第 41 卷第 7 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2019 年 7 月
Vol. 41　No. 7　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jul.　2019

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.07.010

# O-U 过程下具有不确定执行价格的领子期权定价①

高新羽[1,2]，　刘丽霞[1]

1. 河北师范大学 数学与信息科学学院，石家庄 050024；2. 石家庄财经职业学院 基础教育学院，石家庄 050061

**摘要**：假设股票价格遵循广义 O-U(Ornstein-Uhlenback)过程，执行价格为不确定执行价格并服从几何分数布朗运动，利用拟鞅和测度变换的方法，得到该模型下领子期权定价公式并进行数值分析. 该结果推广了常数参数下领子期权的结果，为金融衍生品创新提供了更多的理论依据.

**关　键　词**：O-U 过程；不确定执行价格；分数布朗运动；领子期权；拟鞅

**中图分类号**：**O211.6**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673－9868(2019)07－0070－07

自期权诞生至今，一直是广受欢迎的风险控制工具[1-2]，其中领子期权[3-11]备受关注. 本文采用时变参数并假设股票价格服从 O-U 过程，为进一步降低金融市场的风险与不确定性，与具有不确定性执行价格的期权相结合并假设执行价格服从几何分数布朗运动，利用随机微分方程和拟鞅的方法，得到时变参数下基于 O-U 过程具有不确定执行价格的领子期权定价公式. 最后对常数参数下基于 O-U 过程具有不确定执行价格的领子期权定价公式进行数值分析，得到相应结论.

## 1　预备知识

假设市场满足 B-S 模型的条件，即市场是均衡的、完备的且无套利机会的，市场存在两种资产：一种是无风险资产，如债券；另一种是风险资产，如股票.

**定义 1**　领子期权在 $T$ 时刻收益为

$$S(T)+\max(K_1(T)-S(T),0)-\max(S(T)-K_2(T),0)=$$
$$\max(S(T)-K_1(T),0)-\max(S(T)-K_2(T),0)+K_1(T)$$

假设股票价格 $S(t)$ 服从广义 O-U 过程

$$\mathrm{d}S(t)=(\mu(t)-\alpha\ln S(t))S(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)S(t)\mathrm{d}B(t) \tag{1}$$

其中：$\sigma(t)$ 为股票瞬时波动率，$\alpha$ 为常数，$B(t)$ 为布朗运动.

满足(1)式的解为

$$S(t)=S(0)^{\mathrm{e}^{-\alpha t}}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha u}(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha u}\sigma(u)\mathrm{d}B(u)} \tag{2}$$

假设执行价格 $K_1(t)$，$K_2(t)$ 分别服从

$$\mathrm{d}K_1(t)=a_1(t)K_1(t)\mathrm{d}t+b_1(t)K_1(t)\mathrm{d}B_H(t) \tag{3}$$

$$\mathrm{d}K_2(t)=a_2(t)K_2(t)\mathrm{d}t+b_2(t)K_2(t)\mathrm{d}B_H(t) \tag{4}$$

其中：$a_1(t)$，$a_2(t)$，$b_1(t)$，$b_2(t)$ 为关于时间的确定性函数；$B_H(t)$ 为分数布朗运动，Hurst 参数为 $H\in$

---

① 收稿日期：2017－06－25

基金项目：国家自然科学基金项目(11501164)；河北省教育厅重点基金项目(ZD2018065).

作者简介：高新羽(1992－)，女，硕士，主要从事金融工程与风险管理问题的研究.

通信作者：刘丽霞，教授，博士研究生导师.

$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$且与布朗运动$B(t)$相互独立. 本文中若无特殊说明, 则分数布朗运动中Hurst参数$H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$并且记

$$\phi(u, v)=H(2H-1)|u-v|^{2H-2}$$

$$|f|_{\phi}^{2}=: \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(u) f(v) \phi(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

$$L_{\phi}^{2}=\{f \mid |f|_{\phi}^{2}<+\infty\}$$

满足(3),(4)式的解为

$$K_1(t)=K_1(0) \mathrm{e}^{\int_0^t a_1(u) \mathrm{d}u+\int_0^t b_1(u) \mathrm{d}B_H(u)-\frac{1}{2}|b_1|_{\phi, t}^2} \tag{5}$$

$$K_2(t)=K_2(0) \mathrm{e}^{\int_0^t a_2(u) \mathrm{d}u+\int_0^t b_2(u) \mathrm{d}B_H(u)-\frac{1}{2}|b_2|_{\phi, t}^2} \tag{6}$$

其中: $|b_i|_{\phi, t}^2=\int_0^t\int_0^t b_i(u) b_i(v) \phi(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$, $\phi(u, v)=H(2H-1)|u-v|^{2H-2}(u, v \in \mathbb{R}, i=1,2)$.

**引理1**[12] 假设$B_{H_1}(t)$是概率空间$(\Omega_{H_1}, \mathscr{F}_T^{H_1}, \{\mathscr{F}_t^{H_1}\}, P_{H_1})$上Hurst参数为$H_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$的分数布朗运动, $Z_{H_2}(t)$是概率空间$(\Omega_{H_2}, \mathscr{F}_T^{H_2}, \{\mathscr{F}_t^{H_2}\}, P_{H_2})$上Hurst参数为$H_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$的分数布朗运动. $B_{H_1}(t), Z_{H_2}(t)$相互独立. $(\Omega, \mathscr{F}_T, \{\mathscr{F}_t\}, P)=(\Omega_{H_1} \otimes \Omega_{H_2}, \mathscr{F}_T^{H_1} \otimes \mathscr{F}_T^{H_2}, \{\mathscr{F}_t^{H_1}\} \otimes \{\mathscr{F}_t^{H_2}\}, P_{H_1} \otimes P_{H_2})$表示积空间, 设$\sigma_B(v)$, $\sigma_Z(v)$为$[0, T]$上的连续函数,

$$X(u)=\int_0^u \sigma_B(v) \mathrm{d}B_{H_1}(v)+\int_0^u \sigma_Z(v) \mathrm{d}Z_{H_2}(v)$$

函数$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$满足$E_P[f(X(T))]<\infty$, 则对于任意$t \leqslant T$, 有

$$\widetilde{E}_P^t[f(X(T))]=\int_R \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t, T)} \mathrm{e}^{-\frac{(u-X(t))^2}{2\sigma^2(t, T)}} f(u) \mathrm{d}u$$

其中

$$\sigma^2(t, T)=\begin{cases} \int_t^T \sigma_B{}^2(u) \mathrm{d}u+|\sigma_Z|_{\phi_2, T}^2-|\sigma_Z|_{\phi_2, t}^2 & H_1=\frac{1}{2}, H_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ |\sigma_B|_{\phi_1, T}^2-|\sigma_B|_{\phi_1, t}^2+|\sigma_Z|_{\phi_2, T}^2-|\sigma_Z|_{\phi_2, t}^2 & H_1, H_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

$$\phi_i(u, v)=H_i(2H_i-1)|u-v|^{2H_i-2}, i=1,2$$

**引理2**[12] 在引理1的条件下有

$$\widetilde{E}_P^t[1_{\{X(T)>M\}}]=N\left(\frac{X(t)-M}{\sigma(t, T)}\right)$$

其中$M$为一常数, $\widetilde{E}_P^t$为拟条件期望, $N(\cdot)$为正态分布累积函数.

**引理3**[12] 设$f$为$\mathbb{R}$上的有界函数,

$$\Lambda(u)=\mathrm{e}^{X(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(0, u)}$$

其中$X(u)$, $\sigma^2(0, u)$见引理1, 则存在测度$Q=Q_{H_1} \otimes Q_{H_2}$使得

$$\widetilde{E}_P^t\left[\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)} f(X(T))\right]=\widetilde{E}_Q^t[f(X(T))]$$

且

$$\widetilde{B}_{H_1(t)}=\begin{cases} B_{H_1(t)}-\int_0^t \sigma_B(u) \mathrm{d}u & H_1=\frac{1}{2} \\ B_{H_1(t)}-2\int_0^t\int_0^v \sigma_B(u) \phi_1(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v & H_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

是 $Q_{H_1}$ 上 Hurst 参数为 $H_1$ 的分数布朗运动；

$$\widetilde{Z}_{H_2}(t)=Z_{H_2}(t)-2\int_0^t\int_0^v\sigma_Z(u)\phi_2(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

是 $Q_{H_2}$ 上 Hurst 参数为 $H_2$ 的分数布朗运动.

**引理 4**[13]　对于任意 $0<t<T$ 和 $\lambda\in\mathbb{C}$ 有

$$\widetilde{E}_P^t[\mathrm{e}^{\lambda\int_0^T f(s)\mathrm{d}B_H(s)}]=\mathrm{e}^{\lambda\int_0^t f(s)\mathrm{d}B_H(s)+\frac{\lambda^2}{2}(|f|_{\phi,T}^2-|f|_{\phi,t}^2)}$$

## 2　基于 O-U 过程具有不确定执行价格的领子期权定价

**定理 1**　设 $S(t)$,$K_1(t)$,$K_2(t)$ 分别服从 SDE(1),(2),(3)，则到期日为 $T$、时变参数下基于 O-U 过程具有不确定执行价格的领子期权在期满前任意时刻 $t$ 的价格为

$$f(S_t,t)=S(t)^{\mathrm{e}^{-\alpha\tau}}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_t^T\mathrm{e}^{\alpha u}(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))\mathrm{d}u-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_t^T\mathrm{e}^{2\alpha u}\sigma^2(u)\mathrm{d}u}\cdot$$

$$(N(d_1)-N(d_3))+K_1(t)\mathrm{e}^{\int_t^T(a_1(u)-r(u))\mathrm{d}u}N(-d_2)+K_2(t)\mathrm{e}^{\int_t^T(a_2(u)-r(u))\mathrm{d}u}N(d_4)$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\frac{S(t)^{\mathrm{e}^{-\alpha\tau}}}{K_1(t)}-\int_t^T a_1(u)\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_t^T\mathrm{e}^{\alpha u}(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))\mathrm{d}u+\frac{1}{2}(|b_1|_{\phi,T}^2-|b_1|_{\phi,t}^2)+\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_t^T\mathrm{e}^{2\alpha u}\sigma^2(u)\mathrm{d}u}{\sigma_1(t,T)}$$

$$d_3=\frac{\ln\frac{S(t)^{\mathrm{e}^{-\alpha\tau}}}{K_2(t)}-\int_t^T a_2(u)\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_t^T\mathrm{e}^{\alpha u}(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))\mathrm{d}u+\frac{1}{2}(|b_2|_{\phi,T}^2-|b_2|_{\phi,t}^2)+\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_t^T\mathrm{e}^{2\alpha u}\sigma^2(u)\mathrm{d}u}{\sigma_2(t,T)}$$

$$d_2=d_1-\sigma_1(t,T),\ d_4=d_3-\sigma_2(t,T)$$

$$\sigma_i^2(t,T)=|b_i|_{\phi,T}^2-|b_i|_{\phi,t}^2+\mathrm{e}^{-2\alpha T}\int_t^T\mathrm{e}^{2\alpha u}\sigma^2(u)\mathrm{d}u,\ i=1,2$$

$$\phi(s,t)=H(2H-1)|s-t|^{2H-2},\ \tau=T-t$$

**证**　由风险中性定价原理知

$$\begin{aligned}f(S(t),t)=&\widetilde{E}_P^t[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}[\max(S(T)-K_1(T),0)-\max(S(T)-K_2(T),0)+K_1(T)]]=\\&\widetilde{E}_P^t[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}(S(T)-K_1(T))1_{\{S(T)>K_1(T)\}}]-\widetilde{E}_P^t[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}(S(T)-K_2(T))\cdot\\&1_{\{S(T)>K_2(T)\}}]+\widetilde{E}_P^t[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}K_1(T)]=\\&\widetilde{E}_P^t[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}S(T)1_{\{S(T)>K_1(T)\}}]-\widetilde{E}_P^t[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}K_1(T)1_{\{S(T)>K_1(T)\}}]-\\&\widetilde{E}_P^t[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}S(T)1_{\{S(T)>K_2(T)\}}]+\widetilde{E}_P^t[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}K_2(T)1_{\{S(T)>K_2(T)\}}]+\\&\widetilde{E}_P^t[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}K_1(T)]=:\\&I_1+I_2+I_3+I_4+I_5\end{aligned}\tag{7}$$

下分别计算 $I_1$,$I_2$,$I_3$,$I_4$,$I_5$. 由(2)式可知

$$\begin{aligned}I_1=&S(t)^{\mathrm{e}^{-\alpha\tau}}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_t^T\mathrm{e}^{\alpha u}(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))\mathrm{d}u-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}\cdot\\&\widetilde{E}_P^t[\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_t^T\mathrm{e}^{\alpha u}\sigma(u)\mathrm{d}B(u)}1_{\{S(T)>K_1(T)\}}]\end{aligned}\tag{8}$$

由引理 3，取 $\sigma_B(v)=\mathrm{e}^{-\alpha T}\mathrm{e}^{\alpha v}\sigma(v)$，$\sigma_Z(v)=0$，

$$\Lambda_1(u)=\mathrm{e}^{\int_0^u\mathrm{e}^{-\alpha T}\mathrm{e}^{\alpha v}\sigma(v)\mathrm{d}B(v)-\frac{1}{2}\int_t^T\mathrm{e}^{-2\alpha T}\mathrm{e}^{2\alpha v}\sigma^2(v)\mathrm{d}v}$$

存在测度 $Q_1=Q_B\otimes P_H$ 使得

$$I_1=S(t)^{e^{-\alpha\tau}}e^{e^{-\alpha T}\int_t^T e^{\alpha u}(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))du-\int_t^T r(u)du+\frac{1}{2}e^{-2\alpha T}\int_t^T e^{2\alpha u}\sigma^2(u)du}\cdot\widetilde{E}_{Q_1}^t[1_{\{S(T)>K_1(T)\}}]=$$

$$S(t)^{e^{-\alpha\tau}}e^{e^{-\alpha T}\int_t^T e^{\alpha u}(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))du-\int_t^T r(u)du+\frac{1}{2}e^{-2\alpha T}\int_t^T e^{2\alpha u}\sigma^2(u)du}\cdot Q_1(S(T)>K_1(T))\tag{9}$$

且

$$\widetilde{B}(t)=B(t)-\int_0^t e^{-\alpha T}e^{\alpha u}\sigma(u)du$$

为 $Q_B$ 下的布朗运动. 将

$$d\widetilde{B}(t)=dB(t)-e^{-\alpha T}e^{\alpha t}\sigma(t)dt$$

代入 $S(T)$ 有

$$S(T)=S(t)^{e^{-\alpha\tau}}e^{e^{-\alpha T}\int_t^T e^{\alpha u}(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))du+e^{-2\alpha T}\int_t^T e^{2\alpha u}\sigma^2(u)du+e^{-\alpha T}\int_t^T e^{\alpha u}\sigma(u)d\widetilde{B}(u)}\tag{10}$$

则

$$\begin{aligned}&S(T)>K_1(T)\Leftrightarrow\\&S(t)^{e^{-\alpha\tau}}e^{e^{-\alpha T}\int_t^T e^{\alpha u}(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))du+e^{-2\alpha T}\int_t^T e^{2\alpha u}\sigma^2(u)du+e^{-\alpha T}\int_t^T e^{\alpha u}\sigma(u)d\widetilde{B}(u)}>\\&K_1(t)e^{\int_t^T a_1(u)du+\int_t^T b_1(u)dB_H(u)-\frac{1}{2}(|b_1|_{\phi,T}^2-|b_1|_{\phi,t}^2)}\Leftrightarrow\\&e^{-\alpha T}\int_t^T e^{\alpha u}\sigma(u)d\widetilde{B}(u)-\int_t^T b_1(u)dB_H(u)>-d_1\sigma_1(t,T)\end{aligned}\tag{11}$$

令

$$X_1(v)=e^{-\alpha T}\int_0^v e^{\alpha u}\sigma(u)d\widetilde{B}(u)-\int_0^v b_1(u)dB_H(u),\ M_1=-d_1\sigma_1(t,T)+X_1(t)$$

则由(11)式可知

$$S(T)>K_1(T)\Leftrightarrow X_1(T)>M_1$$

由引理2,取 $\sigma_B(v)=e^{-\alpha T}e^{\alpha v}\sigma(v)$,$\sigma_Z(v)=-b_1(v)$ 有

$$Q_1(S(T)>K_1(T))=N\left(\frac{X_1(t)-M_1}{\sigma_1(t,T)}\right)=N(d_1)\tag{12}$$

此时

$$I_1=S(t)^{e^{-\alpha\tau}}e^{e^{-\alpha T}\int_t^T e^{\alpha u}(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))du-\int_t^T r(u)du+\frac{1}{2}e^{-2\alpha T}\int_t^T e^{2\alpha u}\sigma^2(u)du}N(d_1)\tag{13}$$

同理可得

$$I_3=-S(t)^{e^{-\alpha\tau}}e^{e^{-\alpha T}\int_t^T e^{\alpha u}(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))du-\int_t^T r(u)du+\frac{1}{2}e^{-2\alpha T}\int_t^T e^{2\alpha u}\sigma^2(u)du}N(d_3)\tag{14}$$

由(5)式可知

$$I_2=-K_1(t)e^{\int_t^T(a_1(u)-r(u))du}\cdot\widetilde{E}_P^t[e^{\int_t^T b_1(u)dB_H(u)-\frac{1}{2}(|b_1|_{\phi,T}^2-|b_1|_{\phi,t}^2)}1_{\{S(T)>K_1(T)\}}]\tag{15}$$

由引理3,取 $\sigma_B(v)=0$,$\sigma_Z(v)=b_1(v)$,

$$\Lambda_2(u)=e^{\int_0^u b_1(v)dB_H(v)-\frac{1}{2}|b_1|_{\phi,u}^2}$$

存在测度 $Q_2=P_B\otimes Q_H$ 使得

$$I_2=-K_1(t)e^{\int_t^T(a_1(u)-r(u))du}\cdot\widetilde{E}_{Q_2}^t[1_{\{S(T)>K_1(T)\}}]=$$

$$-K_1(t)e^{\int_t^T(a_1(u)-r(u))du}\cdot Q_2(S(T)>K_1(T))\tag{16}$$

且

$$\widetilde{B}_H(t)=B_H(t)-2\int_0^t\int_0^v b_1(u)\phi(u,v)du\,dv\tag{17}$$

是 $Q_H$ 下分数布朗运动，将

$$d\widetilde{B}_H(t)=\mathrm{d}B_H(t)-2\int_0^t b_1(u)\phi(u,t)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

代入 $K_1(T)$ 有

$$K_1(T)=K_1(t)\mathrm{e}^{\int_t^T a_1(u)\mathrm{d}u+\int_t^T b_1(u)d\widetilde{B}_H(u)+\frac{1}{2}(|b_1|_{\phi,T}^2-|b_1|_{\phi,t}^2)} \tag{19}$$

则

$$\begin{aligned}&S(T)>K_1(T)\Leftrightarrow\\&S(t)^{\mathrm{e}^{-\alpha\tau}}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_t^T \mathrm{e}^{\alpha u}(\mu(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_t^T \mathrm{e}^{\alpha u}\sigma(u)\mathrm{d}B(u)}>\\&K_1(t)\mathrm{e}^{\int_t^T a_1(u)\mathrm{d}u+\int_t^T b_1(u)d\widetilde{B}_H(u)+\frac{1}{2}(|b_1|_{\phi,T}^2-|b_1|_{\phi,t}^2)}\Leftrightarrow\\&\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_t^T \mathrm{e}^{\alpha u}\sigma(u)\mathrm{d}B(u)-\int_t^T b_1(u)\mathrm{d}\widetilde{B}_H(u)>-d_2\sigma_1(t,T)\end{aligned} \tag{20}$$

令

$$X_2(v)=\mathrm{e}^{-\alpha T}\int_0^v \mathrm{e}^{\alpha u}\sigma(u)\mathrm{d}B(u)-\int_0^v b_1(u)\mathrm{d}\widetilde{B}_H(u),\ M_2=-d_2\sigma_1(t,T)+X_2(t)$$

则由(20)式可知

$$S(T)>K_1(T)\Leftrightarrow X_2(T)>M_2$$

由引理 2，取 $\sigma_B(v)=\mathrm{e}^{-\alpha T}\mathrm{e}^{\alpha v}\sigma(v)$，$\sigma_Z(v)=-b_1(v)$ 有

$$Q_2(S(T)>K_1(T))=N\left(\frac{X_2(t)-M_2}{\sigma_1(t,T)}\right)=N(d_2) \tag{21}$$

此时

$$I_2=-K_1(t)\mathrm{e}^{\int_t^T(a_1(u)-r(u))\mathrm{d}u}N(d_2) \tag{22}$$

同理可得

$$I_4=K_2(t)\mathrm{e}^{\int_t^T(a_2(u)-r(u))\mathrm{d}u}N(d_4) \tag{23}$$

由(5)式及引理 4 可知

$$\begin{aligned}I_5=&\widetilde{E}_P^t[K_1(t)\mathrm{e}^{\int_t^T(a_1(u)-r(u))\mathrm{d}u+\int_t^T b_1(u)\mathrm{d}B_H(u)-\frac{1}{2}(|b_1|_{\phi,T}^2-|b_1|_{\phi,t}^2)}]=\\&K_1(t)\mathrm{e}^{\int_t^T(a_1(u)-r(u))\mathrm{d}u-\int_0^t b_1(u)\mathrm{d}B_H(u)-\frac{1}{2}(|b_1|_{\phi,T}^2-|b_1|_{\phi,t}^2)}\widetilde{E}_P^t[\mathrm{e}^{\int_0^T b_1(u)\mathrm{d}B_H(u)}]=\\&K_1(t)\mathrm{e}^{\int_t^T(a_1(u)-r(u))\mathrm{d}u-\int_0^t b_1(u)\mathrm{d}B_H(u)-\frac{1}{2}(|b_1|_{\phi,T}^2-|b_1|_{\phi,t}^2)}\cdot\mathrm{e}^{\int_0^t b_1(u)\mathrm{d}B_H(u)+\frac{1}{2}(|b_1|_{\phi,T}^2-|b_1|_{\phi,t}^2)}=\\&K_1(t)\mathrm{e}^{\int_t^T(a_1(u)-r(u))\mathrm{d}u}\end{aligned} \tag{24}$$

由(13),(14),(22),(23),(24)式可知定理 1 得证.

## 3　数值结果与分析

本节通过数值计算实例分析期权期限 $T$ 对常数参数下基于 O-U 过程具有不确定执行价格的领子期权定价的影响，并与 Black-Scholes 模型进行比较，得出相应结论.

由定理 1 我们可以得到，常数参数下基于 O-U 过程具有不确定执行价格的领子期权在 0 时刻的价格为

$$\begin{aligned}f(S_0,0)=&S(0)^{\mathrm{e}^{-\alpha T}}\mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha T})\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)-rT+\frac{1}{4\alpha}\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T})}(N(d_1)-N(d_3))+\\&K_1(0)\mathrm{e}^{(a_1-r)T}N(-d_2)+K_2(0)\mathrm{e}^{(a_2-r)T}N(d_4)\end{aligned}$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\dfrac{S(0)^{\mathrm{e}^{-\alpha T}}}{K_1(0)}-a_1T+\dfrac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha T})\left(\mu-\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)+\dfrac{1}{2}b_1^2T^{2H}+\dfrac{1}{2\alpha}\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T})}{\sigma_1(0,T)}$$

$$d_3=\frac{\ln\dfrac{S(0)^{\mathrm{e}^{-\alpha T}}}{K_1(0)}-a_2T+\dfrac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha T})\left(\mu-\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)+\dfrac{1}{2}b_2^2T^{2H}+\dfrac{1}{2\alpha}\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T})}{\sigma_2(0,T)}$$

$$d_2=d_1-\sigma_1(0,T),\ d_4=d_3-\sigma_2(0,T)$$

$$\sigma_i^2(0,T)=b_i^2T^{2H}+\frac{1}{2\alpha}\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T}),\ i=1,2$$

利用常数参数下基于O-U过程具有不确定执行价格的领子期权定价公式，借助MATLAB软件计算期权价格，观察期权期限T对期权价格的影响，参考文献[3]取定模型参数如下：给定当前标普500指数 $S(0)=555$ 美元，两个执行价格 $K_1(0)=525$ 美元、$K_2(0)=575$ 美元，无风险利率 $r=0.06$，波动率 $\sigma=0.15$. 依据我们通常对市场的模拟与假设分别取收益率期望 $\mu=0.2$、修正系数 $\alpha=0.005$，关于执行价格 $K_1$ 和 $K_2$ 的参数分别取 $a_1=0.04$，$a_2=0.03$，$b_1=0.1$，$b_2=0.25$，图1分析了Hurst参数 $H$ 分别取0.6，0.7，0.8，$T\in(0.5,3)$ 时交割日期 $T$ 对期权价格的影响，并与普通的B-S模型进行比较，得出相应结论.

图1表明，在B-S模型及本文建立的模型下期权价格均随期权期限 $T$ 的增长而降低. 在本文模型中，期权期限 $T$ 大约为一年，期权价格几乎不受参数 $H$ 的影响；当期权期限 $T$ 短于一年时，期权价格随参数 $H$ 增加而增加；当期权期限T长于一年时，期权价格随参数 $H$ 增加而降低，并且期权期限越长变化越明显. 除此之外，基于O-U过程具有不确定执行价格的领子期权价格低于B-S模型中的领子期权价格，即O-U过程下具有不确定执行价格的领子期权能有效地降低风险，必将受到更多投资者的喜爱并进一步占据更广泛的市场.

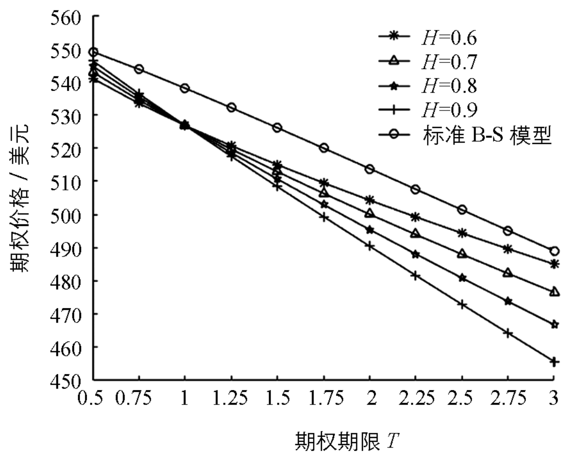


**图1 期权价格与期权期限的关系**

## 4 总 结

本文在标的资产服从O-U过程，敲定价格服从几何分数布朗运动的假设下，利用拟鞅和测度变换的方法得到了具有不确定执行价格的领子期权定价公式，O-U过程模拟了股票价格均值回归的特点，不确定执行价格降低了市场风险，也更加接近市场实际情况. 这种假设更具有现实意义，给金融衍生品创新提供了更多的理论依据.

**参考文献：**

[1] 赫尔. 期权、期货及其他衍生产品[M]. 9版. 王 勇，索吾林，译. 北京：机械工业出版社，2011.

[2] 赵 攀. 马尔科夫转换模型下的套期保值策略研究[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2017，35(5)：50-55.

[3] 张光平. 奇异期权[M]. 马晓娟，任涤新，蒋 涛，等，译. 北京：机械工业出版社，2014.

[4] 蒲冰远，唐应辉，袁 勋. 连续支付红利及有交易成本的领子期权定价模型[J]. 数学的实践与认识，2009，39(10)：37-41.

[5] 彭 斌. 基于CEV扩散模型的领子期权定价[J]. 数学的实践与认识，2013，43(22)：1-8.

[6] 岑苑君. 美式领子期权定价分析[J]. 华东师范大学学报(自然科学版)，2013(6)：40-45，56.

[7] 刘邵容，杨向群. O-U过程模型下一种回望型重置期权的定价[J]. 湖南师范大学自然科学学报，2007，30(4)：23-26.

[8] 闫召伟. O-U过程下的脆弱两值期权定价[D]. 南京：南京师范大学，2016.

[9] 符　双，薛　红．分数跳-扩散 O-U 过程下幂型期权定价［J］．哈尔滨商业大学学报(自然科学版)，2014，30(6)：758-762.
[10] 张　慈．时变布朗运动下带交易费的亚式期权定价［D］．徐州：中国矿业大学，2015.
[11] 魏广华，袁明霞，王丙均，等．随机利率下数字幂型期权的定价［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(12)：55-60.
[12] 白　婷．具有时变参数的分数布朗运动下欧式双向期权的定价[D]．石家庄：河北师范大学，2015.
[13] NECULA C．Option Pricing in a Fractional Brownian Motion Environment［J］．Mathematical Reports，2002，2(3)：259-273.

# Pricing of Collar Option with Uncertain Strike Price Based on O-U Process

GAO Xin-yu[1,2]，　LIU Li-xia[1]

*1. College of Mathematics and Information Science of Hebei Normal University，Shijiazhuang 050024，China；*

*2. Basic Education Department of Shijiazhuang Vocational College of Finance & Economics，Shijiazhuang 050061，China*

**Abstract**：In this paper，we assume that the stock price follows generalized O-U（Ornstein-Uhlenback）process，and the strike price is uncertain and follows Geometric fractional Brownian motion. Using the methods of quasi-martingale and measure transformation，we get the pricing formulas of collar options under this model and make numerical analysis. The results generalize the related results of the collar options under constant parameters，and provide more theoretical evidences for the innovation of financial derivatives.

**Key words**：O-U process；uncertain strike price；fractional Brownian motion；collar option；quasi-martingale

**责任编辑**　张　栒