)} - 32A_1}{3(16A_1+A_2-A_3)} \tag{11}$$

$$A_4 = 32(4-r^2)A_1 + 16r(4-r^2)A_1 + r^3A_3 + (4-r^2)rA_2 \tag{12}$$

证　如果 $f \in SL_c^*(\alpha,\mu)$，则由定义 1 及(2) 式可得

$$\frac{2\alpha\mu z^3 f'''(z) + 2(2\alpha\mu+\alpha-\mu)z^2 f''(z) + 2zf'(z)}{\alpha\mu z^2(f(z)-f(-z))'' + (\alpha-\mu)z(f(z)-f(-z))' + (1-\alpha+\mu)(f(z)-f(-z))} = \sqrt{1+\omega(z)}$$

定义

$$p(z) = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} = 1 + c_1z + c_2z^2 + \cdots$$

则 $p(z) \in \mathscr{P}$，且：

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\omega(z)} = \left(\frac{2p(z)}{p(z)+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ 1 + \frac{1}{4}c_1z + \left(\frac{1}{4}c_2 - \frac{5}{32}c_1^2\right)z^2 + \left(\frac{1}{4}c_3 - \frac{5}{16}c_1c_2 + \frac{13}{128}c_1^3\right)z^3 + \cdots\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\frac{2\alpha\mu z^3 f'''(z) + 2(2\alpha\mu+\alpha-\mu)z^2 f''(z) + 2zf'(z)}{\alpha\mu z^2(f(z)-f(-z))'' + (\alpha-\mu)z(f(z)-f(-z))' + (1-\alpha+\mu)(f(z)-f(-z))} = \\ &1 + [2\alpha\mu+\alpha-\mu+1]a_2z + \{2[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]a_3 - a_2^2[2\alpha\mu+\alpha-\mu+1]^2\}z^2 + \\ &\{3[12\alpha\mu+3(\alpha-\mu)+1]a_4 - 3[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1][2\alpha\mu+\alpha-\mu+1]a_3a_2 + \\ &a_2^3[2\alpha\mu+\alpha-\mu+1]^3\}z^3 + \cdots\end{aligned} \tag{14}$$

分别比较(13),(14) 式中 z, z^2, z^3 的系数，得

$$a_2 = \frac{c_1}{4[2\alpha\mu+\alpha-\mu+1]} \tag{15}$$

$$a_3=\frac{8c_2-3c_1^2}{64[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]} \tag{16}$$

$$a_4=\frac{64c_3-56c_1c_2+13c_1^3}{768[12\alpha\mu+3(\alpha-\mu)+1]} \tag{17}$$

从而，可得

$$|a_2a_3-a_4|=$$

$$M\left|(24c_2c_1-9c_1^3)[12\alpha\mu+3(\alpha-\mu)+1]-(13c_1^3+64c_3-56c_1c_2)[2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1][6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]\right|$$

设 $|x|=t$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$c_1=c$，$c\in[0,2]$，则由三角不等式及引理 1 可得

$$|a_2a_3-a_4|\leqslant M[32(4-c^2)A_1+16t^2c(4-c^2)A_1+c^3A_3+(4-c^2)ctA_2]=F(c,t)$$

则易得 $\dfrac{\partial F}{\partial t}\geqslant 0$. 因此函数 $F(c,t)$ 在 $t=1$ 处取得最大值，即

$$\max F(c,t)=F(c,1)=M[32(4-c^2)A_1+16c(4-c^2)A_1+c^3A_3+(4-c^2)cA_2]=G(c)$$

经过简单计算可得

$$c=r=\frac{2\sqrt{256A_1^2+3(16A_1+A_2)(16A_1+A_2-A_3)}-32A_1}{3(16A_1+A_2-A_3)}$$

是 $G'(c)=0$ 的根，又因为函数 $G''(r)<0$，从而可得函数 $G(c)$ 在 $c=r$ 处取得最大值，则函数 $F(c,t)$ 在 $t=1$，$c=r$ 处取得最大值，即 $|a_2a_3-a_4|\leqslant MA_4$. 定理 2 得证.

定理 3　如果 $f\in SL_c^*(\alpha,\mu)$，则有

$$|a_3-a_2^2|\leqslant\begin{cases}QR & 4[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]<3[2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1]^2\\ \dfrac{1}{4[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]} & 4[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]\geqslant 3[2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1]^2\end{cases} \tag{18}$$

其中：

$$Q=\frac{1}{64[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1][2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1]^2} \tag{19}$$

$$R=4[2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1]^2+16[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1] \tag{20}$$

证　由(15)式、(16)式、(17)式，可得

$$|a_3-a_2^2|=Q\left|[2\alpha\mu+\alpha-\mu+1]^2[4x(4-c_1^2)+c_1^2]-4[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]c_1^2\right|$$

设 $|x|=t$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$c_1=c$，$c\in[0,2]$，则由三角不等式及引理 2，可得

$$|a_3-a_2^2|\leqslant Q\{[c^2+4t(4-c^2)][2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1]^2+4c^2[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]\}=F(c,t)$$

则有 $\dfrac{\partial F}{\partial t}\geqslant 0$，从而函数 $F(c,t)$ 在 $t=1$ 处取得最大值，即：

$$\max F(c,t)=F(c,1)=[c^2+4(4-c^2)][2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1]^2+4c^2[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]=G(c)$$

$$G'(c)=-6c[2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1]^2+8c[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]$$

下面分两种情况讨论：

情形 1　当 $4[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]\geqslant 3[2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1]^2$ 时，则有 $G'(c)\geqslant 0$，即函数 $G(c)$ 关于 c 单调递增，所以函数 $G(c)$ 在 $c=2$ 处取得最大值，因此

$$|a_3-a_2^2|\leqslant QG(2)=Q\{4[2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1]^2+16[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]\}$$

情形 2　类似地，当 $4[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]<3[2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1]^2$ 时，有 $G'(c)<0$，可得函数 $F(c,t)$ 在 $t=1$，$c=0$ 处取得最大值，即有

$$|a_3-a_2^2|\leqslant QG(0)=\frac{1}{4[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]}$$

定理 3 得证.

定理 4　如果 $f\in SL_c^*(\alpha,\mu)$，则有

$$|a_2a_4-a_3^2|\leqslant\frac{1}{16[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]^2} \tag{21}$$

证　证明方法与定理 3 类似.

定理 5　如果 $f\in SL_c^*(\alpha,\mu)$，则

$$|H_3(1)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{5}{256[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]^3}+\dfrac{7A_4M}{32[12\alpha\mu+3(\alpha-\mu)+1]}+\dfrac{193QR}{1\,024[20\alpha\mu+4(\alpha-\mu)+1]} & q_1<q_2\\ \dfrac{5}{256[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]^3}+\dfrac{7A_4M}{32[12\alpha\mu+3(\alpha-\mu)+1]}+\dfrac{193}{4\,096[20\alpha\mu+4(\alpha-\mu)+1][6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]} & q_1\geqslant q_2\end{cases}$$

其中 M,r,A_4,Q,R 分别由(10),(11),(12),(19),(20)式给出，且：

$$q_1=4[6\alpha\mu+2(\alpha-\mu)+1]\qquad q_2=3[2\alpha\mu+(\alpha-\mu)+1]^2$$

证　因为

$$|H_3(1)|\leqslant|a_3||a_2a_4-a_3^2|+|a_4||a_4-a_2a_3|+|a_5||a_3-a_2^2|\tag{22}$$

将(3)－(6)式、(18)式和(21)式代入(22)式，即得定理 5.

在定理 5 中，若分别取 $\mu=0$，$\alpha=\mu=0$ 和 $\alpha-1=\mu=0$，则可得如下的一些推论：

推论 1　如果 $f\in SL_c^*(\alpha)$，则

$$|H_3(1)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{5}{256[2\alpha+1]^3}+\dfrac{7A_4M}{32[3\alpha+1]}+\dfrac{193QR}{1\,024[4\alpha+1]} & q_1<q_2\\ \dfrac{5}{256[2\alpha+1]^3}+\dfrac{7A_4M}{32[3\alpha+1]}+\dfrac{193}{4\,096[4\alpha+1][2\alpha+1]} & q_1\geqslant q_2\end{cases}$$

其中 M,A_4,Q,R 分别是(10),(12),(19),(20)式中 $\mu=0$ 的情况，且：

$$q_1=4(2\alpha+1)\qquad q_2=3(\alpha+1)^2$$

推论 2　如果 $f\in SL_c^*$，则

$$|H_3(1)|\leqslant\frac{5}{256}+\frac{241+119\sqrt{46}}{42\,336}+\frac{193}{4\,096}$$

推论 3　如果 $f\in SL_c^*(1)$，则

$$|H_3(1)|\leqslant\frac{5}{6\,912}+\frac{7MA_4}{128}+\frac{193}{61\,440}$$

其中 M,A_4 分别是(10)式 和(12)式中 $\alpha=1$，$\mu=0$ 的情况.

参考文献：

[1] GRAHAM I, KOHR G. Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions [M]. New York: Marcel Dekker, 2003: 27-58.

[2] BANSAL D. Upper Bound of Second Hankel Determinant for a New Class of Analytic Functions [J]. Applied Mathematics Letters, 2013, 26(1): 103-107.

[3] SOKÖL J, STANKIEWICZ J. Radius of Convexity of Some Subclasses of Strongly Starlike Functions [J]. Zesz Nauk Politech Rzeszowskiej Mat, 1996, 19: 101-105.

[4] ALI R M, CHO N E, RAVICHANDRAN V, et al. Differential Subordination for Functions Associated with the Lemniscate of Bernoulli [J]. Taiwan J Math, 2012, 16(3): 1017-1026.

[5] SOKÖL J. Coefficient Estimates in a Class of Strongly Starlike Functions [J]. Kyungpook Math J, 2009, 49(2): 349-353.

[6] NOONAN J W, THOMAS D K. On the Second Hankel Determinant of Areally Mean p-Valent Functions [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1976, 223(2): 337-346.

[7] FEKETE M, SZEGÖ G. Eine Benberkung Uber Ungerada Schlichte Funktionen [J]. J London Math Soc, 1933, 8(2): 85-89.

[8] SUDHARSAN T V, VIJAYALAKSHMI S P, ADOLF STEPHEN B. Third Hankel Determinant for a Subclass of Analytic Univalent Functions [J]. Malaya J Mat, 2014, 2(4): 438-444.

[9] BANSAL D, MAHARANA S, PRAJAPAT J K. Third order Hankel Determinant for Certain Univalent Functions [J].

J Korean Math Soc, 2015, 52(6): 1139-1148.

[10] 张海燕, 汤 获, 马丽娜. 一类解析函数的三阶 Hankel 行列式上界估计 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2017, 33(2): 211-220.

[11] ZHANG H Y, TANG H, LI S H, et al. Some Basic Properties for Certain Classes of p-Valent Analytic Functions Using Differential Operator [J]. Chin Quart J of Math, 2018, 33(2): 132-139.

[12] ZHANG H Y, TANG H, NIU X M. Third-Order Hankel Determinant for Certain Class of Analytic Functions Related with Exponential Function [J/OL]. Symmetry, 2018(10): 1-8[2018-02-10]. http://www. mdpi. com/journal/symmetry.

[13] 张海燕, 汤 获, 马丽娜. 一类解析函数的三阶 Hankel 行列式 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2018, 41(6): 776-780.

[14] 汤 获, 李书海, 牛潇萌, 等. 伯努利双纽线区域内解析函数类的优化问题 [J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(11): 263-267.

[15] RAZA M, MALIK S N. Upper Bound of the Third Hankel Determinant for a Class of Analytic Functions Related with Lemniscate of Bernoulli [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2013, 412(1): 1-8.

[16] 张海燕, 汤 获, 马丽娜. 某类解析函数的三阶 Hankel 行列式 [J]. 华南师范大学学报 (自然科学版), 2018, 50(4): 107-110.

Third Hankel Determinant for a Class of Generalized Analytic Functions Associated with Bernoulli's Lemniscate and Conjugate Points

ZHANG Hai-yan, TANG Huo, MA Li-na

School of Mathematics and Statistics, Chifeng University, Chifeng Inner Mongolia 024000, China

Abstract: Let $\mathscr{A}$ be the class of analytic functions in the unit disc $\mathscr{D}=\{z: |z|<1\}$ normalized by $f(0)=f'(0)-1=0$. First, a class of generalized analytic functions associated with Bernoulli's lemniscate and conjugate points are introduced, which is shown as:

$$SL_c^*(\alpha,\mu)=$$

$$\left\{f\in\mathscr{A}: \frac{2\alpha\mu z^3 f'''(z)+2(2\alpha\mu+\alpha-\mu)z^2 f''(z)+2zf'(z)}{\alpha\mu z^2\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)''+(\alpha-\mu)z\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)'+(1-\alpha+\mu)\left(f(z)+\overline{f(\bar{z})}\right)}\prec\sqrt{1+z},\ z\in\mathscr{D}\right\}$$

Then, the third Hankel determinant $H_3(1)$ for this function class is investigated and the upper bound of the above determinant is obtained.

Key words: analytic function; conjugate point; third Hankel determinant; Bernoulli's lemniscate; upper bound

责任编辑 廖 坤