

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.06.013

## 星型树和双星树的谱半径的界<sup>①</sup>

张 友, 李沐春

兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070

**摘要:** 针对星型树和双星树, 通过删除割点、割边的图运算方法, 利用特征多项式根与系数的关系先给出了谱半径的上界, 然后由已知的结论推出广义星型树图谱半径的界, 最后从改变最大度和第二大度出发, 通过剖分广义星型树的内部路以及外部路, 得到谱半径的变化不超过 1.

**关键词:** 树; 谱半径; 上界

**中图分类号:** O157.5      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1673-9868(2019)06-0084-06

本文所研究的图均为有限无向简单图. 设  $G=(V, E)$  表示点集为  $V$  且边集为  $E$  的简单图. 设  $A(G)$  是图  $G$  的邻接矩阵, 其邻接矩阵的特征多项式记作  $\varphi(G, \lambda)$ . 图  $G$  的邻接谱是由其特征方程的所有根所构成的多重集. 由于矩阵  $A(G)$  是实对称矩阵, 则其特征根都为实数, 我们把最大的特征根  $\lambda_1(G)$  称为图  $G$  的谱半径. 一般地, 将  $\Delta$  和  $d(v)$  分别记作图  $G$  的最大度和点  $v$  的度. 此外, 记  $P_n$  和  $K_{1,n-1}$  分别表示  $n$  个顶点的路图和星图.

图谱是图论的重要研究方向之一, 在量子化学和理论物理上有着重要的应用背景. 图谱理论的研究主要是利用线性代数、矩阵理论等成熟的代数理论和技巧, 并结合图论和组合数学的理论来研究图谱及其图的结构性质. 图矩阵的特征值不仅能反映图的结构性质, 而且能提供与图能量相关的信息, 图的邻接矩阵的特征值就是其中之一. 对其而言, 谱半径是重要的不变量, 故被众多学者研究. 文献[1]证明了在  $n$  阶树中星图  $K_{1,n-1}$  具有最大的谱半径. 文献[2]找到了  $k$  个悬挂点的谱半径最大的一类树图  $T_{n,k}$ . 文献[3]给出了某些树的谱和任何树的最大特征值的界限. 在解决图的分类和排序等诸多问题上, 需要对谱半径的上下界进行很好的估计. 而通常谱半径的界与最大度这一不变量联系紧密, 众所周知的结果是  $\sqrt{\Delta} < \lambda_1(G) < \Delta$  (见文献[4]). 当图  $G$  是树时, 文献[5]证明了  $\lambda_1(G) < 2\sqrt{\Delta-1}$ . 文献[6]给出了树图中拉普拉斯最大根和第二大根的下界. 文献[7]给出了一些树图的谱半径的界为  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ . 至今, 有许多关于树图谱半径的结论, 可参考文献[8-11].

图  $G \cup H$  表示图  $G$  和  $H$  的不交并, 图  $G-u$  是图  $G$  删除  $u$  点以及关联的边所得到的图. 树图  $B_{n,m}$  是由路图  $P_{n-m}$  通过连接星图  $K_{1,m}$  的任意一个悬挂点所构成的图(图 1). 图  $S(l_1, \dots, l_r)$  是一个星型树有且仅有一个最大度点  $u$ , 且满足

$$S(l_1, \dots, l_r) - u = P_{l_1} \cup \dots \cup P_{l_r}$$

① 收稿日期: 2018-03-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(11461038, 61163010); 甘肃省教育厅项目(2017A-021).

作者简介: 张 友(1989-), 男, 硕士研究生, 主要从事图论及其应用的研究.

通信作者: 李沐春, 教授.

其中  $d(u) = r$ (图 1). 图  $S^*(l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_{p+q})$  是一个双星树, 满足

$$S^*(l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_{p+q}) - u - v = P_{l_1} \cup P_{l_1} \cup \dots \cup P_{l_{p+q}}$$

其中  $d(u) = p + 1, d(v) = q + 1$ (图 2). 广义星型树  $G(l_1, l_2, \dots, l_{a+b-1})$  是由一个  $a(a \geq 3)$  度点和一个  $b(b \geq 3)$  度点, 其余点都是 2 度点或 1 度点所构成的树, 且满足

$$G(l_1, l_2, \dots, l_{a+b-1}) - u - v = P_{l_1} \cup P_{l_2} \cup \dots \cup P_{l_{a+b-1}}$$

其中  $d(u) = a, d(v) = b$ (图 2).

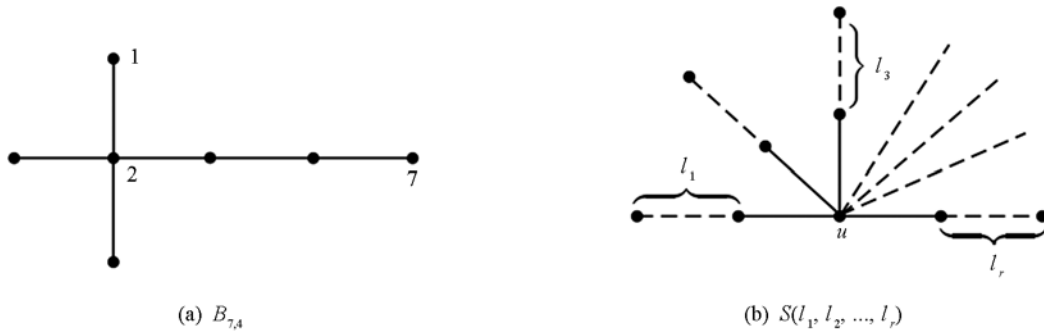


图 1  $B_{7,4}$  和  $S(l_1, l_2, \dots, l_r)$

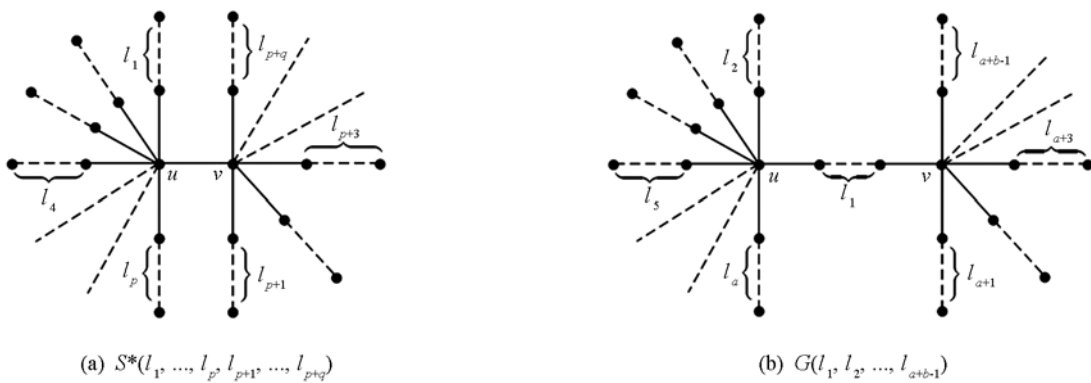


图 2  $S^*(l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_{p+q})$  和  $G(l_1, l_2, \dots, l_{a+b-1})$

长期以来, 许多学者一直针对树的最大度这一不变量来研究谱半径的界, 但是结合树的其它顶点的度对谱半径进行的研究较少. 本文从改变最大度和第二大度出发, 通过特征多项式的变化来研究谱半径的界. 针对星型树  $S(l_1, \dots, l_r)$  和双星树  $S^*(l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_{p+q})$  先给出了谱半径的上界, 然后由已知的结论推出广义星型树图  $G(l_1, l_2, \dots, l_{a+b-1})$  谱半径的界, 最后通过剖分图来验证结果.

### 1 预备知识

这一部分首先给出一些相关图特征多项式的基本结论和谱半径之间的大小排序性质.

引理 1<sup>[5]</sup> 设  $T$  是有最大度  $\Delta$  的树图, 则  $\lambda_1(T) < 2\sqrt{\Delta-1}$ .

引理 2<sup>[1, 5]</sup> 图的特征多项式满足下列关系:

- (a)  $\varphi(G \cup H, \lambda) = \varphi(G, \lambda)\varphi(H, \lambda)$ ;
- (b)  $\varphi(G, \lambda) = \lambda\varphi(G - u, \lambda) - \sum_{v \sim u} \varphi(G - u - v, \lambda)$ , 其中  $u$  是  $G$  的割点;
- (c)  $\varphi(G, \lambda) = \varphi(G - e, \lambda) - \varphi(G - x - y, \lambda)$ , 其中  $e = xy$  是  $G$  的割边.

这里图  $G - u - v$  是图  $G$  删除  $u$  点和  $v$  点以及和它们关联的边得到的图.

引理 3<sup>[7]</sup> 设  $B_{n,4}$  是一个  $\dagger$ -型树图. 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(B_{n,4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

文献[1]定义了图  $G$  的一个内部路,指的是:  $v_0, v_1, \dots, v_k$  是一个路但点  $v_0, v_k$  与其余点的度不同,即  $d(v_i) = 2 (i=1, 2, \dots, k-1)$ , 而  $d(v_0) > 2$  且  $d(v_k) > 2$ , 特别地, 点  $v_0$  与  $v_k$  的度可以相同.

**引理 4**<sup>[12]</sup> 设  $G$  是不同构于轮图  $W_n$  的连通图, 图  $G_{uv}$  是通过剖分图  $G$  的内部路  $uv$  所得到的图, 则  $\lambda_1(G_{uv}) < \lambda_1(G)$ .

对于有最大度  $\Delta$  的树图  $B_{n,m}$  (即  $m = \Delta$  时), 有:

**引理 5**<sup>[13]</sup> 设  $T$  是有最大度  $\Delta$  的任意树图, 并且满足  $T \not\cong B_{n,\Delta} (\Delta = 3, \dots, n-2)$ . 则  $\lambda_1(B_{n,\Delta}) < \lambda_1(T)$ .

**引理 6**<sup>[14]</sup> 设  $P_n$  是  $n$  个顶点的路图, 则

$$\varphi(P_n, \lambda) = \prod_{j=1}^n \left( \lambda - 2 \cos \frac{\pi j}{n+1} \right) = \frac{\sin \left( (n+1) \arccos \frac{\lambda}{2} \right)}{\sin \left( \arccos \frac{\lambda}{2} \right)}$$

令  $\lambda = 2 \cos \theta$ . 设  $t^{\frac{1}{2}} = e^{i\theta}$ , 我们得到  $\lambda = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}$ , 那么图  $P_n$  的特征多项式可以写成

$$\varphi(P_n, t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) = t^{-\frac{n}{2}} \frac{t^{n+1} - 1}{t - 1}$$

**引理 7**<sup>[15]</sup> 设  $G$  是连通图,  $H$  是  $G$  的真子图, 则  $\lambda_1(H) < \lambda_1(G)$ .

## 2 主要结论

**定理 1** 对星型树  $S(l_1, \dots, l_r)$ , 有

$$\lambda_1(S(l_1, \dots, l_r)) < \frac{r\sqrt{r-1}}{r-1}$$

**证** 设  $l_i < m (i=1, 2, \dots, r)$ . 对图  $S(m, \dots, m)$  删除割点  $u$ , 由引理 2(a) 和(b) 可得

$$\varphi(S(m, \dots, m), \lambda) = \lambda(\varphi(P_m, \lambda))^r - r\varphi(P_{m-1}, \lambda)(\varphi(P_m, \lambda))^{r-1}$$

令  $\lambda = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}$ , 根据引理 6 可得

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(S(m, \dots, m), t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})}{(\varphi(P_m, t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}))^{r-1}} &= \frac{(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})(t^{\frac{m+2}{2}} - t^{-\frac{m}{2}}) - r(t^{\frac{m+1}{2}} - t^{-\frac{m+1}{2}})}{t-1} = \\ &= \frac{t^{-\frac{m+1}{2}}}{t-1} (t^{m+2} - (r-1)t^{m+1} + (r-1)t - 1) = \phi(t) \end{aligned}$$

令  $t_1$  是  $\phi(t)$  的最大根. 由于当  $t > r-1$  时,  $\phi(t) > 0$ , 故  $t_1 < r-1$ . 设  $f(t) = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}$ . 当  $t \geq 1$  时, 有

$$f'(t) = t^{-\frac{3}{2}} \frac{t-1}{2} \geq 0$$

故  $f(t)$  在  $[1, +\infty)$  上严格递增. 于是

$$\lambda_1(S(m, \dots, m)) = t_1^{\frac{1}{2}} + t_1^{-\frac{1}{2}} < (r-1)^{\frac{1}{2}} + (r-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r-1}}{r-1}$$

由引理 7 可知

$$\lambda_1(S(l_1, \dots, l_r)) < \lambda_1(S(m, \dots, m)) < \frac{r\sqrt{r-1}}{r-1}$$

**定理 2** 设  $S^* = S^*(l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_{p+q})$ , 则有

$$\lambda_1(S^*) <$$

$$\left[ \frac{\sqrt{(p-q+1)^2 + 4(q-1)} + p + q - 1}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{\sqrt{(p-q+1)^2 + 4(q-1)} + p + q - 1}{2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

证 令  $l_j < l (j = 1, 2, \dots, p+q)$ .  $S_i$  表示等  $l$  长的星型树, 其中  $i$  表示  $u$  点的度. 对图  $S^*(l, l, \dots, l)$  删除割边  $e = uv$ , 由引理 2(c) 可得

$$\varphi(S^*, \lambda) = \varphi(S_p, \lambda) \varphi(S_q, \lambda) - (\varphi(P_l, \lambda))^{p+q}$$

设  $\lambda = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}$ . 由定理 1 可得:

$$\varphi(S_p, t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) = \frac{t^{-\frac{l+1}{2}}}{t-1} (t^{l+2} - (p-1)t^{l+1} + (p-1)t - 1) (\varphi(P_l, t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}))^{p-1}$$

$$\varphi(S_q, t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) = \frac{t^{-\frac{l+1}{2}}}{t-1} (t^{l+2} - (q-1)t^{l+1} + (q-1)t - 1) (\varphi(P_l, t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}))^{q-1}$$

根据引理 6 可得

$$\varphi(S^*, t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) =$$

$$\left[ \left[ \frac{t^{-\frac{l+1}{2}}}{t-1} \right]^2 (t^{l+2} - (p-1)t^{l+1} + (p-1)t - 1) (t^{l+2} - (q-1)t^{l+1} + (q-1)t - 1) - \right.$$

$$\left. (\varphi(P_l, t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}))^2 \right] (\varphi(P_l, t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}))^{p+q-2} =$$

$$\frac{t^{-\frac{l}{2}} (t^{l+1} - 1)^{p+q-2}}{(t-1)^{p+q}} [(t^{l+2} - (p-1)t^{l+1} + (p-1)t - 1) (t^{l+2} - (q-1)t^{l+1} + (q-1)t - 1) - t(t^{l+1} - 1)^2] =$$

$$\psi(t)$$

其中  $(p+q)l+2=n$ . 令  $t_1^*$  是  $\psi(t)$  的最大根. 由于  $l$  是无穷大量, 则  $\psi(t)$  的正负由  $t^{2l+2}$  的系数决定. 于是方程  $(t-(p-1))(t-(q-1))-t=0$  的最大解即为  $t_1^*$  的上界. 解得

$$t_1^* < \frac{\sqrt{(p-q+1)^2 + 4(q-1)} + p + q - 1}{2}$$

设  $f(t) = t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}$ . 当  $t \geq 1$  时, 有  $f'(t) = t^{-\frac{3}{2}} \frac{(t-1)}{2} \geq 0$ , 故  $f(t)$  在  $[1, +\infty)$  上严格递增. 由

$$\lambda_1(S^*) = (t_1^*)^{\frac{1}{2}} + (t_1^*)^{-\frac{1}{2}}, \text{ 则}$$

$$\lambda_1(S^*) <$$

$$\left[ \frac{\sqrt{(p-q+1)^2 + 4(q-1)} + p + q - 1}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{\sqrt{(p-q+1)^2 + 4(q-1)} + p + q - 1}{2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

推论 1 设  $G = G(l_1, l_2, \dots, l_{a+b-1})$ , 则

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} < \lambda_1(G) <$$

$$\left[ \frac{\sqrt{(a-b+1)^2 + 4(b-2)} + a + b - 3}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{\sqrt{(a-b+1)^2 + 4(b-2)} + a + b - 3}{2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

证 令  $l_j < l (j = 2, 3, \dots, p+q-1)$ . 当  $l_1 = 0$  时, 点  $u, v$  的度分别为  $a = p+1, b = q+1$ . 由定理 2 推出图  $G(0, l, \dots, l)$  的谱半径为

$$\lambda_1(G(0, l, \dots, l)) <$$

$$\left[ \frac{\sqrt{(a-b+1)^2 + 4(b-2)} + a + b - 3}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{\sqrt{(a-b+1)^2 + 4(b-2)} + a + b - 3}{2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

由引理 7 和引理 4 得到

$$\lambda_1(G(l_1, l_2, \dots, l_{a+b-1})) < \lambda_1(G(l_1, l, \dots, l)) < \lambda_1(G(0, l, \dots, l))$$

根据引理 5 可以得到

$$\lambda_1(B_{n,4}) < \lambda_1(G(l_1, l_2, \dots, l_{a+b-1}))$$

由引理 3 和极限不等式, 当  $n > n_0$  时, 有

$$\lambda_1(G(l_1, l_2, \dots, l_{a+b-1})) > \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(B_{n,4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

则

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} < \lambda_1(G) <$$

$$\left[ \frac{\sqrt{(a-b+1)^2 + 4(b-2)} + a + b - 3}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{\sqrt{(a-b+1)^2 + 4(b-2)} + a + b - 3}{2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

由于  $l_1$  位于图  $G(l_1, l_2, \dots, l_{a+b-1})$  的内部路上, 在  $l_1$  上剖分时, 剖分图的谱半径变化不超过  $1^{[16]}$ . 故下面研究内部路不变时, 改变图的最大度和剖分图的外部路对图的谱半径的影响. 不妨设  $l_1 = 0$ , 则:

**例 1** 针对图  $G(0, 1, \dots, 1)$  ( $l_1 = 0, l_i = 1, i = 2, 3, \dots, a+b-1$ ), 表 1 列举了数对  $(a, b)$  中, 当  $a, b$  取不同值时由 MATLAB 软件计算的谱半径近似值  $\lambda_1$  和由推论 1 得到的谱半径上界的近似值  $\lambda_1^*$ . 结果如表 1 所示.

表 1 部分图的谱半径及其上界

$(a, b)$	(5, 6)	(5, 7)	(6, 6)	(6, 7)	(6, 8)	(7, 7)	(7, 8)	(7, 9)
$\lambda_1$	2.833 9	2.969 2	2.930 8	3.043 0	3.165 4	3.132 6	3.235 6	3.348 0
$\lambda_1^*$	2.857 7	2.989 7	2.951 9	3.061 7	3.182 0	3.149 5	3.250 8	3.361 8

**注 1** 当  $a=5, b=6$  时, 令图  $G_1 = G(0, 1, \dots, 1)$  ( $l_1 = 0, l_i = 1, i = 2, 3, \dots, 10$ ). 借助 MATLAB 软件能够得出  $\lambda_1(G_1) \approx 2.833 9$ . 由推论 1 可以计算得到  $\lambda_1(G_1) < 6^{\frac{1}{2}} + 6^{-\frac{1}{2}} \approx 2.857 7$ . 容易发现, 当固定  $a, b$  时,  $l$  的变化不影响  $\lambda_1^*$  行的数值. 下面讨论剖分外部路  $l$  时, 图的谱半径变化.

**例 2** 当固定  $a=5, b=6$ , 对图  $G(0, l, \dots, l)$  ( $l_1 = 0, l_i = l, i = 2, 3, \dots, 10$ ) 增大  $l$  值时, 由 MATLAB 软件给出谱半径的近似值  $\lambda_1$  如表 2 所示.

表 2 图的谱半径

$l$	1	2	3	4	5	6	7
$\lambda_1$	2.833 883	2.853 919	2.857 107	2.857 633	2.857 721	2.857 735	2.857 738

**注 2** 对于外部路剖分时, 观察表 2 中  $\lambda_1$  行的数值变化不超过 1. 另外, 剖分外部路时得到的  $\lambda_1$  不超过给定的上界, 由例 1 和例 2 的结果可以验证推论 1 是成立的. 根据引理 1 可知  $\lambda_1(G_1) < 2\sqrt{\Delta-1} \approx 4.472 1$ . 由此可见, 本文找到了广义星型树图  $G(l_1, l_2, \dots, l_{a+b-1})$  较好的界.

#### 参考文献:

- [1] CVETKOVIC D, ROWLINSON P, SIMIC S. An Introduction to the Theory of Graph Spectra [M]. London: Cambridge University Press, 2010: 29-31.
- [2] WU B F, XIAO E L, HONG Y. The Spectral Radius of Trees on  $k$  Pendant Vertices [J]. Linear Algebra and its Applications, 2005, 395(1): 343-349.
- [3] ROJO O. The Spectra of Some Trees and Bounds for the Largest Eigenvalue of Any Tree [J]. Linear Algebra and its Applications, 2005, 395: 343-349.
- [4] GODISL C D. Algebraic Combinatorics [J]. The Mathematical Association, 1995, 484(79): 238-239.

- [5] GODISL C D. Spectra of Trees [J]. North-Holland Mathematics Studies, 1984, 87(20): 151-159.
- [6] DAS K C. Sharp Lower Bounds on the Laplacian Eigenvalues of Trees [J]. Linear Algebra and its Applications, 2004, 384(1): 155-169.
- [7] WOO R, NEUMAIER A. On Graphs Whose Spectral Radius is Bounded by  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$  [J]. Graphs Comb, 2007, 23(6): 713-726.
- [8] 董培佩. 不可约非负矩阵谱半径的新估算 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2017, 42(9): 27-31.
- [9] 钟 琴, 王 妍, 周 鑫, 等. 非负矩阵 Hadamard 积谱半径上界的不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(8): 77-81.
- [10] HU S B. On the Spectral Characterization of  $H$ -Shape Trees [J]. Linear Algebra and Matrix Theory, 2014, 4(2): 79-86.
- [11] FAIRAG A K. Spectral Characterization of Trees [D]. SAUDI ARABIA: King Fahd University of Petroleum, 1989.
- [12] HOFFMAN A J, SMITH J H. On the Spectral Radii of Topologically Equivalent Graphs [J]. Recent Advances in Graph Theory, 1974, 316(7): 273-281.
- [13] STEVANOVIĆ D, LLIC A. Distance Spectral Radius of Trees with Fixed Maximum Degree [J]. Electronic J of Linear Algebra, 2010, 20(1): 168-179.
- [14] WANG W, XU C X. On the Spectral Characterization of T-Shape Trees [J]. Linear Algebra Appl, 2006, 414(2/3): 492-501.
- [15] CVETIVIĆ D, DOOB M, SACHS H. Spectra of Graphs Theory and Applications [M]. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1980: 84-90.
- [16] WEN F, HUANG Q X, MA X L. On the Spectral Radius and Characteristic Polynomial of a Graph [J]. Advances in Mathematics, China, 2018, 47(1): 41-50.

## Bounds for the Spectral Radii of Starlike and Double-Starlike Trees

ZHANG You, LI Mu-chun

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

**Abstract:** For starlike and double-starlike trees, by deleting cut points and cut edges, the upper bound of spectral radius is given from the relationship between the root of the characteristic polynomial and the coefficient. Then, the bound of spectral radius of the generalized starlike tree is derived from known conclusions. Finally, starting from changing the maximum and the second maximum, the inner path and the outer path of the generalized starlike tree are divided, and the change of the spectral radius is shown to be less than 1.

**Key words:** tree; spectral radius; upper bound

责任编辑 廖 坤