DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.08.008

一类 Caputo 分数阶脉冲微分方程混合边值问题解的存在唯一性[①]

邢艳元[1,2]，　郭志明[1]

1. 广州大学 数学与信息科学学院，广州 510006；2. 吕梁学院 数学系，山西 吕梁 033000

摘要：主要研究了一类 $1<\alpha<2$ 的分数阶脉冲微分方程的混合边值问题. 首先将非线性微分方程转化为等价的积分方程，然后利用 Leray-Schauder 和 Altman 不动点定理，得到了解的存在性和唯一性，并且给出了一个例子说明结论的正确性，推广和改进了相关结论.

关　键　词：Caputo 导数；脉冲微分方程；不动点理论；混合边值问题

中图分类号：O175.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2019)08-0048-06

分数阶微积分理论是整数阶微积分理论的延伸与拓展，由于其良好的遗传性和记忆性，受到越来越多学者的广泛关注，它在光学和热学系统、流变学及材料力学系统、信号处理和系统识别、控制和机器人等应用领域都有广泛的应用[1-6]. 脉冲微分方程是微分方程理论的一个重要分支，脉冲现象在现代科技各领域的实际问题中是普遍存在的，脉冲微分系统最突出的特点是能够充分考虑到瞬时突变现象对状态的影响，能够更深刻、更精确地反映事物的变化规律[7-11].

文献[12]研究了一类 $1<\alpha<2$ 的 Caputo 分数阶脉冲微分方程：

$$\begin{cases} {}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha u(t)=f(t,u(t)) & t\in J',\ J=[0,1] \\ \Delta u\mid_{t=t_k}=I_k(u(t_k)),\ \Delta u'\mid_{t=t_k}=J_k(u(t_k)) & k=1,2,\cdots,m \\ au(0)+bu(1)=0,\ au'(0)+bu'(1)=0 \end{cases}$$

其中 $I_k(u(t_k))=u(t_k^+)-u(t_k^-)$，$J_k(u(t_k))=u'(t_k^+)-u'(t_k^-)$，${}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha$ 是 Caputo 分数阶导数. 通过应用 Krasonselskii 不动点定理研究了上述方程反周期边值问题解的存在唯一性.

文献[13]研究了一类 $1<\alpha<2$ 的 Caputo 分数阶脉冲微分方程：

$$\begin{cases} {}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha u(t)=f(t,u(t)) & t\in J',\ J=[0,1] \\ \Delta u\mid_{t=t_k}=I_k(u(t_k)),\ \Delta u'\mid_{t=t_k}=J_k(u(t_k)) & k=1,2,\cdots,m \\ u(0)+u'(0)=0,\ u(1)+u'(1)=0 \end{cases}$$

其中 $I_k(u(t_k))=u(t_k^+)-u(t_k^-)$，$J_k(u(t_k))=u'(t_k^+)-u'(t_k^-)$，${}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha$ 是 Caputo 分数阶导数. 通过应用 Banach 不动点理论得出了上述方程混合边值问题解的存在唯一性.

受以上结论的启发，本文主要研究如下方程：

---

① 收稿日期：2018-03-13
基金项目：国家自然科学基金项目(11771104，11871171)；山西省吕梁学院 2015 自然科学校内基金项目(ZRXN201511).
作者简介：邢艳元(1985-)，女，博士研究生，主要从事应用数学的研究.
通信作者：郭志明，教授.

$$\begin{cases} {}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha u(t)=f(t,u(t)) \\ \Delta u\mid_{t=t_k}=I_k(u(t_k)),\ \Delta u'\mid_{t=t_k}=J_k(u(t_k)) \qquad k=1,2,\cdots,p \\ u(0)+u'(1)=0,\ u'(0)+u(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中${}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha$ 是 Caputo 分数阶导数，$1<\alpha<2$，$f:J\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$，$I_k,J_k:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是连续函数，并且

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_p<t_{p+1}=1$$

$$I_k(u(t_k))=u(t_k^+)-u(t_k^-) \qquad J_k(u(t_k))=u'(t_k^+)-u'(t_k^-)$$

其中 $u(t_k^+)$ 和 $u(t_k^-)$ 分别指 $u(t)$ 在 $t=t_k$ 处的右极限和左极限，同理 $u'(t_k^+)$ 和 $u'(t_k^-)$ 分别指 $u'(t)$ 在 $t=t_k$ 处的右极限和左极限.

1 预备知识

令 $J=[0,1]$，$J_0=[0,t_1]$，$J_i=(t_i,t_{i+1}]$，$i=1,2,\cdots,p-1$，$J_p=(t_p,1]$，$D=[t_1,t_2,\cdots,t_p]\subset(0,1)$，$J'=J\backslash D$. 并且 $PC[J,\mathbb{R}]=\{u\mid u:J\longrightarrow\mathbb{R},\ u\in C[0,t_1]\cup C(t_k,t_{k+1}];\ u(t_k^+)$ 和 $u(t_k^-)$ 都存在，且 $u(t_k)=u(t_k^-)(1\leqslant k\leqslant p)\}$，其中 $\|u\|_{PC}=\sup\limits_{t\in J}|u(t)|$.

定义 1[14] 函数 $f\in[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 积分

$${}_0I_t^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s$$

叫作函数 $f(t)$ 的 α 次积分. 若函数 $f(t)$ n 阶可导，则对 $f(t)$ 的 α 次 Caputo 导数定义如下：

$${}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)\mathrm{d}s \qquad \forall\alpha>0$$

其中 $n=[\alpha]+1$.

引理 1[14] 令 $\alpha>0$，则${}_0I_t^\alpha\,{}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha h(t)=h(t)+c_0+c_1t+\cdots+c_{n-1}t^{n-1}$，其中 c_i 为常数，$n=[\alpha]+1$.

引理 2[15] $E\subset PC(J,\mathbb{R})$ 是相对紧的当且仅当任何函数 $u(t)\in E$ 在 J 上一致有界，且在 $J_k(k=1,2,\cdots,p)$ 上是等度连续的.

引理 3[16] 若 E 是 Banach 空间，假设 $\Omega\subset E$ 为有界的开集，且 $\theta\in\Omega$，令 $T:\overline{\Omega}\longrightarrow E$ 是全连续算子，满足 $\forall u\in\partial\Omega$，$\|Tu\|\leqslant\|u\|$，则 T 在 $\overline{\Omega}$ 上有不动点.

引理 4[16] 若 E 是 Banach 空间，假设 $T:E\longrightarrow E$ 是全连续算子，且 $V=\{u\in E\mid u=\mu Tu,\ 0<\mu<1\}$ 有界，则 T 在 E 上有不动点.

引理 5 假设 $y:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是连续函数，且 $1<\alpha<2$，则分数阶脉冲微分方程混合边值问题

$$\begin{cases} {}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha u(t)=y(t) \qquad 1<\alpha<2 \\ \Delta u\mid_{t=t_k}=I_k(u(t_k)),\ \Delta u'\mid_{t=t_k}=J_k(u(t_k)) \\ u(0)+u'(1)=0,\ u'(0)+u(1)=0 \end{cases}$$

等价于非线性积分方程

$$u(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s+\dfrac{t-2}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+\dfrac{1-t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s \qquad t\in J_0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s+\dfrac{t-2}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+\dfrac{1-t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s+ \\ (t-2)\displaystyle\sum_{j=1}^{p}J_j(u(t_j))t_j+(t-1)\sum_{j=1}^{p}J_j(u(t_j))+(2-t)\sum_{j=1}^{p}I_j(u(t_j))+ \\ \displaystyle\sum_{j=k+1}^{p}(t_j-t)J_j(u(t_j))-\sum_{j=k+1}^{p}I_j(u(t_j)),\ t\in J_k,\ k=1,2,\cdots,p \end{cases}$$

证 必要性

假设 $u(t)$ 是方程(1) 的解，当 $t\in J_k$ 时，对方程(1) 中的第一个方程两边同时取 α 次积分，再由引理 1，对 $a_k,b_k\in\mathbb{R}(k=0,1,\cdots,p)$，有

$$ {}_0I_t^{\alpha}\,{}_0^{C}\mathrm{D}_t^{\alpha}u(t) = {}_0I_t^{\alpha}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s $$

$$ u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s + a_k + b_k t \tag{2} $$

$$ u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s + b_k \tag{3} $$

再由 $t_0=0$，$t_p=1$，以及 $u(0)+u'(1)=0$，$u'(0)+u(1)=0$，可得

$$ a_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s + b_p = 0 \tag{4} $$

$$ b_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s + a_p + b_p = 0 \tag{5} $$

又因为 $\Delta u'(t_k)=J_k(u(t_k))=u'(t_k^+)-u'(t_k^-)=b_k-b_{k-1}$，$\Delta u(t_k)=I_k(u(t_k))=u(t_k^+)-u(t_k^-)$，得

$$ b_k = b_p - \sum_{j=k+1}^{p} J_j(u(t_j)) \tag{6} $$

$$ a_k = a_p + \sum_{j=k+1}^{p} J_j(u(t_j))t_j - \sum_{j=k+1}^{p} I_j(u(t_j)) \tag{7} $$

将(6),(7) 式代入(4),(5) 式，且两式相减，可得

$$ b_p = \sum_{j=1}^{p} J_j(u(t_j))t_j + \sum_{j=1}^{p} J_j(u(t_j)) - \sum_{j=1}^{p} I_j(u(t_j)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s \tag{8} $$

$$ a_p = -2\sum_{j=1}^{p} J_j(u(t_j))t_j - \sum_{j=1}^{p} J_j(u(t_j)) - \frac{2}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s + 2\sum_{j=1}^{p} I_j(u(t_j)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s \tag{9} $$

将(8),(9) 式代入(6),(7) 式，得

$$ a_k = -2\sum_{j=1}^{p} J_j(u(t_j))t_j - \sum_{j=1}^{p} J_j(u(t_j)) - \frac{2}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s + 2\sum_{j=1}^{p} I_j(u(t_j)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s + \sum_{j=k+1}^{p} J_j(u(t_j))t_j - \sum_{j=k+1}^{p} I_j(u(t_j)) \tag{10} $$

$$ b_k = \sum_{j=1}^{p} J_j(u(t_j))t_j + \sum_{j=1}^{p} J_j(u(t_j)) - \sum_{j=1}^{p} I_j(u(t_j)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s - \sum_{j=k+1}^{p} J_j(u(t_j)) \tag{11} $$

因此，对 $k=0,1,\cdots,p-1$，当 $t\in(t_k, t_{k+1}]$ 时，有

$$ u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s + \frac{t-2}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s + \frac{1-t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s + (t-2)\sum_{j=1}^{p} J_j(u(t_j))t_j + (t-1)\sum_{j=1}^{p} J_j(u(t_j)) + (2-t)\sum_{j=1}^{p} I_j(u(t_j)) + \sum_{j=k+1}^{p} (t_j-t)J_j(u(t_j)) - \sum_{j=k+1}^{p} I_j(u(t_j)) $$

则必要性成立．另外，对积分方程两边分别求 α 次分数阶导数，易知其满足方程(1)，充分性成立．

2　主要内容

定义算子 $A: PC(J, \mathbb{R}) \longrightarrow PC(J, \mathbb{R})$，令算子

$$
\begin{aligned}
(Au)(t)= & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\mathrm{d}s+\frac{t-2}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} f(s,u(s))\mathrm{d}s+ \\
& \frac{1-t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\mathrm{d}s+ \\
& (t-2)\sum_{j=1}^{p} J_j(u(t_j))t_j+(t-1)\sum_{j=1}^{p} J_j(u(t_j))+(2-t)\sum_{j=1}^{p} I_j(u(t_j))+ \\
& \sum_{j=k+1}^{p}(t_j-t)J_j(u(t_j))-\sum_{j=k+1}^{p} I_j(u(t_j))
\end{aligned}
$$

在引理 5 中，令 $y(t)=f(t,u(t))$，则分数阶脉冲微分方程混合边值问题的解可以转化为 $Au=u$，分数阶脉冲微分方程(1) 有解当且仅当 A 有不动点.

定理 1　若满足以下条件：

(H_1) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(t,u)}{u}=0$，$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{I_k(u)}{u}=0$，$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{J_k(u)}{u}=0$.

则分数阶脉冲微分方程混合边值问题(1) 至少存在 1 个解.

证　令 $\Omega\subset PC(J,\mathbb{R})$ 有界. 由于 f,I_k 和 J_k 在 J 上连续，所以 A 连续. 由于 Ω 有界，则对 $\forall u\in\Omega$，存在常数 $L_1>0$，$L_2>0$，使得 $|f(t,u)|\leqslant L_1$，$|I_k(u)|\leqslant L_2$，$|J_k(u)|\leqslant L_3$，所以

$$
|(Au)(t)|\leqslant\frac{3L_1(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}+4pL_2+7pL_3=L
$$

即算子 A 在 Ω 上有界.

对 $\forall u\in PC(J,\mathbb{R})$，$\forall t,\tau\in J_k$，$k=0,1,\cdots,p$，当 $t\to\tau$ 时，$|(Au)(t)-(Au)(\tau)|\to 0$，即 A 等度连续. 再由引理 2 知，算子 A 是定义在 Ω 上的全连续算子.

由条件(H_1) 知，存在 $\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$，$\varepsilon_3>0$ 和常数 C，对 $\forall t\in J$，当 $\|u\|\leqslant R$ 时，有

$$
|f(t,u)|\leqslant\varepsilon_1|u|\qquad |I_k(u)|\leqslant\varepsilon_2|u|\qquad |J_k(u)|\leqslant\varepsilon_3|u|
$$

且使得$\dfrac{3(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\varepsilon_1+4p\varepsilon_2+7p\varepsilon_3\leqslant 1$ 成立. 令 $\Omega=\{u\in PC(J,\mathbb{R})\mid \|u\|\leqslant r\}$，取 $u\in PC(J,\mathbb{R})$ 且 $\|u\|=r$，即 $u\in\partial u$，有 $|f(t,u)|\leqslant\varepsilon_1|u|$，$|I_k(u)|\leqslant\varepsilon_2|u|$，$|J_k(u)|\leqslant\varepsilon_3|u|$. 所以

$$
|(Au)(t)|\leqslant\left[\frac{3(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\varepsilon_1+4p\varepsilon_2+7p\varepsilon_3\right]\|u(t)\|\leqslant\|u(t)\|
$$

即对 $\forall u\in\partial u$，$\|Au\|\leqslant\|u\|$. 由引理 3 知，分数阶脉冲微分方程混合边值问题(1) 至少存在 1 个解 $u\in\overline{\Omega}$.

定理 2　若满足以下条件：

(H_2) 对 $\forall t\in J_k$，$u\in PC(J,\mathbb{R})$，若存在常数 L_1,L_2，使得 $|f(t,u)|\leqslant L_1$，$|I_k(u)|\leqslant L_2$，$|J_k(u)|\leqslant L_3$.

则分数阶脉冲微分方程混合边值问题(1) 至少有 1 个解.

证　令

$$
V=\{u\in PC(J,\mathbb{R})\mid u=\mu Tu,\ 0<\mu<1\}
$$

则对 $\forall u\in V$，以及 $\forall t\in J_k$，有

$$
|u(t)|=\mu|(Au)(t)|\leqslant\frac{3\mu L_1(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}+4\mu pL_2+7\mu pL_3
$$

则对 $\forall t\in J$，有 $\|u\|\leqslant\dfrac{3\mu L_1(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}+4\mu pL_2+7\mu pL_3$. 所以集合 V 有界. 再由定理 1 可知，A 是全连续算子. 故由引理 4 可知，算子 A 在 $PC(J,\mathbb{R})$ 上至少有 1 个不动点，则分数阶脉冲微分方程混合边值问题(1) 至少有 1 个解.

定理 3　若满足以下条件：

(H_3) 对 $\forall t\in J$，$\forall u,v\in PC(J,\mathbb{R})$，存在非负常数 $l_k(k=1,2)$，满足 $\forall t_k\in J$，有

$$|I_k(u(t_k))-I_k(v(t_k))|\leqslant l_1|u-v| \qquad |J_k(u(t_k))-J_k(v(t_k))|\leqslant l_2|u-v|$$

(H_4) 存在非负连续函数 $L(t)$，使得 $\forall u,v\in PC(J,\mathbb{R})$，有 $|f(t,u)-f(t,v)|\leqslant L(t)|u-v|$. 且对 $\forall t\in J$，有 $\dfrac{3(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}L(t)+4pl_1+7pl_2<1$.

则方程(1)有唯一的解.

证　对 $\forall u(t),v(t)\in\Omega$，有

$$|(Au)(t)-(Av)(t)|\leqslant\left[\frac{3(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}L(t)+4pl_1+7pl_2\right]|u-v|$$

因此

$$\|Au-Av\|\leqslant\left[\frac{3(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}L(t)+4pl_1+7pl_2\right]\|u-v\|$$

由条件可知

$$\frac{3(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}L(t)+4pl_1+7pl_2<1$$

所以 A 是压缩映像. 故 A 有唯一的不动点，即混合边值问题(1)有唯一的解.

3　例　　子

$$\begin{cases}{}_0^C\mathrm{D}_t^{\frac{3}{2}}u(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}|u(t)|}{(100+\mathrm{e}^t)(1+|u(t)|)} & t\in[0,1],\ t\neq\dfrac{1}{4}\\ \Delta u\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{|u(t)|}{(t+5)^2(9+|u(t)|)},\ \Delta u'\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{|u(t)|}{(t+7)^2(12+|u(t)|)} & \\ u(0)+u'(1)=0,\ u(1)+u'(0)=0 & \end{cases}\tag{12}$$

对 $\forall u(t),v(t)$，$\forall t\in[0,1]$，有

$$|f(t,u)-f(t,v)|=\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{(100+\mathrm{e}^t)}\left|\frac{u}{1+u}-\frac{v}{1+v}\right|=\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{(100+\mathrm{e}^t)(1+u)(1+v)}|u-v|\leqslant$$
$$\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{(100+\mathrm{e}^t)}|u-v|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{101}|u-v|$$

显然，对 $u\in[0,+\infty)$ 及 $\forall t\in[0,1]$，有

$$|f(t,u)|=\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{(100+\mathrm{e}^t)}\left|\frac{u}{1+u}\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{(100+\mathrm{e}^t)}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{101}$$

取 $l_1=\dfrac{1}{25}$，$l_2=\dfrac{1}{49}$，因为 $1.33<\Gamma(2.5)<1.34$，则

$$\frac{3(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}L(t)+4l_1+7l_2<\frac{7.5}{\Gamma(2.5)}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{101}+\frac{4}{25}+\frac{1}{7}\leqslant$$
$$0.06+0.16+0.14=0.36<1$$

定理 3 中的所有假设满足，所以方程(12)有唯一解.

参考文献：

[1]　SAMKO S G, KILBAS A A, MARICHEV O L. Fractional Integrals and Derivatives (Theory and Applications) [M]. Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[2]　XING Y Y, YAN Y B. A Higher Order Numerical Method for Time Fractional Partial Differential Equations with Nonsmooth Data [J]. Journal of Computational Physics, 2018, 357: 305-323.

[3]　罗丽容，周　军. 一类带有分数型交错扩散的捕食-食饵模型的多解性研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(3)：108-114.

[4]　DELBOSCO D, RODINO L. Existence and Uniqueness for a Nonlinear Fractional Differential Equation [J]. Journal of

Mathematical Analysis & Applications, 1996, 204(2): 609-625.

[5] BAYOUR B, TORRES D F M. Existence of Solution to a Local Fractional Nonlinear Differential Equation [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 312: 127-133.

[6] 郭彩霞, 郭建敏, 田海燕, 等. 一类分数阶奇异 q-差分方程边值问题解的存在性和唯一性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(12): 6-10.

[7] MAHMUDOV N, UNUL S. On Existence of BVP's for Impulsive Fractional Differential Equations [J]. Advances in Difference Equations, 2017, 2017: 15.

[8] BENCHOHRA M, HENDERSON J, NTOUYAS S. Impulsive Differential Equations and Inclusions [M]. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006.

[9] SAMOILENKO A M, PERESTYUK N A. Impulsive Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific, 1995.

[10] WANG S A. The Existence of Affine-Periodic Solutions for Nonlinear Impulsive Differential Equations [J]. Boundary Value Problems, 2018, 2018(1): 113.

[11] HU Y X, LI F. Existence of Solutions for the Nonlinear Multiple Base Points Impulsive Fractional Differential Equations with the Three-Point Boundary Conditions [J]. Advances in Difference Equations, 2017, 2017(1): 55.

[12] WANG Q, WEI T Y. On the Natural Solution of Generalized Anti-periodic BVP of Impulsive Fractional Differential Equations [J]. Mathematic Applicata, 2017, 30(1): 78-89.

[13] BAI Z B, DONG X Y, YIN C. Existence Results for Impulsive Nonlinear Fractional Differential Equation with Mixed Boundary Conditions [J]. Boundary Value Problems, 2016, 2016(1): 63.

[14] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations [M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.

[15] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义(上册) [M]. 北京: 北京大学出版社, 2006.

[16] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2015.

Existence and Uniqueness of Solution for a Class of Caputo Fractional Impulsive Differential Equations with Mixed Boundary Value Problem

XING Yan-yuan[1,2], GUO Zhi-ming[1]

1. School of Mathematics and Information Sciences, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China;

2. Department of Mathematics, Lüliang University, Luliang Shanxi 033000, China

Abstract: In this paper, we study a class of Caputo fractional impulsive differential equations with the mixed boundary value problem of fractional order $\alpha \in (1, 2)$. Firstly, we transform the non-linear differential equation into an equivalent fractional integral equation. Secondly, by using the Leray-Schauder and Altman fixed point theorem, we obtain the existence and uniqueness of the solution. Finally, an example is given to demonstrate the validity of the main result, and relevant results are generalized and improved.

Key words: Caputo derivative; impulsive differential equation; fixed point theorem; mixed boundary value problem

责任编辑 廖 坤