DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.07.009

多变时滞 Volterra 型动力系统的稳定性[①]

王春生[1]，　李永明[2]

1. 广州大学华软软件学院 管理系，广州 510990；2. 上饶师范学院 数学与计算机科学学院，江西 上饶 334001

摘要：探讨了一类多变时滞积分微分动力系统，并通过不动点方法给出了该系统零解渐近稳定的充要条件. 在构造算子时，根据动力系统时滞特点，分别引入对应的连续函数 $h_i(s)$，$i=1,2,\cdots,n$，然后利用这 n 个函数来构造算子，最后再利用 Banach 不动点方法来研究该动力系统的稳定性.

关　键　词：Banach 不动点；渐近稳定性；多变时滞；Volterra 型动力系统

中图分类号：O231.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2019)07－0062－08

在研究动力系统的稳定性时，很多专家采用李雅普诺夫直接法[1]. 但是，在某些情况下，李雅普诺夫直接法相比于不动点方法的结论要严格苛刻一些，故很多学者采用不动点方法来研究确定性和随机性动力系统零解的存在性和稳定性[2-5]. 作为此研究的推广，作者在文献[6-12]中研究过多种随机微分动力系统的稳定性，而前期的研究结果还可以通过构造更适合的算子并结合有效的不等式予以改进.

1　论证多变时滞 Volterra 型动力系统分析

函数 $a_i(t), g_i(t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$，$q(s, t, x(s)) \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$，且 $g_i(t) \leqslant t$，满足当 $t \to \infty$ 时，$g_i(t) \to \infty$，$i=0,1,2,\cdots,n$.

考虑一类多变时滞 Volterra 型动力系统：

$$\mathrm{d}x(t)=\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(t)x(g_i(t))\right]+\int_{g_0(t)}^{t} q(s, t, x(s))\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t \qquad t \geqslant 0 \tag{1}$$

其初始条件

$$x_0=\varphi(t) \in C([m(0), 0], \mathbb{R})$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}$，

$$m(0)=\max_{0 \leqslant i \leqslant n}\{\inf(g_i(s), s \geqslant 0), \inf(g_0(s))\}$$

假设 q 满足局部 Lipschitz 条件，即存在连续可积函数 $C(t, s)$，$0 \leqslant s \leqslant t$，满足 $|C(t, s)|$ 有界，使得对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$|q(s, t, x)-q(s, t, y)| \leqslant C(t, s)|x-y| \tag{2}$$

对于系统(1)的特殊情形如系统(3),(4)，文献[1]采用李雅普诺夫直接法得到了 Volterra 型积分微分动

① 收稿日期：2017－06－20
基金项目：国家自然科学基金项目(11461057)；广东省普通高校特色创新项目(自然科学)(2018KTSCX339)；广州大学华软软件学院科学研究、教育教学研究项目(ky201801).
作者简介：王春生(1982－)，男，副教授，主要从事随机动力系统稳定性的研究.

力系统:

$$x'(t)=A(t)x(t)+\int_0^t C(t,s)x(s)\mathrm{d}s \qquad t\geqslant 0 \tag{3}$$

文献[2]采用不动点方法得到了多变时滞微分动力系统:

$$y'(t)=-\sum_{j=1}^{N} b_j(t)y(t-\tau_j(t)) \qquad t\geqslant 0 \tag{4}$$

下面给出文献[1-2]的结论:

引理 1[1] 如果 $A(t)\leqslant 0$ 且存在 $K_1>1$ 及 $K_2\geqslant 0$ 使得

$$A(t)+K_1\int_t^{+\infty}|C(\mu,t)|\mathrm{d}\mu\leqslant -K_2$$

则系统(3)的零解渐近稳定.

引理 2[2] 假设 τ_j 可微, $t-\tau_j(t)$ 的反函数 $g_j(t)$ 存在, 令

$$Q(t)=\sum\nolimits_{j=1}^{N} b_j(g_j(t))$$

$$\theta(t)=\sum\nolimits_{j=1}^{N}\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t Q(\mu)\mathrm{d}\mu}|b_j(s)||\tau'_j(s)|\mathrm{d}s$$

存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得当 $t\geqslant 0$ 时,

(i) $\varliminf\limits_{t\to\infty}\int_0^t Q(s)\mathrm{d}s>-\infty$.

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{N}\left[\int_{t-\tau_j(t)}^{t}|b_j(g_j(s))|\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{\int_s^t -Q(\mu)\mathrm{d}\mu}|Q(s)|\int_{s-\tau_j(s)}^{s}|b_j(g_j(v))|\mathrm{d}v\mathrm{d}s\right]+\theta(t)\leqslant\alpha$.

则系统(4)的零解渐近稳定的充分必要条件是

(iii) 当 $t\to\infty$ 时, $\int_0^t Q(s)\mathrm{d}s\to\infty$.

通过构造合适的算子, 并结合适当的不等式继续采用 Banach 不动点方法研究系统(1)零解的渐近稳定性, 得出如下定理 1.

定理 1 设函数 q 满足条件(2), $g_i(t)$ 可微, 且存在常数 $\alpha\in(0,1)$ 以及连续函数 $h_i(t)$: $[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $i=1,2,\cdots,n$, 使得当 $t\geqslant 0$ 时,

(i) $h(s)=\sum\limits_{i=1}^{n}h_i(s)$ 和 $\varliminf\limits_{t\to\infty}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s>-\infty$,

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{g_i(t)}^{t}|h_i(s)|\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left|\sum\limits_{i=1}^{n}(h_i(g_i(s))g'_i(s)+a_i(s))\right|\mathrm{d}s+$

$\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{g_o(s)}^{s}|C(s,\nu)|\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}s+\int_0^t|h(s)|\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int_{g_i(s)}^{s}|h_i(\nu)|\mathrm{d}\nu\right)\right]\mathrm{d}s\leqslant\alpha<1$.

则系统(1)的零解渐近稳定的充要条件是

(iii) 当 $t\to\infty$ 时, $\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\to\infty$.

注 1 当 $a_i(t)=-a_i$ (a_i 为常数), $g_i(s)=s$ 时, 可以在定理 1 中令 $h_i(t)=-a_i(t)=a_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 令 $\sum a_i=a$. 这时定理 1 就简化为:

推论 1 设函数 q 满足条件(2), $g_i(t)$ 可微, 且存在常数 $\alpha\in(0,1)$ 使得, 当 $t\geqslant 0$ 时,

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}\left(\int_{g_o(s)}^{s}|C(s,\nu)|\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}s\leqslant\alpha<1$$

则系统(1)的零解渐近稳定.

注 2 推论 1 给出的是常时滞动力系统的稳定性条件. 该条件简单, 易于检验, 实际操作容易被推广应

用.

另外，当将定理1的结论和证明过程应用到系统(3)和(4)，则引理1和引理2可改进为推论1和推论2.

推论 2　假设存在常数 $\alpha \in (0, 1)$ 以及连续函数 $h(t): [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$，使得当 $t \geqslant 0$ 时.

(i) $\underline{\lim}_{t\to\infty}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s > -\infty$.

(ii) $\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu} \mid (h(s)+A(s)) \mid \mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{V}\mu}\left(\int_0^s \mid C(s, \nu) \mid \mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}s \leqslant \alpha < 1$,

则系统(3)的零解渐近稳定的充要条件是

(iii) 当时当 $t \to \infty$ 时，$\int_0^t h(s)\mathrm{d}s \to \infty$.

注 3　推论 2 没有要求 $A(t) \leqslant 0$，一定程度上改进了引理 1 的结论.

推论 3　假设 $\tau_j(t)$ 可微，且存在常数 $\alpha \in (0, 1)$ 以及连续函数 $h_i(t): [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$，$i = 1, 2, \cdots, N$，使得对 $t \geqslant 0$，

(i) $h(s) = \sum_{i=1}^{N} h_i(s)$ 和 $\underline{\lim}_{t\to\infty}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s > -\infty$.

(ii) $\sum_{i=1}^{N}\left(\int_{t-\tau_i(t)}^{t} \mid h_i(s) \mid \mathrm{d}s\right) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu} \mid \sum_{i=1}^{N}(h_i(s-\tau_i(s))(1-\tau'_i(s)) - b_i(s)) \mid \mathrm{d}s +$
$\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu} \mid h(s) \mid (\sum_{i=1}^{N}\int_{s-\tau_i(s)}^{s} \mid h_i(\mu) \mid \mathrm{d}\mu)\mathrm{d}s \leqslant \alpha$.

则系统(4)的零解渐近稳定的充分必要条件是

(iii) 当 $t \to \infty$ 时，$\int_0^t h(s)\mathrm{d}s \to \infty$.

注 4　推论 3 没有要求 $t - \tau_i(t)$ 存在反函数，一定程度上改进了引理 2 的结论.

注 5　在推论 3 中可以根据时滞的特点分别引进对应的连续函数 $h_i(s)$，$i = 1, 2, \cdots, N$，这样使得不动点方法的运用更加灵活，也很大程度改进和推广了引理 2 的结论.

定理 1 的证明　定义集合 $S = \{x \mid x \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})\}$，满足当 $s \in [m(0), 0]$ 时，$\psi(s) = \varphi(s)$. 定义范数

$$\| \psi(t) \| = \sup_{s \geqslant m_0} \mid \psi(s) \mid$$

满足当 $t \to \infty$ 时，$\| \psi(t) \| \to 0$.

定义算子 $\Psi: S \longrightarrow S$ 如下：

(Ⅰ) 当 $t \in [m(0), 0]$ 时，$(\Psi\varphi)(t) = \varphi(t)$；

(Ⅱ) 当 $t \geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned}(\Psi\varphi)(t) = &\left(\varphi(0) - \sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(0)}^{0} h_i(s)\varphi(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\int_0^t h(\mu)\mathrm{d}\mu} + \sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(t)}^{t} h_i(s)\varphi(s)\mathrm{d}s + \\ &\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}(h_i(g_i(s))g'_i(s) + a_i(s))\varphi(g_i(s))\mathrm{d}s - \\ &\int_0^t h(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(s)}^{s} h_i(\nu)\varphi(\nu)\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}s + \\ &\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{g_0(s)}^{s} q_1(\nu, s, \varphi(\nu))\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{5} I_j(t)\end{aligned} \tag{5}$$

首先证明 Ψ 在 $[0, \infty)$ 上是连续的.

令 $\varphi \in S$，$t_1 \geqslant 0$，$\mid \lambda \mid$ 充分小，则

$$|(\Psi\varphi)(t_1+\lambda)-(\Psi\varphi)(t_1)|^2 \leqslant 5\sum_{j=1}^{5}|I_j(t_1+\lambda)-I_j(t_1)|^2$$

由条件 (ⅱ) 易证，当 $\lambda \to 0$ 时，

$$|I_j(t_1+\lambda)-I_j(t_1)|^2 \to 0 \qquad i=1,2,3,4,5$$

即

$$|(\Psi\varphi)(t_1+\lambda)-(\Psi\varphi)(t_1)|^2 \longrightarrow 0$$

其次证明 $\Psi(S)\subset S$.

因为

$$|(\Psi\varphi)(t)|^2 \leqslant 5\sum_{j=1}^{5}|I_j(t)|^2$$

显然，当 $t\to\infty$ 时，$|I_1(t)|^2 \to 0$. 由于当 $t\to\infty$ 时，$g_i(t)\to\infty$ 且 $\|\varphi(t)\|\to 0$. 所以对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T_1>0$ 使得 $s\geqslant T_1$，包含 $|\varphi(s)|^2<\varepsilon$ 和 $|\varphi(g(s))|^2<\varepsilon$，从而当 $t\to\infty$ 时，$|I_2(t)|^2\to 0$.

同时，由条件 (ⅱ) 有，

$$\begin{aligned}|I_3(t)|^2 \leqslant{}& 2\left|\int_0^{T_1} e^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\sum_{i=1}^{n}(h_i(g_i(s))g'_i(s)+a_i(s))\varphi(g_i(s))\mathrm{d}s\right|^2+\\ &2\left|\int_{T_1}^{t} e^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\sum_{i=1}^{n}(h_i(g_i(s))g'_i(s)+a_i(s))\varphi(g_i(s))\mathrm{d}s\right|^2\leqslant\\ &2\left|\int_0^{T_1} e^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\sum_{i=1}^{n}(h_i(g_i(s))g'_i(s)+a_i(s))\varphi(g_i(s))\mathrm{d}s\right|^2+2\alpha\varepsilon\end{aligned}$$

由条件 (ⅱ) 和 (ⅲ) 知，存在 $T_2\geqslant T_1$ 使得当 $t\geqslant T_2$ 时，有

$$2\left|\int_0^{T_1} e^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\sum_{i=1}^{m}(h_i(g_i(s))g'_i(s)+a_i(s))\varphi(g_i(s))\mathrm{d}s\right|^2<\varepsilon \tag{6}$$

从而

$$|I_3(t)|^2<\varepsilon+2\alpha\varepsilon<3\varepsilon$$

因此当 $t\to\infty$ 时，

$$|I_3(t)|^2\to 0$$

类似地，当 $t\to\infty$ 时，$|I_4(t)|^2\to 0$. 同时，由条件(2) 易得，当 $t\to\infty$ 时，$|I_5(t)|^2\to 0$. 这样就证明了 $\Psi(S)\subset S$.

最后证明 Ψ 是压缩的.

由条件 (ⅱ) 易知，对任意 $\varphi,\psi\in S$ 有

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[0,t]}|(\Psi\varphi)(s)-(\Psi\psi)(s)|^2 \leqslant{}& \sup_{s\in[0,t]}|\varphi(s)-\psi(s)|^2\sup_{s\in[0,t]}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(s)}^{s}|h_i(\nu)|\mathrm{d}\nu+\\ &\int_0^s e^{-\int_\nu^s h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left|\sum_{i=1}^{n}(h_i(g_i(s))g'_i(s)+a_i(s))\right|\mathrm{d}\nu+\int_0^s e^{-\int_\nu^s h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{g_0(\nu)}^{\nu}|C(\nu,\theta)|\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\nu+\\ &\int_0^s|h(\nu)|e^{-\int_\nu^s h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{g_i(\nu)}^{\nu}|h_i(\theta)|\mathrm{d}\theta\right)\right]\mathrm{d}\nu\Big\}\leqslant\alpha\sup_{s\in[0,t]}|\varphi(s)-\psi(s)|^2\end{aligned} \tag{7}$$

从而由(7) 式可得 Ψ 是压缩的. 因此，由压缩映射原理知，Ψ 在空间 S 中有唯一不动点 $x(t)$，它是系统(1) 的解，而且当 $t\to\infty$ 时，$|x(t)|^2\to 0$.

为了证明渐近稳定性，还需证系统(1) 的零解是稳定的. 对任意给定的 $\varepsilon>0$ 选择 $\delta>0(\delta<\varepsilon)$ 满足

$$\delta\left[1+\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(0)}^{0}|h_i(s)|\mathrm{d}s\right]^2 e^{-2\int_s^{t^*}h(\mu)\mathrm{d}\mu}<\varepsilon$$

设 $x(t)$ 是系统(1) 的解，且 $\|\varphi\|^2<\delta$，则 $x(t)=(\Psi x)(t)$. 其中算子 Ψ 由(5) 式定义. 可以证明，当 $t\geqslant 0$ 时，有 $|x(t)|^2<\varepsilon$.

事实上，注意到对 $t\in[m(0),0]$ 有 $|x(t)|^2<\varepsilon$. 假设存在 t^* 使得 $|x(t^*)|^2=\varepsilon$ 而且当 $m(0)\leqslant s<t^*$，$|x(s)|^2<\varepsilon$. 则有

$$
\begin{aligned}
|x(t^*)|^2\leqslant{}&\|\varphi\|\left[1+\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{g_i(0)}^{0}|h_i(s)|\mathrm{d}s\right)\right]^2\mathrm{e}^{-2\int_0^{t^*}h(\mu)\mathrm{d}\mu}+\\
&\varepsilon\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(t)}^{t}|h_i(s)|\mathrm{d}s+\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left|\sum_{i=1}^{n}(h_i(g_i(s))g'_i(s)+a_i(s))\right|\mathrm{d}s+\right.\\
&\left.\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{g_0(s)}^{s}|C(s,v)|\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s+\int_0^t|h(s)|\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{g_i(s)}^{s}|h_i(v)|\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}s\right\}^2\leqslant\\
&(1+L)\delta\left[1+\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{g_i(0)}^{0}|h_i(s)|\mathrm{d}s\right)\right]^2\mathrm{d}^{-2\int_0^{t^*}h(\mu)\mathrm{d}\mu}<\varepsilon
\end{aligned}\tag{8}
$$

这样产生矛盾，从而证明了当条件 (iii) 成立时系统(1) 的零解是渐近稳定的. 下面证必要性.

用反证法，假设系统(1) 的零解渐近稳定但条件 (iii) 不成立，则由条件 (i)，存在 $\beta\in\mathbb{R}$ 和序列 $\{t_n\}$，$t_n\to\infty(n\to\infty)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{t_n}h(s)\mathrm{d}s=\beta$$

不妨选择正常数 P 满足

$$-P\leqslant\int_0^{t_n}h(s)\mathrm{d}s\leqslant P\qquad n\geqslant 1$$

为了方便，对 $S\geqslant 0$，定义

$$F(s)=\left|\sum_{i=1}^{n}(h_i(g_i(s))g'_i(s)+a_i(s))\right|+\int_{g_0(s)}^{s}|C(s,v)|\mathrm{d}v+|h(s)|\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{g_i(s)}^{s}|h_i(v)|\mathrm{d}v\right)\right]$$

则由条件 (ii) 有

$$\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\int_0^s h(\mu)\mathrm{d}\mu}F(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha\mathrm{e}^{\int_0^{t_n}h(\mu)\mathrm{d}\mu}<\mathrm{e}^P$$

从而序列 $\left\{\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\int_0^s h(\mu)\mathrm{d}\mu}F(s)\mathrm{d}s\right\}$ 单调有界，因此存在收敛子列. 为简单起见，假定

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\int_0^s h(\mu)\mathrm{d}\mu}F(s)\mathrm{d}s=\beta>0$$

选择充分大的正整数 k，使得对任意 $n\geqslant k$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_k}^{t_n}\mathrm{e}^{\int_0^s h(\mu)\mathrm{d}\mu}F(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\delta_0}{4B}$$

其中 $B=\sup\limits_{t\geqslant 0}\mathrm{e}^{-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}$，$\delta_0>0$ 满足 $4\delta_0 B\mathrm{e}^P+\alpha<1$.

考虑系统(1) 的解 $x(t)=x(t,t_k,\varphi)$，初始条件满足

$$|\varphi(t_k)|^2=\delta_0,\ |\varphi(s)|^2<\delta_0\qquad s\leqslant t_k$$

由渐近稳定性，假设 $|x(t)|^2<1$，$t\geqslant t_k$，选择 φ 使得

$$Q(t_k):=\varphi(t_k)-\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(t_k)}^{t_k}h_i(s)\varphi(s)\mathrm{d}s\geqslant\delta_0$$

由(6) 式和 $x(t)=(\Psi x)(t)$，$t\geqslant t_k$，得

$$|x(t_n)-\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(t_n)}^{t_n}h_i(s)x(s)\mathrm{d}s|^2\geqslant$$

$$Q(t_k)\mathrm{e}^{-\int_{t_k}^{t_n}h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left\{Q(t_k)\mathrm{e}^{-\int_{t_k}^{t_n}h(\mu)\mathrm{d}\mu}-2\int_{t_k}^{t_n}\mathrm{e}^{-\int_{s}^{t_n}h(\mu)\mathrm{d}\mu}F(s)\mathrm{d}s\right\}\geqslant$$

$$\delta_0\mathrm{e}^{-\int_{t_k}^{t_n}h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left\{\delta_0\mathrm{e}^{-\int_{t_k}^{t_n}h(\mu)\mathrm{d}\mu}-2\int_{t_k}^{t_n}\mathrm{e}^{-\int_{s}^{t_n}h(\mu)\mathrm{d}\mu}F(s)\mathrm{d}s\right\}\geqslant\frac{1}{2}\delta_0\mathrm{e}^{-2\int_{t_k}^{t_n}h(\mu)\mathrm{d}\mu}\geqslant\frac{1}{2}\delta_0\mathrm{e}^{-2P}>0 \tag{9}$$

另一方面,因为系统(1)的零解均方渐近稳定,所以当 $t\to\infty$ 时,

$$|x(t)|^2=|x(t,t_k,\varphi)|^2\to 0$$

又由条件(ii)以及 $t_n\to\infty$ 时 $g(t_n)\to\infty(n\to\infty)$,从而可得当 $n\to\infty$ 时

$$|x(t_n)-\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(t_n)}^{t_n}h_i(s)x(s)\mathrm{d}s|^2\to 0$$

这与(9)式矛盾.故条件(iii)是系统(1)的零解渐近稳定的必要条件.证毕.

2 实 例

例1 考虑积分微分动力系统

$$\mathrm{d}x(t)=-(\frac{1}{2}+\cos t)\cdot x(t)\mathrm{d}t+\left(\int_0^t\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2(t-s)}x(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \qquad t\geqslant 0 \tag{10}$$

如果在推论2中取 $h(t)=0.5+\cos t$,系统(10)零解渐近稳定.

证 事实上,易证推论2的条件(i)满足.其次因为

$$\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t(0.5+\cos\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_0^s\left|\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2(s-\nu)}\right|\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}s=\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-(0.5t+\sin t)}\int_0^t\mathrm{e}^{0.5s+\sin s}(1-\mathrm{e}^{-2s})\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-(0.5t-1)}\int_0^t\mathrm{e}^{0.5s+1}(1-\mathrm{e}^{-2s})\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-(0.5t-1)}\int_0^t\mathrm{e}^{0.5s+1}\mathrm{d}s\leqslant\frac{\mathrm{e}^2}{8}<1$$

再者,当 $t\to\infty$ 时,

$$\int_0^t h(s)\mathrm{d}s=\int_0^t(0.5+\cos s)\mathrm{d}s\to\infty$$

所以,推论2的条件均满足,所以由推论2的结论知,系统(10)的零解渐近稳定.

注6 因为不满足 $A(t)=-(0.5+\cos t)\leqslant 0$,所以由引理1得不到系统(10)零解的渐近稳定性.由例1易得,推论2很大程度上改进了引理1的结果.

例2 考虑多时滞微分动力系统

$$\mathrm{d}x(t)=-\frac{1}{10+6t}x(t-0.4t)\mathrm{d}t-\frac{1}{15+6t}x(t-0.6t)\mathrm{d}t \qquad t\geqslant 0 \tag{11}$$

由推论3知,该系统零解渐近稳定.

证 在推论3中选择 $h_1(t)=h_2(t)=\dfrac{1}{6+6t}$,则有

$$h(t)=\frac{1}{3+3t}$$

且当 $t\geqslant 0$ 时,

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\int_{t-\tau_i(t)}^{t}|h_i(s)|\mathrm{d}s\right)=\int_{0.6t}^{t}\frac{1}{6+6s}\mathrm{d}s+\int_{0.4t}^{t}\frac{1}{6+6s}\mathrm{d}s\to\frac{1}{6}(2\ln 5-\ln 3-\ln 2)=0.237\ 853$$

$$\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}|h(s)|(\sum_{i=1}^{2}\int_{s-\tau_i(s)}^{s}|h_i(\mu)|\mathrm{d}\mu)\mathrm{d}s\leqslant 0.237\ 853$$

$$\left|\sum_{i=1}^{2}(h_i(s-\tau_i(s))(1-\tau'_i(s))-b_i(s))\right|=0$$

易知，

$$\int_0^\infty h(s)\mathrm{d}s=\infty$$

令

$$\alpha=0.237\ 853+0.237\ 853=0.475\ 705<1$$

则由推论 3 知，系统(11) 零解均方渐近稳定.

注 7　易知由引理 2 不可以得到系统(11) 零解的均方渐近稳定性.

事实上，$b_1(t)=\dfrac{1}{10+6t}$，$b_2(t)=\dfrac{1}{15+6t}$，$t-0.4t$ 和 $t-0.6t$ 的反函数分别为$\dfrac{5t}{3}$ 和$\dfrac{5t}{2}$. 则

$$b_1(g_1(t))=\frac{1}{10+10t}\qquad b_2(g_2(t))=\frac{1}{15+15t}$$

且

$$Q(t)=\frac{1}{6+6t}$$

当 $t\to\infty$ 时，

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{t-\tau_i(t)}^{t}|b_i(g_i(s))|\mathrm{d}s=\int_{0.6t}^{t}\frac{1}{10+10s}\mathrm{d}s+\int_{0.4t}^{t}\frac{1}{15+15s}\mathrm{d}s\to$$

$$\frac{1}{10}(\ln5-\ln3)+\frac{1}{15}(\ln5-\ln2)=0.112\ 169$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t Q(\mu)\mathrm{d}\mu}|Q(s)|\int_{s-\tau_i(s)}^{s}|b_i(g_i(\mu))|\mathrm{d}\mu\mathrm{d}s\to0.112\ 169$$

$$\sum_{i=1}^{2}|b_i(s)||\tau'_i(s)|=\frac{2}{5}\times\frac{1}{10+6s}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{15+6s}\to\frac{1}{6+6s}$$

所以，当 $t\to\infty$ 时，

$$\theta=\sum_{i=1}^{2}\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t Q(\mu)\mathrm{d}\mu}|b_i(s)||\tau'_i(s)|\mathrm{d}s\to\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t\frac{1}{6+6\mu}\mathrm{d}\mu}\left(\frac{1}{6+6s}\right)\mathrm{d}s\to1$$

上面的证明可以得出，

$$0.112\ 169+0.112\ 169+1=1.224\ 337>1$$

不满足引理 2 的条件. 所以由引理 2 不能得出系统(11) 的零解均方渐近稳定性.

3　结　论

通过本文的研究，得出如下结论：

1) 不动点方法较传统的李雅普诺夫直接法有一定的优越性.

2) 文章在构造映射算子时，根据多时滞动力系统时滞的特点，分别引入不同的对应函数 $h_i(s)$，$i=1,2,\cdots,n$，然后利用这 n 个函数来构造算子，再利用 Banach 不动点方法来研究随机动力系统的稳定性，推广和改进了前人研究的结果.

参考文献：

[1]　王全义. 一类 Volterra 型积分微分方程的稳定性 [J]. 华侨大学学报(自然科学版)，1998，19(1)：1-5.

[2]　ZHANG B. Fixed Points and Stability in Differential Equations with Variable Delays [J]. Nonlinear Analysis，2005，63(5-7)：e233-e242.

[3] LUO J W. Fixed Points and Stability of Neutral Stochastic Delay Differential Equations [J]. J Math Anal Appl, 2007, 334(1): 431-440.

[4] WU M, HUANG N J, ZHAO C W. Fixed Points and Stability in Neutural Stochastic Differential Equations with Variable Delays [J]. Hindawi Pubilishing Corporation Fixed Points Theory and Applications, 2008, 2008: 1-11.

[5] 黄家琳,牟天伟. 离散时滞脉冲微分动力系统的指数稳定性判据 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(6): 87-91.

[6] 王春生,李永明. 中立型多变时滞随机微分方程的稳定性 [J]. 山东大学学报(理学版), 2015, 50(5): 82-87.

[7] 王春生,李永明. 三类不动点与一类随机动力系统的稳定性 [J]. 控制理论与应用, 2017, 34(5): 677-682.

[8] 王春生,丁 红. 不动点和一类非线性随机动力系统的稳定性 [J]. 山东理工大学学报(自然科学版), 2017, 31(5): 24-28.

[9] 王春生,莫 迟. 不动点与一类随机积分微分方程的稳定性 [J]. 广州大学学报(自然科学版), 2009, 8(2): 49-52.

[10] 王春生. 中立型随机积分微分方程的稳定性 [J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2011, 24(1): 41-43.

[11] 王春生. 随机微分方程稳定性的两种不动点方法的比较 [J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2012, 25(4): 81-84.

[12] 王春生. 不动点与非卷积型随机 Vollterra 微分方程的稳定性 [J]. 荆楚理工学院学报, 2011, 26(2): 30-33.

Stability of Volterra Type Dynamic Systems with Time-Varying Delays

WANG Chun-sheng[1], LI Yong-ming[2]

1. *Department of Management, South China Institute of Software Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510990, China;*
2. *School of Mathematics & Computer Science, Shangrao Normal University, Shangrao Jiangxi 334001, China*

Abstract: In this paper, a class of dynamic Integro differential dynamical systems with time-varying delays is discussed. The necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of the zero solution of the system are obtained by using the fixed point method. Some continuous functions $h_i(s)$, $i=1,2,\cdots,n$ are introduced according to the characteristics of the dynamic system with delays, and then these functions are used to construct the operator. Finally, the Banach fixed point method is used to study the stability of the dynamic system.

Key words: Banach fixed point; asymptotically stable; Volterra integrodifferential dynamic system; time-varying delay

责任编辑 张 枸