第 41 卷第 8 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2019 年 8 月
Vol. 41　No. 8　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Aug.　2019

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.08.007

分数次 Hardy 算子的交换子在 Lipschitz 空间上的端点估计[①]

郭庆栋，　周　疆

新疆大学 数学与系统科学学院，乌鲁木齐 830046

摘要：主要研究分数次 Hardy 算子和 Lipschitz 函数生成的交换子在 Lipschitz 空间上的端点估计. 分数次积分算子的方法不适用于分数次 Hardy 算子，将给出新的方法，同时也将考虑分数次极大算子的交换子的结果.

关　键　词：分数次 Hardy 算子的交换子；Lipschitz 空间；端点估计；分数次极大算子

中图分类号：O174.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2019)08－0041－07

设 f 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的非负可积函数，经典的 Hardy 算子定义如下：

$$Hf(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y \qquad x>0$$

文献[1] 在证明 Hilbert 双重级数定理的过程中得到了如下著名的 Hardy 积分不等式：

$$\| Hf \|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \leqslant \frac{p}{p-1} \| f \|_{L^p(\mathbb{R}_+)}$$

此后 Hardy 算子逐渐被人们广泛关注[2-5]. 文献[6] 定义了如下 n 维 Hardy 算子的形式，并得到了与 1 维结果平行的 n 维积分不等式：

定义 1　设 $1<p<\infty$，$f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. n 维 Hardy 算子被定义为

$$\mathscr{H}f(x)=\frac{1}{|x|^n}\int_{|y|<|x|} f(y)\mathrm{d}y \qquad x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$$

随着 Hardy 算子研究的逐渐深入，Hardy 算子与 Lipschitz(简记为 Lip_α) 或 BMO 等函数生成的交换子也被人们广泛研究，Hardy 算子对刻画函数空间的性质有着非常重要的意义. Hardy 算子的交换子定义为

$$[b,\mathscr{H}]f=b\mathscr{H}f-\mathscr{H}(fb)$$

其中 b 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数. 本文把$[b,\mathscr{H}]$简记为 $\mathscr{H}_b$，可知当 $n=1$ 时，$\mathscr{H}_b=H_b$. 文献[7] 证明了 H_b 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$(简记为 L^p) 空间上的有界性，其中 b 属于单边二进中心 BMO 函数，$1<p<\infty$. 文献[8] 首次定义了如下经典的分数次 Hardy 算子，并得到分数次 Hardy 算子及其交换子刻画 L^p 空间的相应结果. 最近关于分数次 Hardy 算子及其交换子的相关结论可参考文献[9－15].

---

① 收稿日期：2018－03－29
基金项目：国家自然科学基金项目(11826202，11661075).
作者简介：郭庆栋(1994－)，男，硕士研究生，主要从事调和分析的研究.
通信作者：周　疆，教授.

定义 2 设 $0<\beta<n$，$f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 分数次 Hardy 算子以及分数次极大算子的交换子的定义分别为：

$$\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x)=\frac{1}{|x|^{n-\beta}}\int_{|y|<|x|}(b(x)-b(y))f(y)\mathrm{d}y \qquad x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$$

$$\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{|B|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_B|b(x)-b(y)||f(y)|\mathrm{d}y$$

文献[16]得到了分数次积分算子从 Morrey 空间到 Lip_α 空间上的端点估计. 受此启发，本文将考虑分数次 Hardy 算子的交换子从 Morrey 空间到 Lip_α 空间上的端点估计，同时针对分数次极大算子的交换子在端点处的情形进行研究. 虽然分数次极大算子的交换子与分数次 Hardy 算子的交换子有控制关系，但是两者的处理方法不同. 本文的主要目的是给出分数次 Hardy 算子的交换子以及分数次极大算子的交换子的端点估计.

定义 3 设 $0<\alpha<1$. 如果 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，且 f 满足

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha}=\sup_{x,y\in\mathbb{R}^n,\,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty$$

则称 f 属于 Lipschitz 空间.

定义 4 设 $1<q\leqslant p<\infty$. 如果函数 $f\in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\|f\|_{M^p_q}=\sup_{x\in B}\frac{1}{|B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}\left(\int_B|f(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$$

则称 f 属于 Morrey 空间 M^p_q，其中 B 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开球.

本文中的 C 通常表示与空间维数等有关的常数，每次出现时其值可能并不相同. B 表示以 x 为中心，$r>0$ 为半径的球体. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的可测子集 E，用 $|E|$ 表示 E 的 Lebesgue 测度.

定理 1 设 $0<\alpha<1$，$0<\beta<\frac{n}{p}$ 和 $1<q\leqslant p<\infty$，如果 $0<\alpha+\beta-\frac{n}{p}<\min\left\{1,\,n-\frac{n}{p}\right\}$，$f(x)\in M^p_q$，$b\in\mathrm{Lip}_\alpha$，$\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(0)=0$，则 $\mathscr{H}_{\beta,b}(f)\in\mathrm{Lip}_{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}$，且存在常数 $C>0$，使得

$$\|\mathscr{H}_{\beta,b}(f)\|_{\mathrm{Lip}_{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}}\leqslant C\|f\|_{M^p_q}$$

定理 2 设 $0<\alpha<1$，$0<\beta<n$ 和 $1<q\leqslant p<\infty$，如果 $\alpha+\beta=\frac{n}{p}$，$f\in M^p_q$，和 $b\in\mathrm{Lip}_\alpha$，则 $\mathscr{M}_{\beta,b}(f)\in L^\infty$，且存在常数 $C>0$，使得

$$\|\mathscr{M}_{\beta,b}(f)\|_{L^\infty}\leqslant C\|f\|_{M^p_q}$$

定理 3 设 $0<\alpha<1$，$0<\beta<\frac{n}{p}$ 和 $1<q\leqslant p<\infty$，如果 $0<\alpha+\beta-\frac{n}{p}<\min\left\{1,\,n-\frac{n}{p}\right\}$，$f\in M^p_q$，和 $b\in\mathrm{Lip}_\alpha$，则 $\mathscr{M}_{\beta,b}(f)\in\mathrm{Lip}_{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}$，且存在常数 $C>0$，使得

$$\|\mathscr{M}_{\beta,b}(f)\|_{\mathrm{Lip}_{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}}\leqslant C\|f\|_{M^p_q}$$

定理 1 的证明 对任意固定的点 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$，不妨假设 $|x_1|\geqslant|x_2|$. 下面分两种情况讨论：

情况 1 $|x_1|\geqslant 2|x_2|$.

根据 $|x_1|\geqslant 2|x_2|$，可得 $|x_1|\leqslant 2(|x_1|-|x_2|)$，则有

$$|\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x_1)-\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x_2)|\leqslant$$

$$\frac{1}{|x_1|^{n-\beta}}\int_{|y|<|x_1|}|(b(x_1)-b(y))f(y)|\mathrm{d}y+\frac{1}{|x_2|^{n-\beta}}\int_{|y|<|x_2|}|(b(x_2)-b(y))f(y)|\mathrm{d}y\leqslant$$

$$C\left(|x_1|^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}+|x_2|^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\right)\|f\|_{M_q^p}\leqslant C(|x_1|-|x_2|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_q^p}$$

情况 2　$|x_1|<2|x_2|$.

首先令 $\Omega=B(0,a)\backslash B(0,b)$，且假设 $B_i(i=1,2,\cdots)$ 是一列互不相交的极大球体族，其中每个球的半径为 $\dfrac{a-b}{2}$，中心属于集合 $\left\{t_0:|t_0|=\dfrac{a+b}{2}\right\}$，则 $\bigcup_i B_i\subset\Omega$.

易知 $\Omega\subset\bigcup_i 3B_i$ 成立. 否则，令 $\tilde{t}\in\Omega$ 和 $\tilde{t}\not\subseteq\bigcup_i 3B_i$，点 t_0 在直线 $l_{O,\tilde{x}}$ 上满足 $|t_0|=\dfrac{a+b}{2}$，则

$$|\tilde{t}-t_0|\leqslant\frac{a-b}{2}\qquad |t_i-\tilde{t}|\geqslant\frac{3(a-b)}{2}$$

其中 t_i 是 B_i 的中心，因此

$$|t_i-t_0|\geqslant|t_i-\tilde{t}|-|\tilde{t}-t_0|\geqslant a-b$$

此时，球 $B_0=B\left(t_0,\dfrac{a-b}{2}\right)$ 被包含在极大球体族 $\bigcup_i B_i$ 中，与极大球体族的定义矛盾.

可得

$$\begin{aligned}&|\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x_1)-\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x_2)|\leqslant\\&\left|\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x_1)-\left(\frac{|x_2|}{|x_1|}\right)^{n-\beta}\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x_2)\right|+\left|\left(\frac{|x_2|}{|x_1|}\right)^{n-\beta}\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x_2)-\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x_2)\right|=\\&I_1+I_2\end{aligned}$$

下面处理 I_1. 令

$$a=\sqrt{|x_1|^2-|y|^2}\qquad b=\sqrt{|x_2|^2-|y|^2}$$
$$\Omega=B(0,a)\backslash B(0,b)$$

从

$$a+b\leqslant|x_1|+|x_2|\qquad a^2-b^2=|x_1|^2-|x_2|^2$$

可得 $a-b\geqslant|x_1|-|x_2|$ 以及

$$|\Omega|=C(a^n-b^n)\leqslant C(a^2-b^2)^{\frac{n}{2}}\leqslant C(|x_1|^2-|x_2|^2)^{\frac{n}{2}}\leqslant C(|x_1|-|x_2|)^n$$

根据

$$0<\alpha+\beta-\frac{n}{p}<\min\left\{1,n-\frac{n}{p}\right\}\qquad\beta\leqslant\frac{n}{p}$$

有

$$\begin{aligned}I_1\leqslant&\left|\frac{1}{|x_1|^{n-\beta}}\int_{|x_2|\leqslant|y|<|x_1|}(b(x_1)-b(y))f(y)\mathrm{d}y+\frac{1}{|x_1|^{n-\beta}}\int_{|y|<|x_2|}(b(x_1)-b(y))f(y)\mathrm{d}y-\right.\\&\left.\frac{1}{|x_1|^{n-\beta}}\int_{|y|<|x_2|}(b(x_2)-b(y))f(y)\mathrm{d}y\right|\leqslant\\&C\left[\frac{1}{|x_1|^{n-\alpha-\beta}}\int_{|x_2|\leqslant|y|<|x_1|}|f(y)|\mathrm{d}y+\frac{(|x_1|-|x_2|)^{\alpha}}{|x_1|^{n-\beta}}\int_{|y|<|x_2|}|f(y)|\mathrm{d}y\right]\leqslant\\&C\left[\frac{1}{|x_1|^{n-\alpha-\beta}}\int_{B(0,a)\backslash B(0,b)}|f(y)|\mathrm{d}y+(|x_1|-|x_2|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_q^p}\right]\leqslant\\&C\left[\frac{1}{|x_1|^{n-\alpha-\beta}}\sum_i\int_{3B_i}|f(y)|\mathrm{d}y+(|x_1|-|x_2|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_q^p}\right]\leqslant\end{aligned}$$

$$C\left[\frac{|\Omega|(|x_1|-|x_2|)^{-\frac{n}{p}}}{|x_1|^{n-\alpha-\beta}}\|f\|_{M_q^p}+(|x_1|-|x_2|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_q^p}\right]\leqslant$$

$$C\left[\frac{(|x_1|-|x_2|)^{n-\frac{n}{p}}}{(|x_1|-|x_2|)^{n-\alpha-\beta}}\|f\|_{M_q^p}+(|x_1|-|x_2|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_q^p}\right]\leqslant$$

$$C(|x_1|-|x_2|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_q^p}$$

下面处理 I_2. 首先根据微分中值定理，在直线 $l_{|x_2|,|x_1|}$ 上存在一点 θ，使得

$$\frac{1}{|x_2|^n}-\frac{1}{|x_1|^n}=C\frac{|x_1|-|x_2|}{|\theta|^{n+1}}\leqslant C\frac{|x_1|-|x_2|}{|x_2|^{n+1}}$$

再由 $|x_2|>|x_1|-|x_2|$ 可得

$$I_2\leqslant C\frac{|x_1|-|x_2|}{|x_2|^{n+1-\alpha-\beta}}\int_{|y|<|x_2|}|f(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant C(|x_1|-|x_2|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_q^p}$$

综合情况 1 与情况 2，可得

$$|\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x_1)-\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x_2)|\leqslant C(|x_1|-|x_2|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_q^p}$$

现在考虑 $x_1\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$，$x_2=0$ 时的情况，根据 $\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(0)=0$，可得

$$|\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x_1)-\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(0)|=|\mathscr{H}_{\beta,b}(f)(x_1)|\leqslant C|x_1|^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_q^p}$$

因此，我们完成了定理 1 的全部证明.

定理 2 的证明　对任意的点 $x\in B$，根据 Hölder 不等式以及 $\alpha+\beta=\frac{n}{p}$，有

$$\frac{1}{|B|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_B|b(x)-b(y)||f(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant C\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha+\beta}{n}}}\int_B|f(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant C\|f\|_{M_q^p}\tag{1}$$

根据(1)式易知定理 2 成立.

定理 3 的证明　对任意固定的点 $x,y\in\mathbb{R}^n$，不妨假设 $\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(x)\geqslant\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(y)$. 通过计算可得 $\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(x)\leqslant C\|f\|_{M_q^p}$，而 $f\in M_q^p$，则有 $\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(x)\leqslant\infty$. 因此，对任意的 $\varepsilon>0$，存在方体 $B_1=B(z,r)\ni x$，使得

$$\frac{1}{|B_1|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B_1}|b(x)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t+\varepsilon>\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(x)\tag{2}$$

存在方体 $B_2=B(z,r+|x-y|)\ni y$，使得

$$\frac{1}{|B_2|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B_2}|b(y)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(y)\tag{3}$$

根据(2),(3)式可得

$$|\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(x)-\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(y)|\leqslant$$

$$r^\beta\left|\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}|b(x)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t-\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2}|b(y)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\right|+\varepsilon$$

下面我们将分两种情况讨论:

情况 1　$r\leqslant|x-y|$.

$$|\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(x)-\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(y)|\leqslant$$

$$Cr^{\alpha+\beta}\left|\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}|f(t)|\,\mathrm{d}t\right|+\left|\frac{1}{|B_2|}\int_{B_2}|f(t)|\,\mathrm{d}t\right|+\varepsilon\leqslant$$

$$Cr^{\alpha+\beta}\|f\|_{M_q^p}(|B_1|^{\frac{-1}{p}}+|B_2|^{\frac{-1}{p}})+\varepsilon\leqslant$$

$$C(|x-y|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_q^p}+\varepsilon$$

情况 2　$r\geqslant|x-y|$.

令 $\Omega=B(z,r+|x-y|)\backslash B(z,r)$，且假设 $R_i(i=1,2,\cdots)$ 是一列互不相交的极大球体族. 类似定理 1 中的情况 2，容易得 $\bigcup_i \mathbb{R}_i\subset\Omega\subset\bigcup_i 3\mathbb{R}_i$. 因此

$$\left|\frac{1}{|B_1|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B_1}|b(x)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t-\frac{1}{|B_2|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B_2}|b(y)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{1}{|B_1|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B_1}|b(x)-b(y)||f(t)|\,\mathrm{d}t\right|+$$

$$\left|\frac{1}{|B_1|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B_1}|b(y)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t-\frac{1}{|B_2|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B_2}|b(y)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\right|=$$

$$I_1+I_2$$

对于 I_1，根据 $\beta\leqslant\dfrac{n}{p}$，有

$$I_1\leqslant C\,\frac{(|x-y|)^{\alpha}}{|B_1|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B_1}|f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant C\,\frac{(|x-y|)^{\alpha}}{|B_1|^{1-\frac{\beta}{n}}}|B_1|^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_{M_q^p}\leqslant$$

$$C(|x-y|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_q^p}$$

对于 I_2，进一步处理为

$$I_2\leqslant\left|\frac{1}{|B_1|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B_1}|b(y)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t-\frac{1}{|B_2|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B_1}|b(y)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\right|+$$

$$\left|\frac{1}{|B_2|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B_1}|b(y)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t-\frac{1}{|B_2|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{B_2}|b(y)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\right|=$$

$$J_1+J_2$$

类似于定理 1 中情况 2 的证明，根据

$$0<\alpha+\beta-\frac{n}{p}<\min\left\{1,\ n-\frac{n}{p}\right\}$$

有

$$J_1\leqslant C\left|\frac{|x-y|}{|B_1|^{1+\frac{1-\beta}{n}}}\int_{B_1}|b(y)-b(t)||f(t)|\,\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$C\left|\frac{|x-y|}{|B_1|^{1+\frac{1-\beta-\alpha}{n}}}\int_{B_1}|f(t)|\,\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$C(|x-y|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}}\|f\|_{M_q^p}$$

对于 J_2，可处理为

$$J_2 \leqslant C \frac{1}{|B_2|^{1-\frac{\alpha+\beta}{n}}} \int_{\Omega} |f(t)| \mathrm{d}t \leqslant$$

$$C \frac{1}{|B_2|^{1-\frac{\alpha+\beta}{n}}} \int_{\cup_i 3R_i} |f(t)| \mathrm{d}t \leqslant C \frac{1}{|B_2|^{1-\frac{\alpha+\beta}{n}}} \sum_i |R_i|^{1-\frac{1}{p}} \| f \|_{M_q^p} \leqslant$$

$$C \frac{|\Omega| |x-y|^{-\frac{n}{p}}}{|B_2|^{1-\frac{\alpha+\beta}{n}}} \| f \|_{M_q^p} \leqslant C |x-y|^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}} \| f \|_{M_q^p}$$

易知

$$\left| \frac{1}{|B_1|^{1-\frac{\beta}{n}}} \int_{B_1} |b(x)-b(t)| |f(t)| \mathrm{d}t - \frac{1}{|B_2|^{1-\frac{\beta}{n}}} \int_{B_2} |b(y)-b(t)| |f(t)| \mathrm{d}t \right| \leqslant$$

$$C(|x-y|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}} \| f \|_{M_q^p}$$

则

$$|\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(x) - \mathscr{M}_{\beta,b}(f)(y)| \leqslant$$

$$r^{\beta} \left| \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} |b(x)-b(t)| |f(t)| \mathrm{d}t - \frac{1}{|B_2|} \int_{B_2} |b(y)-b(t)| |f(t)| \mathrm{d}t \right| + \varepsilon \leqslant$$

$$C(|x-y|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}} \| f \|_{M_q^p} + \varepsilon$$

由情况 1 与情况 2，可得

$$|\mathscr{M}_{\beta,b}(f)(x) - \mathscr{M}_{\beta,b}(f)(y)| \leqslant C(|x-y|)^{\alpha+\beta-\frac{n}{p}} \| f \|_{M_q^p}$$

至此，我们完成了定理 3 的全部证明.

参考文献：

[1] HARDY G H. Note on a Theorem of Hilbert [J]. Mathematische Zeitschrift，1920，6(3-4)：314-317.

[2] ANDERSEN K，MUCKENHOUPT B. Weighted Weak Type Hardy Inequalities with Applications to Hilbert Transforms and Maximal Functions [J]. Studia Mathematica，1982，72(1)：9-26.

[3] SAWYER E. Weighted Lebesgue and Lorentz Norm Inequalities for the Hardy Operator [J]. Transactions of the American Mathematical Society，1984，281(1)：329-337.

[4] GOLUBOV I. Boundedness of the Hardy and the Hardy-Littlewood Operators in the Spaces H and BMO [J]. Sbornik (Mathematics)，1997，188(7)：1041-1054.

[5] WU Q Y，FU Z W. Weighted p-Adic Hardy Operators and Their Commutators on p-Adic Central Morrey Spaces [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，2017，40(2)：635-654.

[6] CHRIST M，GRAFAKOS L. Best Constants for Two Nonconvolution Inequalities [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1995，123(6)：1687-1693.

[7] LONG S C，WANG J. Commutators of Hardy Operators [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2002，274(2)：626-644.

[8] FU Z W，LIU Z G，LU S Z，et al. Characterization for Commutators of N-Dimensional Fractional Hardy Operators [J]. Science in China (Mathematica)，2007，50(10)：1418-1426.

[9] 刘荣辉，周　疆. P-Adic 域上的多线性分数次 Hardy 算子交换子的估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(2)：6-13.

[10] FU Z W，LIU Z G，LU S Z. Boundedness for Commutators of Fractional Hardy Operators on Herz Spaces [J]. Pro-

gress in Natural Science，2007，17(1)：20-25.

[11] WANG S M，YAN D Y. Weighted Boundedness of Commutators of Fractional Hardy Operators with Besov-Lipschitz Functions [J]. 分析、理论与应用(英文版)，2012，28(1)：79-86.

[12] WU J L. Boundedness for Fractional Hardy-Type Operator on Herz-Morrey Spaces with Variable Exponent [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society，2014，51(2)：423-435.

[13] LIU R H，ZHOU J. Sharp Estimates for the P-Adic Hardy Type Operators on Higher-Dimensional Product Spaces [J]. Journal of Inequalities and Applications，2017，2017：219.

[14] WU Q Y. Boundedness for Commutators of Fractional P-Adic Hardy Operators [J]. Journal of Inequalities and Applications，2012，2012：293.

[15] 张　璞，武江龙. 分数次 Hardy 算子的交换子在变指数 Herz-Morrey 空间中的有界性 [J]. 数学进展，2014，43(4)：581-589.

[16] 周　盼，周　疆. 多线性分数次积分算子在 Morrey 型空间上新的端点估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(12)：74-80.

Endpoint Estimates of the Commutator of Fractional Hardy Operator in the Lipschitz Space

GUO Qing-dong，　ZHOU　Jiang

School of Mathematics and System Sciences，Xinjiang University，Urumqi 830046，China

Abstract：In this paper，we mainly study the endpoint estimates of the commutators generated by fractional Hardy operators with Lipschitz functions in the Lipschitz space. In addition，the method of fractional integral operator is not suitable for the fractional Hardy operator，for which this paper gives a new method. The results of commutators of fractional maximal operators are also considered.

Key words：commutator of fractional Hardy operators；Lipschitz space；endpoint estimate；fractional maximal operator

责任编辑　廖　坤