第 41 卷第 6 期 西南大学学报(自然科学版) 2019 年 6 月
Vol. 41 No. 6 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Jun. 2019

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.06.012

广义 Aluthge 变换的极大数值域①

刘 妮[1], 任谨慎[1], 庞永峰[2]

1. 空军工程大学 基础部, 西安 710051; 2. 西安建筑科技大学 理学院, 西安 710055

摘要: 设 H 为复可分无限维 Hilbert 空间, $t \in (0,1)$, $\widetilde{\mathbf{A}}^t$ 及 $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}$ 分别为 H 上有界线性算子 $\mathbf{A}$ 的广义 Aluthge 变换及广义 *-Aluthge 变换. 对任意复数 λ, 利用算子分块技巧证明了 $\widetilde{\mathbf{A}}^t-\lambda$ 及 $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-\lambda$ 的范数相等且极大数值域相等, 并进一步给出了 $\widetilde{\mathbf{A}}^t$ 及 $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}$ 内导子范数的关系.

关 键 词: Hilbert 空间; 广义 Aluthge 变换; 极大数值域; 极分解

中图分类号: O151.21 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2019)06-0079-05

设 H 为复可分无限维 Hilbert 空间, $B(H)$ 为 H 上全体有界线性算子. $N(\mathbf{A})$, $\rho(\mathbf{A})$, $\sigma(\mathbf{A})$, $\sigma_p(\mathbf{A})$, $W(\mathbf{A})$, $R(\mathbf{A})$ 分别表示 $B(H)$ 中算子 $\mathbf{A}$ 的核、豫解集、谱、点谱, 数值域以及值域. $\overline{M}$, $M^\wedge$ 分别表示 M 的范数闭包及闭凸包.

设 $\mathbf{A}\in B(H)$, $\mathbf{A}=\mathbf{U}|\mathbf{A}|$ 是它的极分解, 其中 $\mathbf{U}$ 是具有起始空间 $\overline{R(|\mathbf{A}|)}$ 和终空间 $\overline{R(\mathbf{A})}$ 的部分等距算子, $|\mathbf{A}|=(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{\frac{1}{2}}$. 文献[1] 定义了两个新算子:

$$\widetilde{\mathbf{A}}=|\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}|\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}\qquad \widetilde{\mathbf{A}}^{(*)}=|\mathbf{A}^*|^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^{\frac{1}{2}}$$

分别称为 $\mathbf{A}$ 的 Aluthge 变换及 *-Aluthge 变换. 之后这两个算子被进一步推广, 即对任意的 $t\in(0,1)$, $\widetilde{\mathbf{A}}^t=|\mathbf{A}|^t\mathbf{U}|\mathbf{A}|^{1-t}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}=|\mathbf{A}^*|^t\mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^{1-t}$ 分别称为 $\mathbf{A}$ 的广义 Aluthge 变换及广义 *-Aluthge 变换[2].

近年来, 关于算子 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 及 $\widetilde{\mathbf{A}}^{(*)}$ 的研究涉及到各种谱、不变子空间、数值域、本性数值域[3-9]、平移性质等[10]. 文献[11] 研究了 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 及 $\widetilde{\mathbf{A}}^{(*)}$ 的数值域, 证明了 $\overline{W(\widetilde{\mathbf{A}})}=\overline{W(\widetilde{\mathbf{A}}^{(*)})}$. 文献[[12] 进一步证明了 $W(\widetilde{\mathbf{A}})=W(\widetilde{\mathbf{A}}^{(*)})$ 依然成立. 文献[13] 着重对 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 及 $\widetilde{\mathbf{A}}^{(*)}$ 的本性数值域、极大数值域展开讨论, 给出 $W_0(\widetilde{\mathbf{A}}-\lambda)=W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{(*)}-\lambda)$ 对任意复数 λ 成立, 其中 $W_0(\mathbf{A})$ 表示 $\mathbf{A}$ 的极大数值域. 本文主要借助算子分块的技巧, 利用逼近思想研究了广义 Aluthge 变换的极大数值域, 证明了对任意的 $t\in(0,1)$, $W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^t-\lambda)=W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-\lambda)$ 成立, 将文献[13] 的结论进行了推广, 并给出 $\widetilde{\mathbf{A}}^t-\lambda$ 与 $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-\lambda$ 的范数以及 $\widetilde{\mathbf{A}}^t$ 和 $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}$ 内导子的关系.

定义 1[14] 设 $\mathbf{A}\in B(H)$, $W_0(\mathbf{A})=\{\lambda\in\mathbb{C}$: 存在单位向量列 $\{\boldsymbol{x}_n\}\subset H$, 且 $\|\mathbf{A}\boldsymbol{x}\|\to\|\mathbf{A}\|$, $(\mathbf{A}\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_n)\to\lambda\}$ 称为算子 $\mathbf{A}$ 的极大数值域.

文献[14] 证明了 $W_0(\mathbf{A})$ 是复平面上的非空闭凸集, 且对任意复数 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 有

$$W_0(\mathbf{A}+\lambda_1)\cap W_0(\mathbf{A}+\lambda_2)=\varnothing$$

---

① 收稿日期: 2018-10-10

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(11001159); 陕西省教育厅专项基金项目(2013JK0565); 陕西省自然科学面上基金项目(2014JM1010).

作者简介: 刘 妮(1976-), 女, 副教授, 主要从事算子广义逆理论的研究.

引理1[13]　设 $\boldsymbol{T} \in B(H)$，M 为 H 的闭子空间，$H = M \oplus M^{\perp}$，$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$，则：

(i) 若 $\|\mathbf{A}\| = \|\boldsymbol{B}\|$，则 $W_0(\boldsymbol{T}) = [W_0(\mathbf{A}) \cup W_0(\boldsymbol{B})]^{\wedge}$；

(ii) 若 $\|\mathbf{A}\| > \|\boldsymbol{B}\|$，则 $W_0(\boldsymbol{T}) = W_0(\mathbf{A})$.

引理2[15]　设 $\mathbf{A} \in B(H)$，对任意 $t \in (0,1)$，有 $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\widetilde{\mathbf{A}}^t) = \sigma(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)})$.

引理3[16]　设 $\mathbf{U}$ 为 $B(H)$ 中的非酉等距算子，$D = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leqslant 1\}$ 为复平面上的单位圆盘，则 $D \subseteq \sigma_p(\mathbf{U}^*)$.

设 $\mathbf{A} = \mathbf{U}|\mathbf{A}|$ 为 $B(H)$ 中算子 $\mathbf{A}$ 的极分解，则在空间分解 $H = N(\mathbf{A}) \oplus N(\mathbf{A})^{\perp}$ 下有：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^*\mathbf{B} + \mathbf{C}^*\mathbf{C} \end{pmatrix}$$

设 $t \in (0,1)$，容易计算 $\widetilde{\mathbf{A}}^t = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{X} = (\mathbf{B}^*\mathbf{B} + \mathbf{C}^*\mathbf{C})^{\frac{t}{2}}\mathbf{U}_2(\mathbf{B}^*\mathbf{B} + \mathbf{C}^*\mathbf{C})^{\frac{1-t}{2}}$ 为 $N(\mathbf{A})^{\perp}$ 上的有界线性算子.

注意到 $\mathbf{U}$ 为部分等距算子，故存在 $\mathbf{U}_0: N(\mathbf{A})^{\perp} \longrightarrow N(\mathbf{A}^*)^{\perp}$ 为酉算子，使得

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_0 \end{pmatrix}: N(\mathbf{A}) \oplus N(\mathbf{A})^{\perp} \longrightarrow N(\mathbf{A}^*) \oplus N(\mathbf{A}^*)^{\perp}$$

则 $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)} = \mathbf{U}\widetilde{\mathbf{A}}^t\mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{pmatrix}$，其中 $\mathbf{Y} = \mathbf{U}_0\boldsymbol{X}\mathbf{U}_0^*$.

定理1　设 $\mathbf{A} \in B(H)$，则对任意复数 λ 有 $\|\widetilde{\mathbf{A}}^t - \lambda\| = \|\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)} - \lambda\|$.

证　对任意复数 λ，由于：

$$\widetilde{\mathbf{A}}^t - \lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X} - \lambda \end{pmatrix}: H = N(\mathbf{A}) \oplus N(\mathbf{A})^{\perp}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)} - \lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} - \lambda \end{pmatrix}: H = N(\mathbf{A}^*) \oplus N(\mathbf{A}^*)^{\perp}$$

且 $\mathbf{Y} - \lambda$ 与 $\boldsymbol{X} - \lambda$ 酉等价. 以下我们分情形来讨论.

情形1　若 $N(\mathbf{A}) \neq \{0\}$，$N(\mathbf{A}^*) \neq \{0\}$，则

$$\|\widetilde{\mathbf{A}}^t - \lambda\| = \max\{|\lambda|, \|\boldsymbol{X} - \lambda\|\} = \max\{|\lambda|, \|\mathbf{Y} - \lambda\|\} = \|\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)} - \lambda\|$$

情形2　若 $N(\mathbf{A}) = \{0\}$，$N(\mathbf{A}^*) = \{0\}$，则 $\|\widetilde{\mathbf{A}}^t - \lambda\| = \|\boldsymbol{X} - \lambda\| = \|\mathbf{Y} - \lambda\| = \|\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)} - \lambda\|$.

情形3　若 $N(\mathbf{A}) = \{0\}$，$N(\mathbf{A}^*) \neq \{0\}$，则 $\|\widetilde{\mathbf{A}}^t - \lambda\| = \|\boldsymbol{X} - \lambda\| = \|\mathbf{Y} - \lambda\|$.

以下只需要证明 $\|\mathbf{Y} - \lambda\| \geq |\lambda|$ 即可.

若 $\|\mathbf{Y} - \lambda\| < |\lambda|$，则 $-\lambda \in \rho(\mathbf{Y} - \lambda)$，$\mathbf{Y}$ 是可逆的，故 $\boldsymbol{X}$ 可逆，这样就有 $\widetilde{\mathbf{A}}^t = \boldsymbol{X}$ 可逆. 由引理2知 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{A}^*$ 均可逆，这显然与 $N(\mathbf{A}^*) \neq \{0\}$ 矛盾.

情形4　若 $N(\mathbf{A}) \neq \{0\}$，$N(\mathbf{A}^*) = \{0\}$，与情形3类似.

定理2　设 $\mathbf{A} \in B(H)$，则对任意复数 λ，有 $W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^t - \lambda) = W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)} - \lambda)$.

证　由于 $\widetilde{\mathbf{A}}^t - \lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X} - \lambda \end{pmatrix}: N(\mathbf{A}) \oplus N(\mathbf{A})^{\perp}$，而当 $H = N(\mathbf{A}^*) \oplus N(\mathbf{A}^*)^{\perp}$ 时，有

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)} - \lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} - \lambda \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{Y} - \lambda$ 与 $\boldsymbol{X} - \lambda$ 酉等价. 不妨先假设 $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$，我们分情况讨论.

情形1　$N(\mathbf{A}) = \{0\}$，$N(\mathbf{A}^*) = \{0\}$. 由引理1知

$$W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^t-\lambda)=W_0(\mathbf{X}-\lambda)=W_0(\mathbf{Y}-\lambda)=W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-\lambda)$$

情形 2　$N(\mathbf{A})\neq\{0\}$，$N(\mathbf{A}^*)\neq\{0\}$.

若 $\|\mathbf{X}-\lambda\|=\|\mathbf{Y}-\lambda\|=|\lambda|$，则

$$W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^t-\lambda)=[W_0(\mathbf{X}-\lambda)\cup(-\lambda)]^\wedge=[W_0(\mathbf{Y}-\lambda)\cup(-\lambda)]^\wedge=W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-\lambda)$$

若 $\|\mathbf{X}-\lambda\|=\|\mathbf{Y}-\lambda\|>|\lambda|$，则

$$W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^t-\lambda)=W_0(\mathbf{X}-\lambda)=W_0(\mathbf{Y}-\lambda)=W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-\lambda)$$

若 $\|\mathbf{X}-\lambda\|=\|\mathbf{Y}-\lambda\|<|\lambda|$，则

$$W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^t-\lambda)=\{-\lambda\}=W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-\lambda)$$

情形 3　$N(\mathbf{A})=\{0\}$，$N(\mathbf{A}^*)\neq\{0\}$. 此时 $\widetilde{\mathbf{A}}^t-\lambda=\mathbf{X}-\lambda$，$W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^t-\lambda)=W_0(\mathbf{X}-\lambda)$.

因 $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-\lambda=\begin{pmatrix}-\lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}-\lambda\end{pmatrix}: N(\mathbf{A}^*)\oplus N(\mathbf{A}^*)^\perp$，以下只要证明 $\|\mathbf{Y}-\lambda\|>|\lambda|$ 即可.

如果 $\|\mathbf{Y}-\lambda\|<|\lambda|$，则 $-\lambda\in\rho(\mathbf{Y}-\lambda)$，即 $\mathbf{Y}$ 可逆. 而 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 酉等价，故 $\mathbf{X}$ 可逆，因此 $\widetilde{\mathbf{A}}^t=\mathbf{X}$ 可逆. 由引理 2 知 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{A}^*$ 均可逆，这与 $N(\mathbf{A}^*)\neq\{0\}$ 矛盾.

如果 $\|\mathbf{Y}-\lambda\|=|\lambda|$，由于对任意非零复数 λ 有 $(\lambda\widetilde{\mathbf{A}})^t=\lambda\widetilde{\mathbf{A}}^t$，不失一般性，假设 $\lambda=1$，显然

$$\|\widetilde{\mathbf{A}}^t-1\|=\|\mathbf{X}-1\|=\|\mathbf{Y}-1\|=1$$

则对任意单位向量 $\boldsymbol{x}\in H$，有 $\|\langle(\widetilde{\mathbf{A}}^t-1)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\|\leqslant 1$，即

$$\begin{aligned}\|\langle\widetilde{\mathbf{A}}^t\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle-1\|&=\|\langle\mathbf{U}|\mathbf{A}|^{1-t}\boldsymbol{x},|\mathbf{A}|^t\boldsymbol{x}\rangle-1\|=\\ &\|\langle\mathbf{U}|\mathbf{A}|^{1-2t}|\mathbf{A}|^t\boldsymbol{x},|\mathbf{A}|^t\boldsymbol{x}\rangle-1\|\leqslant 1\end{aligned}\tag{1}$$

注意到 $\mathbf{U}$ 为非酉等距算子，由引理 3 知单位圆盘 D 中的非零点均为 $\mathbf{U}^*$ 的特征值. 令 $\mu\in(-1,0)$，$\mathbf{y}_0$ 为单位向量且满足 $\mathbf{U}^*\mathbf{y}_0=\mu\mathbf{y}_0$. 由于 $|\mathbf{A}|^t$ 有稠值域，故存在 $\{\mathbf{y}_n\}\subset H$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|\mathbf{A}|^t\mathbf{y}_n=\mathbf{y}_0$ 成立，故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\langle\mathbf{U}|\mathbf{A}|^{1-2t}|\mathbf{A}|^t\mathbf{y}_n,|\mathbf{A}|^t\mathbf{y}_n\rangle&=\lim_{n\to\infty}\langle|\mathbf{A}|^{1-2t}|\mathbf{A}|^t\mathbf{y}_n,\mathbf{U}^*|\mathbf{A}|^t\mathbf{y}_n\rangle=\\ &\langle|\mathbf{A}|^{1-2t}\mathbf{y}_0,\mathbf{U}^*\mathbf{y}_0\rangle=\langle|\mathbf{A}|^{1-2t}\mathbf{y}_0,\mu\mathbf{y}_0\rangle=\mu\left\||\mathbf{A}|^{\frac{1-2t}{2}}\mathbf{y}_0\right\|^2<0\end{aligned}$$

而事实上，由(1)式及极限的性质有

$$\lim_{n\to\infty}\|\langle\mathbf{U}|\mathbf{A}|^{1-2t}|\mathbf{A}|^t\mathbf{y}_n,|\mathbf{A}|^t\mathbf{y}_n\rangle-1\|\leqslant 1$$

这显然矛盾，因此 $\|\mathbf{Y}-\lambda\|=|\lambda|$ 不成立.

特别地，若 $\lambda=0$，显然 $W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^t)=W_0(\mathbf{X})=W_0(\mathbf{Y})=W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)})$. 因此对任意复数 λ，有

$$W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-\lambda)=W_0(\mathbf{Y}-\lambda)=W_0(\mathbf{X}-\lambda)=W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^t-\lambda)$$

情形 4　$N(\mathbf{A})\neq\{0\}$，$N(\mathbf{A}^*)=\{0\}$. 则 $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-\lambda=\mathbf{Y}-\lambda$，$W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-\lambda)=W_0(\mathbf{Y}-\lambda)$. 此时

$$\widetilde{\mathbf{A}}^t-\lambda=\begin{pmatrix}-\lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{X}-\lambda\end{pmatrix}: N(\mathbf{A})\oplus N(\mathbf{A})^\perp$$

只要证明 $\|\mathbf{X}-\lambda\|>|\lambda|$ 即可.

与情形 3 类似可知 $\|\mathbf{X}-\lambda\|<|\lambda|$ 不成立. 以下只需证明 $\|\mathbf{X}-\lambda\|\neq|\lambda|$ 即可.

如果 $\|\mathbf{X}-\lambda\|=|\lambda|$，由于 $(\lambda\widetilde{\mathbf{A}})^{t(*)}=\lambda\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}$ 对于任意非零复数 λ 成立，故假设 $\lambda=1$，显然

$$\|\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-1\|=\|\mathbf{Y}-1\|=\|\mathbf{X}-1\|=1$$

则对任意单位向量 $\boldsymbol{x}\in H$，有 $\|\langle(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-1)\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\|\leqslant 1$，即

$$\begin{aligned}\|\langle\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle-1\|&=\|\langle\mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^{1-t}\boldsymbol{x},|\mathbf{A}^*|^t\boldsymbol{x}\rangle-1\|=\\ &\|\langle\mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^{1-2t}|\mathbf{A}^*|^t\boldsymbol{x},|\mathbf{A}^*|^t\boldsymbol{x}\rangle-1\|\leqslant 1\end{aligned}\tag{2}$$

由于此时 $\mathbf{U}$ 为非酉余等距算子，故单位圆盘 D 中的非零点均为 $\mathbf{U}$ 的特征值. 令 $\mu \in (-1, 0)$，$\mathbf{y}_0$ 为单位向量且满足 $\mathbf{U}\mathbf{y}_0 = \mu \mathbf{y}_0$. 注意到此时 $|\mathbf{A}^*|^{1-2t}$ 有稠值域，故存在 $\{\mathbf{y}_n\} \subset H$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathbf{A}^*|^{1-2t}\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_0$，故

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^{1-2t}\mathbf{y}_n = \mathbf{U}\mathbf{y}_0 = \mu\mathbf{y}_0$$

也就有

$$\lim_{n\to\infty}\langle \mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^{1-2t}\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \mu|\mathbf{A}^*|^{1-2t}\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\mu\left\| |\mathbf{A}^*|^{\frac{1-2t}{2}}\mathbf{y}_n\right\|^2$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\| |\mathbf{A}^*|^{\frac{1-2t}{2}}\mathbf{y}_n\right\| = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\| |\mathbf{A}^*|^{1-2t}\mathbf{y}_n\| = 0$. 但事实上

$$\lim_{n\to\infty}\| |\mathbf{A}^*|^{1-2t}\mathbf{y}_n\| = \|\mathbf{y}_0\| = 1$$

显然矛盾，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\| |\mathbf{A}^*|^{\frac{1-2t}{2}}\mathbf{y}_n\right\| \neq 0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\langle \mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^{1-2t}\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\mu\left\| |\mathbf{A}^*|^{\frac{1-2t}{2}}\mathbf{y}_n\right\|^2 < 0$$

则一定存在自然数 N_0，当 $n > N_0$ 时，$\langle \mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^{1-2t}\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n\rangle < 0$.

又由于 $|\mathbf{A}^*|^t$ 有稠值域，因此对于上述 $n > N_0$ 的每一个 $\mathbf{y}_n$，存在向量列 $\{\mathbf{x}_{n_m}\}_m$ 满足 $\lim\limits_{m\to\infty}|\mathbf{A}^*|^t\mathbf{x}_{n_m} = \mathbf{y}_n$，则

$$\lim_{m\to\infty}\langle \mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^{1-2t}|\mathbf{A}^*|^t\mathbf{x}_{n_m}, |\mathbf{A}^*|^t\mathbf{x}_{n_m}\rangle = \langle \mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^{1-2t}\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n\rangle < 0$$

也就有

$$\lim_{m\to\infty}\|\langle \mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^{1-2t}|\mathbf{A}^*|^t\mathbf{x}_{n_m}, |\mathbf{A}^*|^t\mathbf{x}_{n_m}\rangle - 1\| = \|\langle \mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^{1-2t}\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n\rangle - 1\| > 1$$

这显然与(2)式矛盾. 因此 $\|x - \lambda\| \neq |\lambda|$.

特别地，若 $\lambda = 0$，显然 $W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}) = W_0(\mathbf{Y}) = W_0(\mathbf{X}) = W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^t)$. 因此当 $N(\mathbf{T}) \neq \{0\}$，$N(\mathbf{T}^*) = \{0\}$ 时，有 $W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^t - \lambda) = W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)} - \lambda)$ 成立.

注意到当 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ 时，有：

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{1-t} = |\mathbf{A}|^{1-t}\mathbf{U}|\mathbf{A}|^t = (|\mathbf{A}|^t\mathbf{U}^*|\mathbf{A}|^{1-t})^* = (\widetilde{\mathbf{A}^*}^{t(*)})^*$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{(1-t)(*)} = |\mathbf{A}^*|^{1-t}\mathbf{U}|\mathbf{A}^*|^t = (|\mathbf{A}^*|^t\mathbf{U}^*|\mathbf{A}^*|^{1-t})^* = (\widetilde{\mathbf{A}^*}^t)^*$$

因此对 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$，依然有 $W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^t - \lambda) = W_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)} - \lambda)$ 成立.

对算子 $\mathbf{A} \in B(H)$，$\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{T}) = \mathbf{AT} - \mathbf{TA}$ 称为算子 $\mathbf{A}$ 的内导子，其中 $\mathbf{T} \in B(H)$ 为任意算子，文献[14]定义了 $\mathbf{A}$ 的内导子的范数为 $\|\delta_{\mathbf{A}}\| = \inf\{\|\mathbf{T} - \lambda\| : \lambda \in \mathbb{C}\}$. 由定理1，可以得到 $\widetilde{\mathbf{A}}^t$ 及 $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}$ 内导子范数的关系.

推论1 设 $\mathbf{A} \in B(H)$，对任意 $t \in (0, 1)$，有 $\|\delta_{\widetilde{\mathbf{A}}^t}\| = \|\delta_{\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}}\|$.

参考文献：

[1] ALUTHGE A. On p-Hyponormal Operators for $0<p<1$ [J]. Integral Equations and Operator Theory, 1990, 13(9): 307-315.

[2] YAMAZAKI T. On Numerical Range of the Aluthge Transformation [J]. Linea Algebra and its Applications, 2002, 341(2): 111-117.

[3] JUNG I B, KO E, PEARCY C. Aluthge Transforms of Operators [J]. Integral Equations and Operator Throry, 2000, 37: 437-448.

[4] 刘秀梅，杨新兵. 广义Aluthge与广义*-Aluthge变换的一些性质[J]. 南阳师范学院学报，2007，6(9)：7-9.

[5] JUNG I B, KO E, PEARCY C. Spectral Pictures of Aluthge Tranforms of Operators [J]. Integral Equations and Oper-

ator Theory，2001，40：52-60.

[6] 单钰琦，候国林，秦文青. 有界线性算子广义 Aluthge 变换的谱分析 [J]. 内蒙古大学学报(自然科学版)，2014，45(1)：1-5.

[7] 刘　妮，李炳杰，郭艳鹂. 广义 Aluthge 变换的 Drazin 逆 [J]. 空军工程大学学报(自然科学版)，2014，15(3)：93-95.

[8] LIU X M，JI G X. Some Properties of the Generalized Aluthge Transform [J]. Nihonkai Math J，2004，15(1)：101-107.

[9] 刘　妮，李炳杰. Aluthge 变换的本性极大数值域 [J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2016，40(2)：9-13.

[10] 李　泽，刘　妮，吉国兴. Aluthge 变换值域中的代数算子和平移性质 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版)，2007，35(4)：5-8.

[11] WU P Y. Numerical Range of Aluthge Transform of Operator [J]. Linear Algebra and its Applications，2002，357：295-298.

[12] LIU X M，YANG X B，DU H K. Numerical Range of the Aluthge Transform [J]. Acta Analysis Functionalis Applicata，2005，7(3)：193-197.

[13] JI G X，LIU N，LI Z. Essential Numerical Range and Maximal Numerical Range of the Aluthge Transform [J]. Linear & Multilinear Algebra，2007，55(4)：315-322.

[14] STAMPFLI J G. The Norm of a Derivation [J]. Pacifi J Math，1970，33(3)：737-747.

[15] ZHANG Y，JI G X. Spectral Properties of the Generalized Aluthge Transform [J]. Acta Analysis Functionalis Applicata，2008，10(2)：116-122.

[16] 刘秀梅，杨新兵. 关于广义 Aluthge 变换的数值域 [J]. 纯粹数学与应用数学，2010，26(1)：111-114.

Maximal Numerical Range of the Generalized Aluthge Transform

LIU　Ni[1]，　REN Jin-shen[1]，　PANG Yong-feng[2]

1. Basic Department，Air Force Engineering University，Xi'an 710051，China；

2. College of Science，Xi'an University of Architecture & Technology，Xi'an 710055，China

Abstract：Let H be an infinite separable Hilbert space and $\mathbf{A}$ be a bounded linear operator on H. The generalized Aluthge transform and the generalized*-Aluthge transform of $\mathbf{A}$ are denoted by $\widetilde{\mathbf{A}}^t$ and $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}$，respectively，where $t\in(0,1)$. By the method of operational partitioning，for any complex λ，the norm and maximal numerical range of $\widetilde{\mathbf{A}}^t-\lambda$ and $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}-\lambda$ are considered，and the relationship between the norm of the inner derivation of $\widetilde{\mathbf{A}}^t$ and $\widetilde{\mathbf{A}}^{t(*)}$ is given.

Key words：Hilbert space；generalized Aluthge transform；maximal numerical range；polar decomposition

责任编辑　廖　坤