

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.07.011

# 时间分数阶 Klein-Gordon 型方程的 精确解及其动力学性质<sup>①</sup>

张 慧<sup>1,2</sup>, 芮伟国<sup>1</sup>

1. 重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331; 2. 西南科技大学城市学院 通识学院, 四川 绵阳 621000

**摘要:** 利用变量分离法与齐次平衡原理相结合的方法, 对非线性时间分数阶 Klein-Gordon 型方程进行了研究, 获得了这个非线性时间分数阶偏微分方程的各类精确解, 进一步讨论了这些解的动力学性质, 并且通过图像模拟的方式直观地展示了部分精确解的动力学演化行为和动力学现象.

**关键词:** 齐次平衡法; 变量分离法; 精确解; Mittag-Leffler 函数

**中图分类号:** O175.29

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9868(2019)07-0077-06

近几十年以来, 在分数阶微积分领域涌现出了求解分数阶微分方程<sup>[1-11]</sup>的一些有效方法, 其中文献[10-11]提出了用变量分离法与齐次平衡原理以及积分分支法相结合的思想来求解时间分数阶非线性偏微分方程, 这是一种新的求解思路, 值得进一步跟踪研究.

目前, 关于分数阶 Klein-Gordon 型方程精确解的研究<sup>[12-15]</sup>还比较少. 因此, 本文将利用文献[10-11]中关于变量分离法与齐次平衡原理相结合的思想, 来研究时间分数阶 Klein-Gordon 型方程的各种精确解.

## 1 算法简介

对于下列具有一般形式的时间分数阶非线性偏微分方程:

$$D_t^\alpha u = \hat{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

其中  $D_t^\alpha$  为卡普托型微分算子或者 Riemann-Liouville 型微分算子,  $u = u(x, t)$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ ,  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . 方程(1)包含了许许多多非线性时间分数阶数学物理模型. 求解形如方程(1)的分数阶非线性偏微分方程比求解整数阶非线性偏微分方程更加困难, 因为大多数整数阶偏微分领域的求解方法不适用于分数阶偏微分方程领域, 为此需要重新设计一个新的算法. 值得一提的是, 在文献[10-11]中, 芮伟国教授率先提出了分离变量法与齐次平衡原理相结合的新方法. 下面介绍这种方法的具体操作步骤:

第 1 步: 对形如类型(1)的时间分数阶非线性偏微分方程, 将它们的解假设成下列两种形式:

$$u(x, t) = a_0 + a_1 v(x) E_{\alpha, 1}(\lambda t^\alpha) \quad (2)$$

或者

① 收稿日期: 2017-12-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(11361023, 61623020, 11601048); 重庆市科委项目(cstc2018jcyjX0766).

作者简介: 张 慧(1994-), 女, 硕士研究生, 主要从事偏微分方程的研究.

$$u(x, t) = a_0 t^{\gamma_0} + a_1 v(x) t^{\gamma_1} \quad (3)$$

其中:  $v = v(x)$  为空间变量  $x$  的待定函数,  $a_0, a_1, \lambda, \gamma_0, \gamma_1$  为待定参数且均为常数, 这些待定的函数和参数将在下一个步骤中加以确定;  $E_{\alpha, 1}(\lambda t^\alpha)$  称为单参数 Mittag-leffier 函数, 其分数阶导数定义为  $D_t^\alpha E_{\alpha, 1}(\lambda t^\alpha) = \lambda E_{\alpha, 1}(\lambda t^\alpha)$ . 由于(2)式带有一个常数  $a_0$ , 因此(2)式非常适合 Caputo 型微分算子下的运算, 因为只有在 Caputo 型分数阶导数下, 常数的导数才为零. 显然, (3)式非常适合 Riemann-Liouville 型微分算子下的运算. 下面仅以(2)式为例来说明第二个步骤的操作要领.

第 2 步: 将(2)式代入到(1)式中必定可以得到下列形式的方程

$$\left[ F_1 \left( v, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2v}{dx^2}, \dots \right) \right] E_\alpha(\lambda t^\alpha) + \left[ F_2 \left( v, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2v}{dx^2}, \dots \right) \right] E_\alpha^2(\lambda t^\alpha) + \dots = 0 \quad (4)$$

像文献[10-11]中那样, 利用齐次平衡原理, 令 Mittag-leffier 函数  $E_\alpha(\lambda t^\alpha)$  的同次项的系数以及常数项分别等于零, 会得到下列形式的一些常微分方程组

$$F_1 \left( v, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2v}{dx^2}, \dots \right) = 0, F_2 \left( v, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2v}{dx^2}, \dots \right) = 0, \dots$$

对常微分方程组进行求解, 可以获得这些方程的解  $v = v(x)$  的具体表达式以及相关参数  $a_0, a_1, \lambda$  的取值. 当这些函数和参数的值被确定之后, 通过(2)式, 不难获得形如方程(1)的时间分数阶非线性偏微分方程的各种精确解, 具体操作见第 3 步.

第 3 步: 将第 2 步中所获得的各种解  $v = v(x)$  的具体表达式以及相应的参数  $a_0, a_1, \lambda$  的值代入(2)式, 就可获得方程(1)的各种精确解. 使用类似的操作步骤和方法, 利用(3)式, 可以获得方程(1)的其他类型的精确解.

## 2 时间分数阶 Klein-Gordon 型方程的精确解及其动力学性质

求解下列时间分数阶 Klein-Gordon 型方程<sup>[14]</sup>:

$$D_t^{2\alpha} u - a(u^2)_{xx} + b(u^2)_{xxxx} = 0 \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad a, b > 0 \quad (5)$$

的精确解, 其中  $u = u(x, t)$ ,  $t > 0$ ,  $x \in R$ , 将方程(5)改写成

$$D_t^{2\alpha} u - 2a(u_x)^2 - 2auu_{xx} + 6b(u_{xx})^2 + 8bu_x u_{xxx} + 2buu_{xxxx} = 0 \quad (6)$$

如果方程(5),(6)是 Riemann-Liouville 型分数阶导数定义下的分数阶偏微分方程, 那么我们就假设方程(6)的解具有如下的形式

$$u = c_0 t^{\gamma_0} + c_1 t^{\gamma_1} v(x) \quad (7)$$

其中:  $c_0, c_1, \gamma_0, \gamma_1$  为待定参数, 均为常数且  $c_1 \neq 0$ ,  $\gamma_0 > -1$ ,  $\gamma_1 > -1$ ; 函数  $v = v(x)$  为空间变量的待定函数. 把(7)式代入方程(6)中可得

$$\begin{aligned} & c_0 \frac{\Gamma(1+\gamma_0)}{\Gamma(1+\gamma_0-2\alpha)} t^{\gamma_0-2\alpha} + c_1 \frac{\Gamma(1+\gamma_1)}{\Gamma(1+\gamma_1-2\alpha)} t^{\gamma_1-2\alpha} v - 2ac_1^2 t^{2\gamma_1} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 - \\ & 2ac_0 c_1 t^{\gamma_0+\gamma_1} \frac{d^2v}{dx^2} - 2ac_1^2 t^{2\gamma_1} v \frac{d^2v}{dx^2} + 6bc_1^2 t^{2\gamma_1} \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + 8bc_1^2 t^{2\gamma_1} \frac{d^3v}{dx^3} \frac{dv}{dx} + \\ & 2bc_0 c_1 t^{\gamma_0+\gamma_1} \frac{d^4v}{dx^4} + 2bc_1^2 t^{2\gamma_1} v \frac{d^4v}{dx^4} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

在(8)式中, 令时间变量  $t$  的幂指数全部相等, 可得

$$\gamma_0 - 2\alpha = \gamma_1 - 2\alpha = \gamma_0 + \gamma_1 = 2\gamma_1 \quad (9)$$

求解(9)式即得:

$$\gamma_0 = \gamma_1 = -2\alpha \quad (10)$$

为简便起见, 记

$$\Omega = \frac{\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(1-4\alpha)}$$

将(10)式代入(8)式中消去时间项  $t^{-4\alpha}$  后即得:

$$\begin{aligned} c_0\Omega + c_1\Omega v - 2ac_1^2\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - 2ac_0c_1\frac{d^2v}{dx^2} - 2ac_1^2v\frac{d^2v}{dx^2} + \\ 6bc_1^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 + 8bc_1^2\frac{d^3v}{dx^3}\frac{dv}{dx} + 2bc_0c_1\frac{d^4v}{dx^4} + 2bc_1^2v\frac{d^4v}{dx^4} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

假设方程(11)具有下列  $m$  次多项式形式的解

$$v = \sum_{k=0}^m r_k x^k \quad (12)$$

根据齐次平衡原理可以确定最高次  $m$  的值. 如果平衡方程(11)中线性项  $v$  与非线性项  $v\frac{d^4v}{dx^4}$  中  $x$  的次数,

即得  $m=4$ . 类似地, 如果我们平衡高阶线性项  $\frac{d^2v}{dx^2}$  和最高阶非线性项  $v\frac{d^4v}{dx^4}$  中  $x$  的次数, 可得到  $m=2$ .

将  $m=4$  代入(12)式可得

$$v = r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + r_4x^4 \quad (13)$$

其中  $r_0, r_1, r_2, r_3, r_4$  为待定系数. 将(13)式代入(11)式即得

$$-56ac_1^2r_4^2x^6 - 84ac_1^2r_3r_4x^5 + [1680bc_1^2r_4^2 + \dots - 2ac_1^2(16r_2r_4 + 9r_3^2)]x^4 + \dots = 0 \quad (14)$$

很容易发现方程(14)有两个孤立项  $-56ac_1^2r_4^2x^6$  和  $-84ac_1^2r_3r_4x^5$ . 显然, 当且仅当  $r_4=0$  时, 两个项的系数都等于零. 因此, 方程(11)没有形如(13)式的解.

但如果将  $m=2$  代入(12)式中, 却可得到

$$v = r_0 + r_1x + r_2x^2 \quad (15)$$

又将(15)式代入(11)式中, 不难得到

$$\begin{aligned} (-12ac_1^2r_2^2 + c_1r_2\Omega)x^2 + (c_1r_1\Omega - 12ac_1^2r_1r_2)x + \\ (c_0\Omega - c_1r_0\Omega - 4ac_0c_1r_2 - 2ac_1^2r_1^2 + 24bc_1^2r_2^2 - 4ac_1^2r_0r_2) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

在方程(16)中, 让  $x$  的同次幂的所有系数都等于零, 不难得到下列方程组:

$$\begin{cases} -12ac_1^2r_2^2 + c_1r_2\Omega = 0 \\ c_1r_1\Omega - 12ac_1^2r_1r_2 = 0 \\ c_0\Omega - c_1r_0\Omega - 4ac_0c_1r_2 - 2ac_1^2r_1^2 + 24bc_1^2r_2^2 - 4ac_1^2r_0r_2 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

解方程组(17), 有

$$r_0 = \frac{-4a^2c_0\Omega + 12a^3c_1^2r_1^2 - b\Omega^2}{4a^2c_1\Omega} \quad r_1 = r_1 \quad r_2 = \frac{\Omega}{12ac_1} \quad (18)$$

将(18)式代入(15)式可以得到待定函数  $v(x)$  的具体表达式

$$v = \frac{-4a^2c_0\Omega + 12a^3c_1^2r_1^2 - b\Omega^2}{4a^2c_1\Omega} + r_1x + \frac{\Omega}{12ac_1}x^2 \quad (19)$$

将(19)式和(10)式代入到(7)式中, 就获得了方程(6)的一个精确解:

$$u = \left[ c_0 + \frac{-4a^2c_0\Omega + 12a^3c_1^2r_1^2 - b\Omega^2}{4a^2\Omega} + mx + \frac{\Omega}{12a}x^2 \right] t^{-2\alpha} \quad (20)$$

其中:  $c_0, m$  是任意常数,  $\Omega = \frac{\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(1-4\alpha)}$ ,  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  且  $\alpha \neq \frac{1}{4}$ .

当方程(6)是卡普托型分数阶导数定义下的分数阶偏微分方程时, 不妨假设方程(6)存在其它形式的

解, 即

$$u = b_0 + b_1 E_a(\lambda t^a) v(x) \quad (21)$$

其中:  $b_0, b_1, \lambda$  是待定参数, 均为常数且  $b_0 \neq 0$ ;  $v(x)$  是关于空间变量  $x$  的待定函数. 将(21)式代入(6)式即得

$$\begin{aligned} & \left( \lambda^2 b_1 v - 2ab_0 b_1 \frac{d^2 v}{dx^2} + 2bb_0 b_1 \frac{d^4 v}{dx^4} \right) E_a(\lambda t^a) + \left[ -2ab_1^2 \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 - 2ab_1^2 v \frac{d^2 v}{dx^2} + \right. \\ & \left. 6bb_1^2 \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + 8bb_1^2 \frac{dv}{dx} \frac{d^3 v}{dx^3} + 2bb_1^2 v \frac{d^4 v}{dx^4} \right] E_a^2(\lambda t^a) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

在方程(22)中, 令  $E_a(\lambda t^a)$  和  $E_a^2(\lambda t^a)$  的系数都等于零可得下列方程组

$$\begin{cases} \lambda^2 v - 2ab_0 \frac{d^2 v}{dx^2} + 2bb_0 \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \\ -2a \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 - 2av \frac{d^2 v}{dx^2} + 6b \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + 8b \frac{dv}{dx} \frac{d^3 v}{dx^3} + 2bv \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

首先求解(23)式中第一个线性常微分方程, 只讨论  $\Delta = a^2 b_0^2 - 2bb_0 \lambda^2 > 0$  的情况, 可以得到 2 种形式的通解:

$$v = B_1 e^{\Omega_0 x} + B_2 e^{-\Omega_0 x} + B_3 e^{\Omega_1 x} + B_4 e^{-\Omega_1 x} \quad b_0 > 0 \quad (24)$$

$$v = C_1 e^{\Omega_1 x} + C_2 e^{-\Omega_1 x} + C_3 \cos(\Omega_2 x) + C_4 \sin(\Omega_2 x) \quad b_0 < 0 \quad (25)$$

其中:  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{ab_0 + \sqrt{a^2 b_0^2 - 2bb_0 \lambda^2}}{2bb_0}}$ ,  $\Omega_1 = \sqrt{\frac{ab_0 - \sqrt{a^2 b_0^2 - 2bb_0 \lambda^2}}{2bb_0}}$ ,  $\Omega_2 = \sqrt{\frac{-ab_0 + \sqrt{a^2 b_0^2 - 2bb_0 \lambda^2}}{2bb_0}}$ ;

$B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4$  为任意常数.

为了计算简便, 令  $B_3 = B_4 = 0$ , 将(24)式代入(23)式的第二个非线性常微分方程中得

$$3B_1^2 \left( a^2 b_0 + a\sqrt{\Delta} - \frac{4}{3} b \lambda^2 \right) e^{2\Omega_0 x} + 3B_2^2 \left( a^2 b_0 + a\sqrt{\Delta} - \frac{4}{3} b \lambda^2 \right) e^{-2\Omega_0 x} = 0 \quad (26)$$

令(26)式中  $e^{2\Omega_0 x}$  和  $e^{-2\Omega_0 x}$  的系数全部等于零, 只需要  $a^2 b_0 + a\sqrt{\Delta} - \frac{4}{3} b \lambda^2 = 0$ , 解得

$$\lambda = \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3b_0}{2b}} \quad (27)$$

将(27)式及  $B_3 = B_4 = 0$  代入到(24)式可得

$$v = B_1 e^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})a}{b}} x} + B_2 e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})a}{b}} x} \quad (28)$$

将(28)式代入(21)式可以得到方程(6)的 2 个精确解为

$$u(x, t) = b_0 + [k_1 e^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})a}{b}} x} + k_2 e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})a}{b}} x}] E_a \left( \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3b_0}{2b}} t^a \right) \quad (29)$$

$$u(x, t) = b_0 + [k_1 e^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})a}{b}} x} + k_2 e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})a}{b}} x}] E_a \left( -\frac{a}{2} \sqrt{\frac{3b_0}{2b}} t^a \right) \quad (30)$$

其中:  $b_0, k_1, k_2$  为任意常数且  $b_0 > 0$ . 同样令  $B_1 = B_2 = 0$ , 类似可得到和(29), (30)相同形式的精确解, 只需要将(29)和(30)式中的  $k_1, k_2$  改为  $k_3, k_4$  即可.

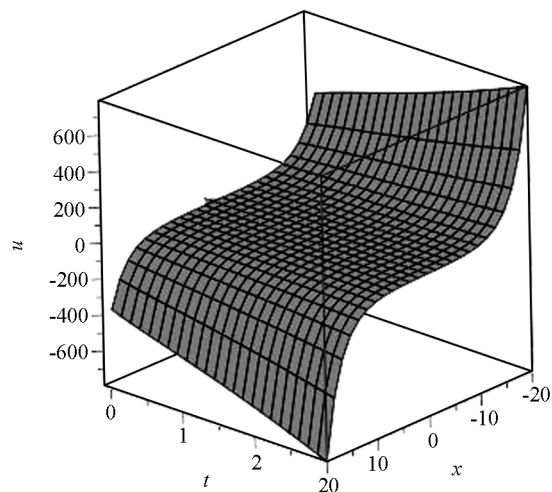
运用同样的方法, 取  $C_1 = C_2 = 0$ , 在此条件下就可以得到方程(6)的另外 2 个精确解

$$u(x, t) = b_0 + \left[ k_5 \cos \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-2)a}{b}} x \right) + k_6 \sin \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-2)a}{b}} x \right) \right] E_a \left( \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3b_0}{2b}} t^a \right) \quad (31)$$

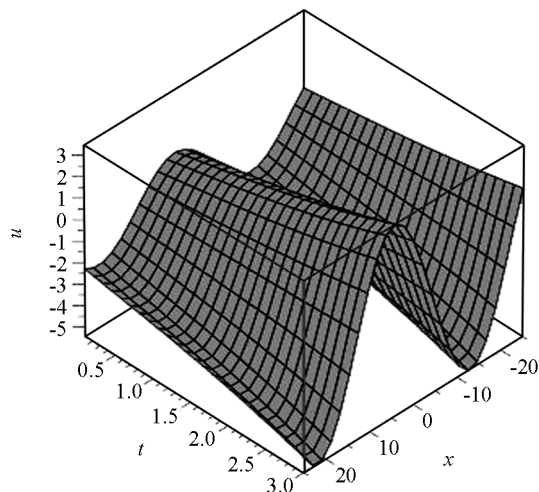
$$u(x, t) = b_0 + \left[ k_5 \cos \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-2)a}{b}} x \right) + k_6 \sin \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-2)a}{b}} x \right) \right] E_a \left( -\frac{a}{2} \sqrt{\frac{3b_0}{2b}} t^a \right) \quad (32)$$

其中  $b_0, k_5, k_6$  为任意常数.

解(29)和(31)的 3 维坐标图形见图 1.



(a) 精确解(29)



(b) 精确解(31)

图 1 解随时间和空间发展的 3 维坐标模拟图

#### 参考文献:

- [1] DAFTARDAR-GEJJI V, JAFARI H. Adomian Decomposition: A Tool for Solving a System of Fractional Differential Equations [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, 301(2): 508-518.
- [2] ESLAMI M, FATHI VAJARGAH B, MIRZAZADEH M, et al. Application of First Integral Method to Fractional Partial Differential Equations [J]. *Indian Journal of Physics*, 2014, 88(2): 177-184.
- [3] BAKKYARAJ T, SAHADEVAN R. Approximate Analytical Solution of Two Coupled Time Fractional Nonlinear Schrödinger Equations [J]. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2016, 2(1): 113-135.
- [4] SAHADEVAN R, BAKKYARAJ T. Invariant Analysis of Time Fractional Generalized Burgers and Korteweg-De Vries Equations [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, 393(2): 341-347.
- [5] SAHADEVAN R, BAKKYARAJ T. Invariant Subspace Method and Exact Solutions of Certain Nonlinear Time Fractional Partial Differential Equations [J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2015, 18(1): 146-162.
- [6] HARRIS P A, GARRA R. Analytic Solution of Nonlinear Fractional Burgers-Type Equation by Invariant Subspace Method [J]. *Nonlinear Studies*, 2013, 20(4): 471-481.
- [7] WU G C, LEE E W M. Fractional Variational Iteration Method and Its Application [J]. *Physics Letters A*, 2010, 374(25): 2506-2509.
- [8] ZAYED E M E, AMER Y A, SHOHIB R M A. The Fractional Complex Transformation for Nonlinear Fractional Partial Differential Equations in the Mathematical Physics [J]. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 2016, 19(1): 59-69.
- [9] CHEN J, LIU F, ANH V. Analytical Solution for the Time-Fractional Telegraph Equation by the Method of Separating Variables [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, 338(2): 1364-1377.
- [10] LI X Z. Comment on "Applications of Homogenous Balanced Principle on Investigating Exact Solutions to a Series of Time Fractional Nonlinear PDEs", [Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 47(2017) 253-266] [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, 59: 606-607.
- [11] RUI W G. Applications of Integral Bifurcation Method Together with Homogeneous Balanced Principle on Investigating Exact Solutions of Time Fractional Nonlinear PDEs [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 91(1): 697-712.

- [12] WAZWAZ A M. Solutions of Compact and Noncompact Structures for Nonlinear Klein-Gordon-Type Equation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 134(2-3): 487-500.
- [13] LORCA S, MONTENEGRO M. Positive Solutions to a Non-Radial Supercritical Klein-Gordon-Type Equation [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2006, 49(2): 383.
- [14] GUO S M, MEI L Q. The Fractional Variational Iteration Method Using He's Polynomials [J]. Physics Letters A, 2011, 375(3): 309-313.
- [15] 阳志锋, 罗李平. Lifes pan of Solutions to a Klein-Gordon Equation [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2006, 24(3): 91-94.

## Exact Solutions of Time Fractional Klein-Gordon-Type Equations and Their Dynamical Properties

ZHANG Hui<sup>1,2</sup>, RUI Wei-guo<sup>1</sup>

1. School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China;

2. School of General Education, City College, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan 621000, China

**Abstract:** In this work, based on the method of separation of variables combined with the homogeneous balance principle, we study the time-fractional Klein-Gordon-type equation. Different kinds of the exact solutions of this nonlinear time-fractional partial differential equation are obtained. Further, the dynamic properties of these solutions are discussed and, by means of the simulation way, the dynamic evolution behaviors and dynamic phenomena of some exact solutions are shown intuitively.

**Key words:** homogeneous balance method; method of separation of variables; exact solution; Mittag-Leffler function

责任编辑 张 枸

