

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.07.012

三阶三系数偏差分方程的振动性^①

王娇凤, 王震

西京学院 理学院, 西安 710123

摘要: 应用包络理论, 研究了三阶三系数偏差分方程

$$pu_{m+3,n} + qu_{m,n+3} + u_{m+1,n} + u_{m,n+1} + ru_{m,n} = 0 \quad p, q, r \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$$

的振动性, 给出了振动的充要条件.

关键词: 偏差分方程; 振动; 包络; 特征方程

中图分类号: O241.8

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2019)07-0083-05

众所周知, 偏微分方程的求解是比较困难的, 一般计算的方法都是经过差分将其离散化, 进而得到相应的偏差分方程, 然后通过计算偏差分方程的解来研究偏微分方程的解, 因此偏差分方程的解的研究就显得十分重要^[1-4]. 另外, 在土木工程、机械控制等实际问题中存在着各种振动现象^[5-8], 而描述这些现象的数学模型大多是偏微分方程, 因此为了研究工程实际问题的振动行为, 有必要对偏差分方程的解的振动特性进行研究. 然而在研究偏差分方程的振动特性时, 受到 Laplace 反变换计算难度的影响, 偏差分方程的振动性研究成果相对较少^[9-12]. 文献[13]借助包络理论研究了偏差分方程

$$u_{m+2,n} + u_{m,n+2} + au_{m+1,n} + bu_{m,n+1} + cu_{m,n} = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$$

的振动性, 并且给出了方程振动的充要条件. 文献[14-16]进一步研究了三类二阶三系数偏差分方程的振动性, 同时给出了相应方程解的不同振动条件, 本文在文献[14-16]的基础上, 考虑一类三阶三系数偏差分方程

$$pu_{m+3,n} + qu_{m,n+3} + u_{m+1,n} + u_{m,n+1} + ru_{m,n} = 0 \quad p, q, r \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

的振动性.

1 主要结果

为了顺利给出方程(1)的振动条件, 首先给出引理 1.

引理 1^[17] 设 A, B, C, F 是定义在 \mathbb{R}^n 上的 n 元可微函数, Γ 是 $Ax + By + Cz = F$ 确定的 n 参数平面族, Σ 是 Γ 的包络, 则 $Ax + By + Cz = F$ 没有实根当且仅当没有 Σ 的切平面通过点 (x, y, z) . 相应地, 如果设 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{F}$ 是定义在 \mathbb{R}^n 上的 n 元可微函数, $\tilde{\Gamma}$ 是 $\tilde{A}x + \tilde{B}y = \tilde{F}$ 确定的 n 参数直线族, $\tilde{\Sigma}$ 是 $\tilde{\Gamma}$ 的包络, 则 $\tilde{A}x + \tilde{B}y = \tilde{F}$ 没有实根当且仅当没有 $\tilde{\Sigma}$ 的切线通过点 (x, y) .

① 收稿日期: 2018-03-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(11726624, 61473237); 陕西省重点研发计划项目(2018GY-091, 2019GY-025); 山东省自然科学基金研究计划项目(ZR2017PA008).

作者简介: 王娇凤(1990-), 女, 硕士, 助教, 主要从事差分方程及其应用研究.

定理 1 方程(1) 是振动的当且仅当 $p < 0, q < 0, r < -\frac{2}{3} \left[\left(-\frac{1}{3p}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{3q}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$.

证 由于方程(1) 是否振动主要由其特征方程是否有正根来判定, 因此首先计算方程(1) 的特征方程

$$f(p, q, r, \lambda, \mu) = p\lambda^3 + q\mu^3 + \lambda + \mu + r = 0 \quad (p, q, r) \in \mathbb{R}^3, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

进而在 \mathbb{R}^3 内寻找特征方程(2) 没有正根的区域. 对于任意给定的正实数对 $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, 方程(2) 都可以在 \mathbb{R}^3 中确定一个平面, 因此可将 $f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$ 视为 \mathbb{R}^3 上的关于 λ, μ 的双参数平面族.

根据包络的定义, 由特征方程(2) 所确定的双参数平面族的包络 S 上点满足

$$\begin{cases} f(x, y, z, \lambda, \mu) = \lambda^3 x + \mu^3 y + \lambda + \mu + z = 0 \\ f_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) = 3\lambda^2 x + 1 = 0 \\ f_\mu(x, y, z, \lambda, \mu) = 3\mu^2 y + 1 = 0 \end{cases} \quad \lambda > 0, \mu > 0 \quad (3)$$

故

$$z(x, y) = -\frac{2}{3} \left[\left(-\frac{1}{3x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{3y}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad x < 0, y < 0 \quad (4)$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{9x^2} \left(-\frac{1}{3x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{9y^2} \left(-\frac{1}{3y}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{3}}{6x^3} \left(-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{3}}{6y^3} \left(-\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

因此, 当 $x < 0, y < 0$ 时, 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{1}{12}(xy)^{\frac{5}{2}} > 0$$

由文献[18] 知, 当 $x < 0, y < 0$ 时, $z(x, y)$ 在 $(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ 上是上凸函数且 $z(x, y) < 0$ (图 1).

由上凸函数 $z(x, y)$ 的性质可知, 当点 (x, y, z) 在包络 S 的下方区域时, 不存在包络 S 的切平面通过点 (x, y, z) , 即当 $p < 0,$

$q < 0, r < -\frac{2}{3} \left[\left(-\frac{1}{3p}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{3q}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$ 时,

方程(1) 是振动的, 同时由引理 1 可知, 该条件为充要条件, 故方程(1) 是振动的当且仅当 $p < 0,$

$q < 0, r < -\frac{2}{3} \left[\left(-\frac{1}{3p}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{3q}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$.

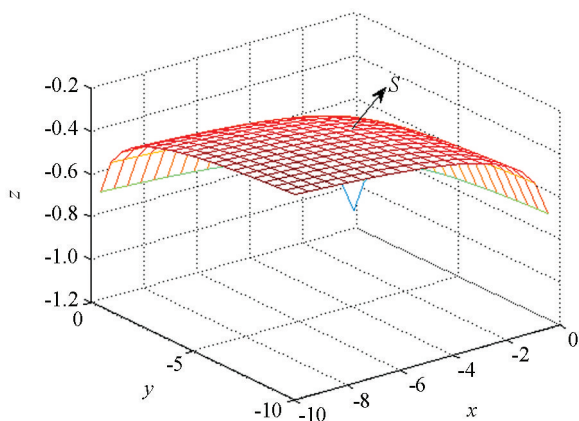


图 1 特征方程(2) 所确定的平面族的包络 S

证毕.

下面给出退化型偏差分方程(1)的振动条件. 令特征方程(2)中的一个参数为零, 则有

$$p\lambda^3 + \lambda + r = 0, \mu = 0 \quad (5a)$$

$$q\mu^3 + \mu + r = 0, \lambda = 0 \quad (5b)$$

特征方程(5)对应的差分方程变为常差分方程

$$pu_{n+3} + u_{n+1} + ru_n = 0 \quad (6a)$$

$$qu_{m+3} + u_{m+1} + ru_m = 0 \quad (6b)$$

定理 2 方程(6a)是振动的当且仅当 $p < 0, r < -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3p}\right)^{\frac{1}{2}}$ 或者 $p = 0, r \geq 0$; 方程(6b)是振动的

的当且仅当 $q < 0, r < -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3q}\right)^{\frac{1}{2}}$ 或者 $q = 0, r \geq 0$.

证 方程(6a)的特征方程为

$$f(p, r, \lambda) = p\lambda^3 + \lambda + r = 0 \quad (p, r) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R} \quad (7)$$

(I) 当 $p = 0$ 时, 特征方程(7)没有正根当且仅当 $r \geq 0$;

(II) 当 $p \neq 0$ 时, 特征方程(7)的系数 (p, r) 可以看成是 \mathbb{R}^2 内的点, 只需在 \mathbb{R}^2 内寻找使得特征方程(7)没有正根的点所在的区域即可. 对于任意的正实数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 方程(7)都可以在 \mathbb{R}^2 中确定一条直线, 因此可将 $f(x, y, \lambda) = 0$ 视为 \mathbb{R}^2 上的单参数直线族, 故由特征方程(7)所确定的单参数直线族的包络 C 上点满足

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = \lambda^3 x + \lambda + y = 0 \\ f_\lambda(x, y, \lambda) = 3\lambda^2 x + 1 = 0 \end{cases} \quad \lambda > 0 \quad (8)$$

则

$$y(x) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3x}\right)^{\frac{1}{2}} \quad x < 0 \quad (9)$$

图 2 为特征方程(7)所确定的直线族的包络 C , 且为第三象限中的上凸曲线, 当点 (p, r) 在包络 C 的

下方, 即当 $p < 0, r < -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3p}\right)^{\frac{1}{2}}$ 时, 方程(6a)是振动的, 同时由引理 1 可知, 该条件为充要条件, 方

程(6a)是振动的当且仅当 $p < 0, r < -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3p}\right)^{\frac{1}{2}}$

或者 $p = 0, r \geq 0$. 同理可证方程(6b)是振动的当且

仅当 $q < 0, r < -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3q}\right)^{\frac{1}{2}}$ 或者 $q = 0, r \geq 0$.

证毕.

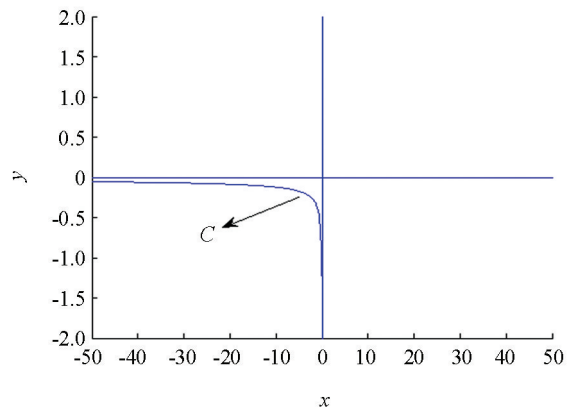


图 2 特征方程(7)所确定的直线族的包络 C

2 数值仿真

例 1 给定偏差分方程

$$-0.03u_{m+3,n} + u_{m+1,n} - 0.9u_{m,n} = 0 \quad (10)$$

由定理 1 知, 当 $p = -0.03 < 0, q = -0.27 < 0, r = -30 < -\frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{3 \cdot 0.03}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{3 \cdot 0.27}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = -\frac{80}{27}$

时, 定理 1 条件满足, 因此方程(1) 振动(图 3).

例 2 给定常差分方程

$$-2.43u_{m+3,n} + u_{m+1,n} - 0.9u_{m,n} = 0 \quad (11)$$

由定理 2 可知, 当 $p = -2.43 < 0$, $r = -0.9 < -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3 \cdot 2.43} \right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{20}{81}$ 时, 定理 2 条件满足, 因此

方程(11) 振动(图 4).

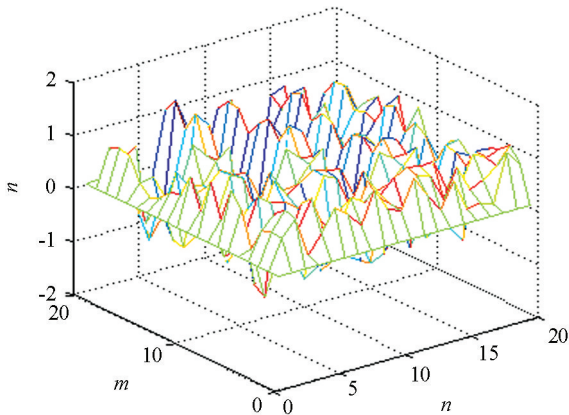


图 3 方程(10) 的振动图像

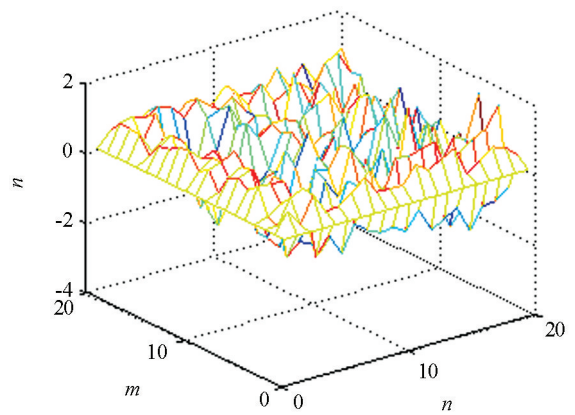


图 4 方程(11) 的振动图像

参考文献:

- [1] LUO J W. Oscillation of Hyperbolic Partial Differential Equations with Impulses [J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, 133(2-3): 309-318.
- [2] BERGER M J, OLIGER J. Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations [J]. Journal of Computational Physics, 1984, 53(3): 484-512.
- [3] SMITH B F. Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations [M] // Parallel Numerical Algorithms. Berlin: Springer, 1997.
- [4] 王培光, 葛渭高. 一类非线性偏泛函微分方程的强迫振动性 [J]. 系统科学与数学, 2000, 20(4): 454-461.
- [5] 曾 诚, 孙永胜, 杨智勇. 连续减速带激励下非线性车辆半车模型振动分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(2): 142-146.
- [6] ISLAM M N, CHEN Z. Natural Oscillation Control of Prototype Mechanical Rectifiers [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, 20(6): 1559-1566.
- [7] 陈 彦, 于徐红. 高速公路斜拉桥索力检测数据快速采集与识别方法 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2013, 31(4): 92-95.
- [8] YASUDA M, TAKEI K, ARIE T, et al. Oscillation Control of Carbon Nanotube Mechanical Resonator by Electrostatic Interaction Induced Retardation [J]. Scientific Reports, 2016, 6(1): 22600.
- [9] ZHANG B G, AGARWAL R P. The Oscillation and Stability of Delay Partial Difference Equations [J]. Comput Math Appl, 2003, 45(6-9): 1253-1295.
- [10] ZHANG B G, LIU B M. Necessary and Sufficient Conditions for Oscillations of Partial Difference Equations with Continuous Variables [J]. Computers & Mathematics With Applications, 1999, 38(5-6): 163-167.
- [11] LIU S T, ZHANG B G, CHEN G. Asymptotic Behavior and Oscillation of Delay Partial Difference Equations with Positive and Negative Coefficients [J]. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2003, 33(3): 953-970.
- [12] ZHANG B G, ZHOU Y. Qualitative Analysis of Delay Partial Difference Equations [M]. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2007.

- [13] YUAN C H, LIU S T, LIU J. Exact Oscillation Regions for a Partial Difference Equation [J]. *Advances in Difference Equations*, 2015, 2015(1): 1-6.
- [14] 王娇凤, 马慧莉. 一类偏差分方程的振动性 [J]. *数学的实践与认识*, 2017, 47(12): 308-312.
- [15] 王娇凤. 几类偏差分方程振动性研究 [D]. 兰州: 西北师范大学, 2017.
- [16] 王文杰, 薛 蓉, 马慧莉. 二阶三参数混合型偏差分方程解的振动性 [J]. *数学的实践与认识*, 2018, 48(5): 228-234.
- [17] CHENG S S, LIN Y Z. *Dual Sets of Envelopes and Characteristic Regions of Quasi-Polynomials* [M]. Singapore: World Scientific, 2009.
- [18] 陈朝晖. 二元函数凹凸性的判别法及最值探讨 [J]. *高师理科学刊*, 2010, 30(5): 25-28.

Oscillatory Behavior of a Third-Order Partial Difference Equation with Three Coefficients

WANG Jiao-feng, WANG Zhen

School of Science, Xijing University, Xi'an Shaanxi 710123, China

Abstract: In this paper, we study the oscillatory behavior of the third-order partial difference equation with three coefficients

$$pu_{m+3,n} + qu_{m,n+3} + u_{m+1,n} + u_{m,n+1} + ru_{m,n} = 0 \quad p, q, r \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$$

Meanwhile, using the envelope theory, we obtain the necessary and sufficient conditions for oscillation of solutions.

Key words: partial difference equation; oscillation; envelope; characteristic equation

责任编辑 张 桢

