第 41 卷第 8 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2019 年 8 月
Vol. 41 No. 8　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Aug. 2019

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.08.009

频繁超循环半群的(弱)混合性[①]

莫小梅，　舒永录

重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要： 对于单个算子而言，所有频繁超循环算子都是弱混合的，满足频繁超循环准则的算子都是拓扑混合的. 在单个频繁超循环算子的研究成果的基础上，再结合单个算子弱混合和混合的研究方法，进一步对单个频繁超循环算子和频繁超循环半群的相关性质进行了对比分析，主要讨论了频繁超循环 C_0-半群的相关性质. 首先，把 Erdös-Sárközy 定理推广到了在实数集上，给出了判定正实数集合是 syndetic 集的一个充分条件，即已知一个正实数集合有正的下密度，则这个集合的差集是 syndetic 的. 其次，证明了任意频繁超循环 C_0-半群是弱混合的. 最后，给出了判定 C_0-半群是混合的一个充分条件. 利用泛函分析的方法，证明了满足频繁超循环准则的 C_0-半群是混合的.

关　键　词： 频繁超循环；C_0-半群；弱混合；频繁超循环准则；混合

中图分类号：O177.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2019)08-0054-04

设 X 为无限维可分的 Banach 空间，$U, V \subset X$ 为任意非空开集. 如果存在 $n \geqslant 0$，使得 $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$，则称算子 T 是拓扑传递的. 如果 $T \oplus T$ 是拓扑传递的，则称 T 是弱混合的. 如果存在 $N \geqslant 0$，使得对 $\forall\, n \geqslant N$，有 $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$，则称 T 是混合的. 设 $A \subset \mathbb{N}_+$，如果序列 $(n_k)_k \subset A$ 单增，且 $\sup\limits_{k \geqslant 1}(n_{k+1} - n_k) < \infty$，则称 A 为 syndetic 集. A 为 syndetic 集等价于 $\mathbb{N}_+ \backslash A$ 中的连续整数区间的长度是有限的. 类似地，$M \subset \mathbb{R}_+$ 是 syndetic 集等价于 M 的补集 $\mathbb{R}_+ \backslash M$ 包含的区间长度是有限的. 文献[1]提出了频繁超循环算子这一概念. 设 $A \subset \mathbb{N}_+$，A 的下密度被定义为：

$$\underline{\mathrm{dens}}(A) = \liminf_{N \to \infty} \frac{\mathrm{card}\{n \leqslant N : n \in A\}}{N}$$

如果存在 $x \in X$(频繁超循环向量)，使得 $\underline{\mathrm{dens}}(N(x, U)) > 0$，则称 T 为频繁超循环的. 关于它的更多研究结果详见文献[2-4]. 文献[5]首次提出了 C_0-半群的超循环性. 如果 X 上的算子族 $(T_t)_{t \geqslant 0}$ 满足：$T_0 = I$；对 $\forall\, s, t > 0$ 有 $T_{t+s} = T_s T_t$；对 $\forall\, x \in X$，$t \geqslant 0$，有 $\lim\limits_{s \to t} T_s x = T_t x$，则称 $(T_t)_{t \geqslant 0}$ 为 C_0-半群. 如果存在 $t \geqslant 0$，使得 $T_t(U) \cap V \neq \varnothing$，则称 $(T_t)_{t \geqslant 0}$ 是拓扑传递的. 如果 $(T_t \oplus T_t)_{t \geqslant 0}$ 是拓扑传递的，则称 $(T_t)_{t \geqslant 0}$ 是弱混合的. 如果存在 $t_0 \geqslant 0$，使得对 $\forall\, t \geqslant t_0$，有 $T_t(U) \cap V \neq \varnothing$，则称 $(T_t)_{t \geqslant 0}$ 是混合的. 文献[6]将频繁超循环性引入到 C_0-半群. 设 $M \subset \mathbb{R}_+$ 为可测集，M 的下密度定义为

$$\underline{\mathrm{dens}}(M) = \liminf_{N \to \infty} \frac{\mu(M \cap [0, N])}{N}$$

其中 μ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的 Lebesgue 测度. 令 $(T_t)_{t \geqslant 0}$ 为 C_0-半群，如果存在 $x \in X$(频繁超循环向量)，使得 $\underline{\mathrm{dens}}\{R(x, U)\} > 0$，其中 $R(x, U) = \{t \in \mathbb{R}_+ : T_t(x) \in U\}$，则称 $(T_t)_{t \geqslant 0}$ 为频繁超循环半群. 学者们常常利用偏微分方程的解半群来探索 PDE 的本质. 因此一些特定的 PDE 的解半群的性质研究得到了更多的

---

① 收稿日期：2018-04-18

基金项目：重庆市自然科学基金项目(cstc2013jjB0050).

作者简介：莫小梅(1993-)，女，硕士研究生，主要从事泛函分析的研究.

青睐[7-8]，在生物、物理、化学、工程等领域都有重要的应用[9-11].

1 弱混合半群的一个判定定理

文献[12-13]利用回复集刻画了算子的弱混合性. 类似地，文献[14-15]证明了 C_0-半群 $(T_t)_{t\geqslant 0}$ 的弱混合性等价于对任意的非空开集 $U, V \subset X$ 和 0-邻域集 W，有 $R(U, W) \cap R(W, V) \neq \varnothing$，其中 $R(U, W) = \{t \geqslant 0: T_t(U) \cap W \neq \varnothing\}$. 本文的定理 1 将 Erdös-Sárközy 定理推广到了正实数集合上.

定理 1 设 $M \subset \mathbb{R}_+$ 有正的下密度，则 $D = M - M = \{n - m: n, m \in M, n \geqslant m\}$ 是 syndetic 集.

证 若 D 不是 syndetic 集，则存在 $(n_k)_k \subset \mathbb{R}_+$，使得对 $\forall k \in \mathbb{N}$ 都有 $t_1 + t_2 + \cdots + t_k \in \mathbb{R}_+ \setminus D$. 因为 $\underline{\mathrm{dens}}(M) > 0$，所以对 $\forall m > 0$，都有

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{\mu(M \cap [0, N])}{N} > \frac{1}{m}$$

令

$$M_k = M + (t_1 + t_2 + \cdots + t_k) \qquad k \in \mathbb{N}$$

则

$$\underline{\mathrm{dens}}(M_k) = \underline{\mathrm{dens}}(M) > \frac{1}{m}$$

对 $\forall k \leqslant m$，存在 $N \geqslant 1$，使得 $\mu(M_k \cap [0, N]) > \dfrac{N+1}{m}$. 设 $M_j \cap M_k = \varnothing (k = 1, \cdots, m)$，从而

$$N \geqslant \mu((M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_m) \cap [0, N]) = \sum_{k=1}^{m} \mu(M_k \cap [0, N]) > N + 1$$

矛盾. 因此，存在 $j < k$，使得 $M_j \cap M_k \neq \varnothing$，$t_{j+1} + \cdots + t_k \in D$，这与 t_k 的选取矛盾，所以 $M - M$ 是 syndetic 集.

利用定理 1 的结论，我们得到了频繁超循环 C_0-半群的弱混合性质：

定理 2 Fréchet 空间 X 上的频繁超循环 C_0-半群是弱混合的.

证 设 W 为 0-邻域集，$U, V \subset X$ 为非空开集，$(T_t)_{t\geqslant 0}$ 为 X 上的频繁超循环 C_0-半群，则存在非空开集 $U_0 \subset U$，使得 $T_{t_0}(U_0) \subset W$. 因为 $(T_t)_{t\geqslant 0}$ 是频繁超循环的，则存在 $t_0 \geqslant 0$，使得 $T_{t_0}(U) \cap W \neq \varnothing$. 设 x 是频繁超循环向量，则存在 $M \subset \mathbb{R}_+$，$\underline{\mathrm{dens}}(M) > 0$，使得 $T_t(x) \in U_0 (\forall t \in M)$. 又对 $\forall t, s \in M$，$t > s$，有 $T_{t_0+t-s}(T_s x) = T_{t_0}(T_t x) \in W$，从而

$$t_0 + M - M \subset R(U_0, W) \subset R(U, W)$$

则 $\underline{\mathrm{dens}}(R(U, W)) > 0$，故 $R(U, W)$ 是 syndetic 集. 因为 $(T_t)_{t\geqslant 0}$ 为 C_0-半群，则 $T_{-t}(W)$ 是 0-邻域集，即对 $\forall k \geqslant 0$，存在 0-邻域集 W_0，使得 $T_t(W_0) \subset W (0 \leqslant t \leqslant k)$. 由拓扑传递性知，存在 $s > k$，$y \in W_0$，使得 $T_s(y) \in V$，所以对 $\forall 0 \leqslant t \leqslant k$，有

$$T_{s-t}(T_t y) \in T_{s-t}(W) \cap V$$

即对 $\forall k \geqslant 0$，$R(W, V)$ 包含了长度为 k 的区间，所以 $R(U, W) \cap R(W, V) \neq \varnothing$，$(T_t)_{t\geqslant 0}$ 是弱混合的.

2 拓扑混合半群的一个判定定理

可分的 Fréchet 空间上满足频繁超循环准则的算子是拓扑混合的[3]，这一结论在 C_0-半群上也成立.

定理 3 设 X 为可分 Fréchet 空间，$(T_t)_{t\geqslant 0}$ 为 C_0-半群，如果 $(T_t)_{t\geqslant 0}$ 满足频繁超循环准则，即存在 $X_0 \subset X$，且 X_0 稠密，和一列映射 $S_t: X_0 \longrightarrow X (t > 0)$，使得对 $\forall x \in X_0$，有

(i) $T_t S_t x = x$，$T_t S_r x = S_{r-t} x (r > t > 0)$；

(ii) $t \longmapsto T_t x \,\mathrm{d}t$ 和 $t \longmapsto S_t x \,\mathrm{d}t$ 在 $[0, +\infty)$ 上是 Pettis 可积的.

则对 $\forall x \in X_0$，当 $t \to +\infty$ 时，有 $T_t x \to 0$，$S_t x \to 0$.

证 对任意有界线性泛函 $\varphi \in X^*$，$\forall x \in X_0$，有 $\varphi(T_t x) \to 0$. 否则，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $(t_n)_n \in \mathbb{R}_+$，

使得

$$|\varphi(T_{t_n}x)|>\varepsilon_0 \qquad \int_0^{+\infty}|\varphi(T_t x)|\,\mathrm{d}t>\sum_{i=1}^{+\infty}\int_{t_i-\delta}^{t_i+\delta}|\varphi(T_{t_i}x)|\,\mathrm{d}t\geqslant+\infty$$

矛盾.

设 $X_0=(y_l)_l\subset X$ 稠密且可数，则存在$\{N_l\}_{l\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$单增，对 $\forall\lambda\leqslant l$ 和紧集 $K\subset[N_l,+\infty)$，有

$$\left\|\int_K T_t y_\lambda\,\mathrm{d}t\right\|<\frac{1}{l2^l} \qquad \left\|\int_K S_t y_\lambda\,\mathrm{d}t\right\|<\frac{1}{l2^l}$$

令

$$z_n=\begin{cases}y_l & n\in A(l,N_l)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$x=\sum_{n\geqslant1}\int_n^{n+1}S_t z_n\,\mathrm{d}t \qquad u_l=\int_0^1 T_t y_l\,\mathrm{d}t$$

则 $\|T_{n+1}x-u_l\|<\frac{4}{2^l}$[16]. 因$(u_l)_l\subset X$ 的稠密性，则对 $\forall\varepsilon>0$，$T_t x\in X$，存在 u_{l_i}，使得 $\|T_t x-u_{l_i}\|<\varepsilon$. 从而存在 u_{l_1},u_{l_2}，当 l_1,l_2 充分大时，有

$$\|T_t x-u_{l_1}\|<\varepsilon \qquad \|T_s x-u_{l_2}\|<\varepsilon$$

故存在 $N>0$，当 $s,t>N$ 时，有

$$\|T_s x-T_t x\|\leqslant\|T_s x-u_{l_1}\|+\|u_{l_1}-T_{n+1}x\|+\|T_{n+1}x-u_{l_2}\|+\|u_{l_2}-T_t x\|\leqslant$$
$$\varepsilon+\frac{4}{2^{l_1}}+\frac{4}{2^{l_2}}+\varepsilon$$

因此$(T_t x)_t$ 依范数收敛. 由极限的唯一性知 $T_t x\to0(\forall x\in X_0)$.

对 $\forall x\in X_0$，有 $S_r x\in X$，$X_0\subset X$ 稠密，则对 $\forall\delta>0$，存在 $x_\delta\in X_0$，使得 $\|S_r x-x_\delta\|<\delta$. 因 T_{r-t} 是连续的，故对 $\forall\varepsilon_0>0$，存在$\delta_0(x_\delta=x_{\delta_0})$，当 $\|S_r x-x_{\delta_0}\|<\delta_0$ 时，有 $\|T_{r-t}(S_r x-x_{\delta_0})\|<\varepsilon_0$. 易知 $\|T_{r-t}x_{\delta_0}\|<\varepsilon_0$，于是

$$\|S_t x\|=\|T_{r-t}S_r x\|\leqslant\|T_{r-t}(S_r x-x_{\delta_0})\|+\|T_{r-t}x_{\delta_0}\|<2\varepsilon_0$$

故 $S_t x\to0(\forall x\in X_0)$.

参考文献：

[1] BAYART F, GRIVAUX S. Frequently Hypercyclic Operators [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2006, 358(11): 5083-5117.

[2] BAYART F, GRIVAUX S. Hypercyclicité: Le Rôle Du Spectre Ponctuel Unimodulaire [J]. Comptes Rendus Mathematique, 2004, 338(9): 703-708.

[3] BONILLA A, GROSSE-ERDMANN K G. Frequently Hypercyclic Operators and Vectors-Erratum [J]. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2007, 27(2): 383-404.

[4] BAYART F, GRIVAUX S. Invariant Gaussian Measures for Operators on Banach Spaces and Linear Dynamics [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 2007, 94(1): 181-210.

[5] SCHAPPACHER W, DESCH W, WEBB G F. Hypercyclic and Chaotic Semigroups of Linear Operators [J]. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1997, 17(4): 793-819.

[6] BADEA C, GRIVAUX S. Unimodular Eigenvalues, Uniformly Distributed Sequences and Linear Dynamics [J]. Advances in Mathematics, 2007, 211(2): 766-793.

[7] 陈仕洲. 一类 Lienard 型 p-Laplacian 方程周期解的存在性和唯一性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(1): 6-11.

[8] 姜瑞廷，唐春雷. 带有 Hardy-Sobolev-Maz'ya 项及 Hardy-Sobolev 临界指数的半线性椭圆方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(6): 50-55.

[9] CONEJERO J A, MARTÍNEZ-GIMÉNEZ F, PERIS A, et al. Chaotic Asymptotic Behaviour of the Solutions of the Lighthill-Whitham-Richards Equation [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 84(1): 127-133.

[10] HUNG C H, CHANG Y H. Frequently Hypercyclic and Chaotic Behavior of Some First-Order Partial Differential Equation [J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: 1-6.

[11] CONEJERO J A, LIZAMA C, MURILLO-ARCILA M. Chaotic Semigroups from Second Order Partial Differential Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 456(1): 402-411.

[12] BERNAL-GONZALEA L, GROSSE-ERDMANN K G. The Hypercyclicity Criterion for Sequences of Operators [J]. Studia Mathematica, 2003, 157(1): 17-32.

[13] LEON-SAAVEDAR F. Notes about the Hypercyclicity Criterion [J]. Mathematica Slovaca, 2003, 3(3): 313-319.

[14] GROSSE-ERDMANN K G, PERIS A. Frequently Dense Orbits [J]. Comptes Rendus Mathematique, 2005, 341(2): 123-128.

[15] BERNAL-GONZALEA L, GROSSE-ERDMANN K G. Existence and Nonexistence of Hypercyclic Semigroups [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2007, 135(3): 755-766.

[16] MANGINO E M, PERIS A. Frequently Hypercyclic Semigroups [J]. Studia Mathematica, 2011, 202(3): 227-242.

The (Weakly) Mixing Property of Frequently Hypercyclic Semigroups

MO Xiao-mei, SHU Yong-lu

School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

Abstract: For a single operator, frequently hypercyclic operators are weakly mixing, and operators satisfying the frequent hypercyclcity criterion are topologically mixing. Based on the results in the researches of single frequently hypercyclic operators, we use the research methods of weak mixing and mixing to make a comparative analysis of the related properties of frequently hypercyclic operators with frequently hypercyclic semigroups, with the focus of discussion placed on the properties of frequently hypercyclic C_0-semigroups. First, we generalize the Erdös-Sárközy theorem to real number sets, and give a sufficient condition for judging positive real number sets to be syndetic sets, that is, if a known positive real number set has positive lower density, then its difference set is syndetic. Next, we prove that any frequent hypercyclic C_0-semigroup is weak mixing. Finally, we give a sufficient condition for C_0-semigroupsto be mixing. With the method of functional analysis, we prove that C_0-semigroups satisfying the frequent hypercyclcity criterion are mixing.

Key words: frequent hypercyclicity; C_0-semigroup; weak mixing; frequent hypercyclicity criterion; mixing

责任编辑 廖 坤