第 41 卷第 9 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2019 年 9 月
Vol. 41　No. 9　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Sep.　2019

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.09.010

E-拟 α-预不变型凸函数与最优化[①]

王子元[1,2]，　王泾晶[1]，　彭再云[1]，　邵重阳[1]，　周大琼[1]

1. 重庆交通大学 数学与统计学院，重庆 400074；
2. 英属哥伦比亚大学 数学系，加拿大 英属哥伦比亚省 基隆拿 V1V1V7

摘要：研究了 E-拟 α-预不变型凸函数的性质与应用. 首先，给出了 E-拟 α-预不变凸函数的定义，用例子说明了其存在性，并给出了在条件 A 与条件 B 下(半)严格 E-拟 α-预不变凸函数的等价刻画. 其次，提出了 E-拟 α-预不变凸条件下的一类约束优化问题(NP1)，证明了问题(NP1)可行解集、最优解集的 E-α-不变凸性，并给出了问题(NP1)局部最优解的性质. 最后，讨论了 E-α-预不变凸函数的性质，给出了该类函数的等价刻画，获得了不等式约束下 E-α-预不变凸多目标规划问题(MOP1)的最优性结果，并举例验证了所得结论的正确性.

关　键　词：E-拟 α-预不变凸函数；非线性规划问题；最优性条件；E-α-预不变凸函数

中图分类号：O221.2　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2019)09-0077-10

凸性与广义凸性在最优化理论的研究中起着重要的作用. 近年来，许多学者对凸函数进行了推广，得到了一系列广义凸函数[1-9].

文献[10]研究了 α-预不变凸函数的性质. 文献[11]把文献[10]的结论推广到了拟 α-预不变凸函数，并在一定假设下给出了拟 α-预不变凸函数、(半)严格拟 α-预不变凸函数的充要条件.

本文将文献[11]的结果进一步推广，研究了 E-拟 α-预不变凸性与 E-α-预不变凸性和它们在最优化问题中的应用.

1　预备知识

设 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧几里得空间，K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空子集，$f: K \longrightarrow \mathbb{R}$ 与 $\alpha: K \times K \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 为实值函数，$\eta: K \times K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 为向量值函数.

定义 1[6]　如果对于 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$，$\forall \lambda \in [0, 1]$，存在向量值映射 $\eta: K \times K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 使得 $\boldsymbol{y} + \lambda\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in K$，则称 K 是关于 α 与 η 的 α-不变凸集.

定义 2[6]　设 K 是关于 α 与 η 的 α-不变凸集. 若 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$，$\forall \lambda \in [0, 1]$，满足

$$f(\boldsymbol{y} + \lambda\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \leqslant \max\{f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\}$$

---

① 收稿日期：2017-12-18
基金项目：重庆市自然科学基金资助项目(cstc2018jcyjAX0337)；重庆市创新团队资助项目(CXTDX201601022)；重庆交通大学研究生教育创新基金项目(2019S0123)；最优化与控制重庆市重点实验室开放课题(CSSXKFKTZ201801)；重庆市巴渝学者计划资助项目.
作者简介：王子元(1996-)，男，硕士研究生，主要从事凸分析与变分分析研究.
通信作者：彭再云，教授.

则称 f 是关于 α 与 η 的拟 α-预不变凸函数.

设存在映射 $E:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. 下面给出 E-α-不变凸集的定义.

定义3 如果 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$, $\forall \lambda\in[0,1]$, 满足 $E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\in K$, 则称 K 是关于 α 与 η 的 E-α-不变凸集.

例1 设 $K=[-1,0]$, 对 $\forall x\in K$, $E(x)=|x|-1$. 对 $\forall x,y\in K$, 令

$$\alpha(x,y)=\begin{cases} xy & \text{若 } x\neq 0 \text{ 且 } y\neq 0 \\ 1 & \text{若 } x,y \text{ 至少一个为零}\end{cases}$$

$$\eta(x,y)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2x} & \text{若 } x\neq 0 \text{ 且 } y\neq 0 \\ 0 & \text{若 } x,y \text{ 至少一个为零}\end{cases}$$

分析 1) 当 $x\neq -1$ 且 $y\neq -1$ 时, 对于 $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$, 有 $E(y)+\lambda\alpha(E(x),E(y))\eta(E(x),E(y))=\left(\dfrac{\lambda}{2}-1\right)(1+y)\in K$.

2) 当 x,y 至少一个为 -1 时, 对于 $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$, 有 $E(y)+\lambda\alpha(E(x),E(y))\eta(E(x),E(y))=-y-1\in K$, 故 K 是关于 α 与 η 的 E-α-不变凸集.

定义4 设 K 是关于 α 和 η 的 E-α-不变凸集. 若对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))\leqslant \lambda f(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f(E(\boldsymbol{y}))$$

则称 f 是关于 α 与 η 的 E-α-预不变凸函数.

定义5 设 K 是关于 α 和 η 的 E-α-不变凸集. 若对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))\leqslant \max\{f(E(\boldsymbol{x})),f(E(\boldsymbol{y}))\}$$

则称 f 是关于 α 与 η 的 E-拟 α-预不变凸函数.

注1 由定义4与定义5可知, E-拟 α-预不变凸函数是 E-α-预不变凸函数的真推广. 但反之, E-拟 α-预不变凸函数不一定是 E-α-预不变凸函数.

下例说明 E-拟 α-预不变凸函数的存在性.

例2 设 $K=(0,1]$, 对 $\forall x\in K$, $E(x)=x^2$. 对 $\forall x,y\in K$, 令 $\alpha(x,y)=xy$, $\eta(x,y)=\dfrac{x-y}{xy}$. 定义 $f:K\longrightarrow\mathbb{R}$ 为 $f(x)=x^2$.

分析 容易证明 K 是关于 α 和 η 的 E-α-不变凸集. 对于 $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$, 有

$$\begin{aligned}&f(E(y)+\lambda\alpha(E(x),E(y))\eta(E(x),E(y)))=f(\lambda x^2+(1-\lambda)y^2)=\\&\lambda^2x^4+(1-\lambda)^2y^4+2\lambda(1-\lambda)x^2y^2\leqslant\lambda^2x^4+(1-\lambda)^2y^4+\lambda(1-\lambda)(x^4+y^4)=\\&(1-\lambda)y^4+\lambda x^4=(1-\lambda)f(E(y))+\lambda f(E(x))\leqslant\max\{f(E(x)),f(E(y))\}\end{aligned}$$

则 f 是关于 α 与 η 的 E-拟 α-预不变凸函数.

下例说明 E-拟 α-预不变凸函数不一定是 E-α-预不变凸函数.

例3 设 $K=[-1,1]\times[-1,1]$, 对 $\forall(x,y)\in K$, $E(x,y)=(x^2,y^2)$. 对 $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in K$, 令 $\alpha((x_1,y_1),(x_2,y_2))=x_1y_2+2$, $\eta((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\left(\dfrac{x_1-x_2}{x_1y_2+2},\dfrac{y_1-y_2}{x_1y_2+2}\right)$. 定义 $g:K\longrightarrow\mathbb{R}$ 为 $g(x,y)=y^2-x^3$(图1,2).

分析 根据图1,2及定义5, 易知 g 是关于 α 与 η 的 E-拟 α-预不变凸函数. 取 K 上两点 $\boldsymbol{\omega}=(0,1)$ 与 $\boldsymbol{v}=(1,1)$, 令 $\lambda=\dfrac{1}{2}$, 有

$$g(E(\boldsymbol{v})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{\omega}),E(\boldsymbol{v}))\eta(E(\boldsymbol{\omega}),E(\boldsymbol{v})))=g\left(\frac{1}{2},1\right)=0.875>\frac{1}{2}g(0,1)+\frac{1}{2}g(1,1)=0.5$$

则 g 不是关于 α 与 η 的 E-α-预不变凸函数.

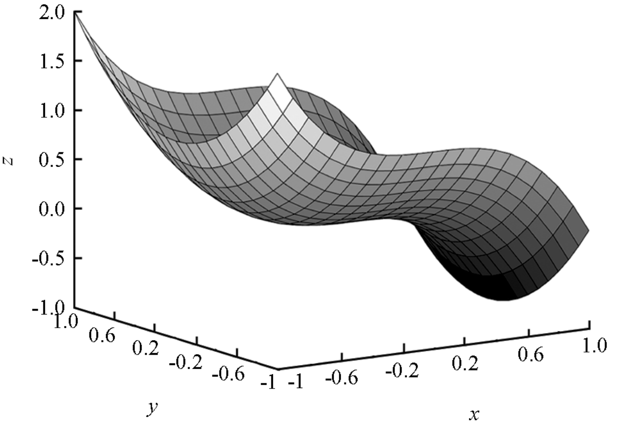

图 1　$g(x,y)=y^2-x^3$

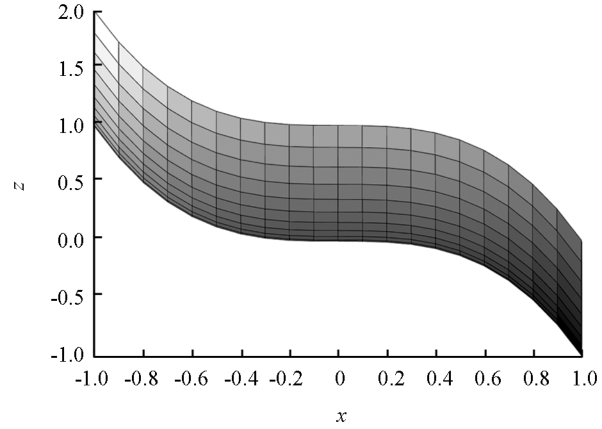

图 2　$g(x,y)=y^2-x^3$

定义 6[12]　设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是非空凸集，f 是定义在 K 上的函数.

1）如果对于 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$$

则称 f 是 K 上的拟凸函数；

2）如果对于 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，$\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})<\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$$

则称 f 是 K 上的严格拟凸函数；

3）如果对于 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y})$，$\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})<\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$$

则称 f 是 K 上的半严格拟凸函数.

将严格和半严格拟凸函数进行推广，可分别得到严格与半严格 E-拟 α-预不变凸函数的定义.

定义 7　设 K 是关于 α 和 η 的 E-α-不变凸集，f 是定义在 K 上的函数.

1）若对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$E(\boldsymbol{x})\neq E(\boldsymbol{y})$，$\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))<\max\{f(E(\boldsymbol{x})),f(E(\boldsymbol{y}))\}$$

则称 f 是关于 α 与 η 的严格 E-拟 α-预不变凸函数；

2）若对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$f(E(\boldsymbol{x}))\neq f(E(\boldsymbol{y}))$，$\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))<\max\{f(E(\boldsymbol{x})),f(E(\boldsymbol{y}))\}$$

则称 f 是关于 α 与 η 的半严格 E-拟 α-预不变凸函数.

2　E-拟 α-预不变凸性与约束优化问题

本节将讨论(半)严格 E-拟 α-预不变凸函数的充要条件，及 E-拟 α-预不变凸型约束优化问题的最优性结果. 下面给出后面将用到的关于映射 α 和 η 的一个重要引理.

引理 1　设 K 是关于映射 α 与 η 的 E-α-不变凸集，且 $E(\cdot)$ 是满射. 若对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$\eta(E(\boldsymbol{y}),E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))=-\lambda\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))$$

$$\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))=\alpha(E(\boldsymbol{y}),E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))$$

则对 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in(0,1]$,有

$$\eta(E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})),E(\boldsymbol{y})+\lambda_2\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))=(\lambda_1-\lambda_2)\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))$$

且

$$\alpha(E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})),E(\boldsymbol{y})+\lambda_2\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))=\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))$$

证 根据假设,有

$$\begin{aligned}&\eta(E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})),E(\boldsymbol{y})+\lambda_2\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))=\\&\eta(E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})),E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))+\\&(\lambda_2-\lambda_1)\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))=\\&\eta(E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})),E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))+\\&\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1}\right)\alpha(E(\boldsymbol{y}),E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))\eta(E(\boldsymbol{y}),E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\\&\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))))=-\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1}\eta(E(\boldsymbol{y}),\\&E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))(\lambda_1-\lambda_2)\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&\alpha(E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})),E(\boldsymbol{y})+\lambda_2\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))=\\&\alpha(E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})),E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))+\\&\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1}\alpha(E(\boldsymbol{y}),E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))\eta(E(\boldsymbol{y}),E(\boldsymbol{y})+\\&\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))))=\\&\alpha(E(\boldsymbol{y}),E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))=\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\end{aligned}$$

我们给出条件 A 与条件 B 的定义.

条件 A 设 K 是关于映射 α 与 η 的 E-α-不变凸集. 称函数 f 满足条件 A,如果对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,有

$$f(E(\boldsymbol{y})+\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))\leqslant f(E(\boldsymbol{x}))$$

条件 B 设 K 是关于映射 α 与 η 的 E-α-不变凸集. 称 α 与 η 满足条件 B,如果对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$\eta(E(\boldsymbol{y}),E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))=-\lambda\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))$$

$$\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))=(1-\lambda)\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))$$

借助条件 A 与条件 B,我们给出严格与半严格 E-拟 α-预不变凸函数的等价刻画.

定理 1 设 K 是关于 α 与 η 的 E-α-不变凸集,映射 $E(\cdot)$ 是满射,且 f 满足条件 A,η 满足条件 B. 若对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$E(\boldsymbol{x})\neq E(\boldsymbol{y})$,$\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\neq 0,\ \eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\neq 0$$

且

$$\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))=\alpha(E(\boldsymbol{y}),E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))$$

成立,则 f 在 K 上是关于映射 α 与 η 的严格 E-拟 α-预不变凸函数,当且仅当对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\forall\lambda\in(0,1]$,$g(\lambda)=f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})))$ 是严格拟凸的.

证　先证定理的必要性. 设 $g(\lambda)=f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))$ 是严格拟凸的. 根据定义，对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$E(\boldsymbol{x})\neq E(\boldsymbol{y})$，$\forall\lambda\in[0, 1]$，

$$f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))=g(\lambda)=g(1\cdot\lambda+0\cdot(1-\lambda))<$$
$$\max\{g(1), g(0)\}=\max\{f(E(\boldsymbol{y})+\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))), f(E(\boldsymbol{y}))\}$$

根据条件 A，可知

$$f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))<\max\{f(E(\boldsymbol{x})), f(E(\boldsymbol{y}))\}$$

即 f 是关于映射 α 与 η 的严格 E-拟 α-预不变凸函数.

再证定理的充分性. 设 f 是关于映射 α 与 η 的严格 E-拟 α-预不变凸函数. 根据定义，对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$E(\boldsymbol{x})\neq E(\boldsymbol{y})$，$\forall\lambda\in[0, 1]$，有

$$f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))<\max\{f(E(\boldsymbol{x})), f(E(\boldsymbol{y}))\}$$

由条件可知 $E(\boldsymbol{x})\neq E(\boldsymbol{y})$ 时有 $\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\neq 0$，$\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\neq 0$ 成立，则对于 $\forall\lambda_1,\lambda_2,\beta\in[0, 1]$，$\lambda_1\neq\lambda_2$(不失一般性，假设 $\lambda_2<\lambda_1$)，有

$$E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\neq$$
$$E(\boldsymbol{y})+\lambda_2\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})),\ \forall E(\boldsymbol{x})\neq E(\boldsymbol{y})$$

根据引理 1，下列不等式成立

$$g(\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2)=f(E(\boldsymbol{y})+(\beta\lambda_1+(1-\beta)\lambda_2)\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))=$$
$$f(E(\boldsymbol{y})+\lambda_2\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))+\beta(\lambda_1-\lambda_2)\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))=$$
$$f(E(\boldsymbol{y})+\lambda_2\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))+\beta\alpha(E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))$$
$$E(\boldsymbol{y})+\lambda_2\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))\eta(E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})), E(\boldsymbol{y})+$$
$$\lambda_2\alpha(E(\boldsymbol{x})E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))<$$
$$\max\{f(E(\boldsymbol{y})+\lambda_1\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))), f(E(\boldsymbol{y})+\lambda_2\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))\}=$$
$$\max\{g(\lambda_1), g(\lambda_2)\}$$

即 $g(\lambda)$ 为严格拟凸函数，证毕.

使用类似方法，可以得到关于半严格 E-拟 α-预不变凸函数的如下刻画.

定理 2　设 K 是关于 α 与 η 的 E-α-不变凸集，映射 $E(\cdot)$ 是满射，且 f 满足条件 A，η 满足条件 B. 若对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$f(E(\boldsymbol{x}))\neq f(E(\boldsymbol{y}))$，$\forall\lambda\in[0, 1]$，有 $\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))=\alpha(E(\boldsymbol{y}), E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))$ 成立，则 f 在 K 上是关于映射 α 与 η 的半严格 E-拟 α-预不变凸函数，当且仅当对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\forall\lambda\in[0, 1]$，$g(\lambda)=f(E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))$ 是半严格拟凸的.

考虑如下非线性规划问题(NP1)

$$\begin{aligned}&\min\quad f(E(\boldsymbol{x}))\\ &\text{s.t.}\quad g_i(E(\boldsymbol{x}))\leqslant b_i\qquad i=1,2,3,\cdots,n\\ &\qquad \boldsymbol{x}\in K\end{aligned}$$

其中：K 是关于映射 α 与 η 的 E-α-不变凸集；函数 $f,g_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 为关于映射 α 与 η 的 E-拟 α-预不变凸函数.

规定

$$I=\{1,2,3,\cdots,n\},\ X_i=\{\boldsymbol{x}\mid g_i(E(\boldsymbol{x}))\leqslant b_i,\ \boldsymbol{x}\in K\}$$
$$X=\{\boldsymbol{x}\mid g_i(E(\boldsymbol{x}))\leqslant b_i,\ i=1,2,3,\cdots,n,\ \boldsymbol{x}\in K\}$$

使用与文献[5]在引理 2 中类似的证明方法，可以得到引理 2.

引理2 若 $K_i(i \in I)$ 皆为关于同一 α 与 η 的 E-α-不变凸集，则集合 $\bigcap_{i\in I} K_i$ 仍然是关于同一 α 与 η 的 E-α-不变凸集.

下面给出问题(NP1)的3个最优性结果.

定理3 非线性规划问题(NP1)的可行解集是关于映射 α 与 η 的 E-α-不变凸集.

证 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是问题(NP1)的可行解，则对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X_i$，$\forall \lambda \in [0,1]$，有

$$E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})) \in K$$

由 $g_i(\boldsymbol{x})$ 的 E-拟 α-预不变凸性可知，对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X_i$，$\forall \lambda \in [0,1]$ 有

$$g_i(E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))) \leqslant \max\{g_i(E(\boldsymbol{x})),g_i(E(\boldsymbol{y}))\} \leqslant b_i$$

即

$$E(\boldsymbol{y})+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})) \in X_i$$

则 X_i 是关于映射 α 与 η 的 E-α-不变凸集.

因为 $X=\bigcap_{i\in I} X_i$，根据引理2可知 X 是关于映射 α 与 η 的 E-α-不变凸集，证毕.

定理4 非线性规划问题(NP1)的最优解集 S 是关于映射 α 与 η 的 E-α-不变凸集.

证 设 $\boldsymbol{x}_1^*,\boldsymbol{x}_2^*$ 是问题(NP1)的最优解，

$$f^*=\min f(E(\boldsymbol{x}))$$

则有

$$\boldsymbol{x}_1^*,\boldsymbol{x}_2^* \in S,\ f(E(\boldsymbol{x}_1^*))=f(E(\boldsymbol{x}_2^*))=f^*$$

由定理3得可行解集 X 是关于映射 α 与 η 的 E-α-不变凸集，故

$$E(\boldsymbol{x}_2^*)+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}_1^*),E(\boldsymbol{x}_2^*))\eta(E(\boldsymbol{x}_1^*),E(\boldsymbol{x}_2^*)) \in X,\ \forall \lambda \in [0,1]$$

对 $\forall \boldsymbol{x}_1^*,\boldsymbol{x}_2^* \in S$，$\forall \lambda \in [0,1]$，有

$$f(E(\boldsymbol{x}_2^*)+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}_1^*),E(\boldsymbol{x}_2^*))\eta(E(\boldsymbol{x}_1^*),E(\boldsymbol{x}_2^*))) \leqslant \max\{f(E(\boldsymbol{x}_1^*)),f(E(\boldsymbol{x}_2^*))\}=f^* \tag{1}$$

根据(1)式可知对 $\forall \boldsymbol{x}_1^*,\boldsymbol{x}_2^* \in S$，$\forall \lambda \in [0,1]$，有

$$E(\boldsymbol{x}_2^*)+\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}_1^*),E(\boldsymbol{x}_2^*))\eta(E(\boldsymbol{x}_1^*),E(\boldsymbol{x}_2^*)) \in S$$

即 S 是关于映射 α 与 η 的 E-α-不变凸集，证毕.

定理5 如果 $\boldsymbol{x}^*$ 是非线性规划问题(NP1)的局部最优解，则 $\boldsymbol{x}^*$ 是(NP1)的全局最优解.

证 设 $\boldsymbol{x}^*$ 是(NP1)的局部最优解，则存在 $\delta>0$，使得

$$f(E(\boldsymbol{x}^*))<f(E(\boldsymbol{x})),\ \forall \boldsymbol{x} \in X \cap B(\boldsymbol{x}^*;\delta)$$

其中 $B(\boldsymbol{x}^*;\delta)=\{\boldsymbol{x} \mid 0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\| \leqslant \delta,\ \boldsymbol{x} \in K\}$. 若 $\boldsymbol{x}^*$ 不是问题(NP1)的全局最优解，则必存在 $\bar{\boldsymbol{x}} \in X(\bar{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{x}^*)$，使得 $f(E(\bar{\boldsymbol{x}}))<f(E(\boldsymbol{x}^*))$.

由于 f 是关于映射 α 与 η 的 E-拟 α-预不变凸函数，对 $\forall \lambda \in [0,1]$，有

$$\begin{aligned}&f(E(\boldsymbol{x}^*)+\lambda\alpha(E(\bar{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*))\eta(E(\bar{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*))) \leqslant \\ &\max\{f(E(\bar{\boldsymbol{x}})),f(E(\boldsymbol{x}^*))\}=f(E(\boldsymbol{x}^*))\end{aligned}$$

取

$$\bar{\lambda}=\min\left\{1,\ \frac{\delta}{\|\alpha(E(\bar{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*))\eta(E(\bar{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*))\|}\right\}$$

显然有 $\bar{\lambda} \in (0,1]$. 对 $\forall \lambda \in [0,\bar{\lambda}]$，令

$$\boldsymbol{x}=E(\boldsymbol{x}^*)+\lambda\alpha(E(\bar{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*))\eta(E(\bar{\boldsymbol{x}}),E(\boldsymbol{x}^*))$$

则

$$\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \| = \lambda \| \alpha(E(\bar{\boldsymbol{x}}), E(\boldsymbol{x}^*)) \eta(E(\bar{\boldsymbol{x}}), E(\boldsymbol{x}^*)) \| \leqslant \delta$$

由定理 3 可知 $\boldsymbol{x} \in X$，则 $\boldsymbol{x} \in X \cap B(\boldsymbol{x}^*; \delta)$，且 $f(E(\boldsymbol{x})) \leqslant f(E(\boldsymbol{x}^*))$，这与 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(NP1) 的局部最优解矛盾．故 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(NP1) 的全局最优解，证毕.

例 4　考虑下面的非线性规划问题(NP2)

$$\begin{aligned} \min \quad & f(E(x)) \\ \text{s.t.} \quad & g(E(x)) \leqslant 2 \\ & x \in K \end{aligned}$$

其中集合 $K = (0, \frac{1}{2}]$，$E(x) = x^2 + \frac{1}{4}$．定义 $g(x) = \log_2(1 - x)$，$f(x) = x^2 - x + 1$．对 $\forall x, y \in K$，令 $\alpha(x, y) = xy$，$\eta(x, y) = \frac{x - y}{xy}$．由定义 3 和定义 4 易知集合 A 是关于 α 和 η 的 E-α-不变凸集，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是关于 α 和 η 的 E-拟 α-预不变凸函数.

(NP2) 的可行解集为 $X = \left\{ x \mid 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \right\}$．易知 $x = \frac{1}{2}$ 为问题(NP2) 的局部最优解，且是问题(NP2) 的全局最优解．该结果验证了定理 5.

3　E-α-预不变凸性与多目标规划

本节主要讨论 E-α-预不变凸性以及其在一类多目标规划问题中的应用．首先给出关于 α 与 η 的 E-α-预不变凸函数的两个性质.

定理 6　设 f 是 K 上关于 α 与 η 的 E-α-预不变凸函数，且 f 可微．若 $\nabla f \geqslant (\leqslant) 0$，且对于 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$，$\alpha$，$\eta$ 满足 $\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})) \eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})) \geqslant (\leqslant) E(\boldsymbol{x}) - E(\boldsymbol{y})$，则下列不等式成立：

$$f(E(\boldsymbol{x})) - f(E(\boldsymbol{y})) \geqslant \nabla f(E(\boldsymbol{y}))^{\mathrm{T}} (E(\boldsymbol{x}) - E(\boldsymbol{y}))$$

证　根据 $\nabla f \geqslant (\leqslant) 0$，$\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})) \eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})) \geqslant (\leqslant) E(\boldsymbol{x}) - E(\boldsymbol{y})$ 成立，对 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$，$\forall \lambda \in [0, 1]$，有

$$f(E(\boldsymbol{y}) + \lambda(E(\boldsymbol{x}) - E(\boldsymbol{y}))) \leqslant f(E(\boldsymbol{y}) + \lambda \alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})) \eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))) \tag{2}$$

由 E-α-预不变凸函数的定义可知，对 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$，$\forall \lambda \in [0, 1]$，有

$$f(E(\boldsymbol{y}) + \lambda \alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})) \eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))) \leqslant \lambda f(E(\boldsymbol{x})) + (1 - \lambda) f(E(\boldsymbol{y})) \tag{3}$$

由(2),(3) 式可知，下列不等式成立

$$f(E(\boldsymbol{y}) + \lambda(E(\boldsymbol{x}) - E(\boldsymbol{y}))) \leqslant \lambda f(E(\boldsymbol{x})) + (1 - \lambda) f(E(\boldsymbol{y}))$$

$$f(E(\boldsymbol{y}) + \lambda(E(\boldsymbol{x}) - E(\boldsymbol{y}))) \leqslant f(E(\boldsymbol{y})) + \lambda(f(E(\boldsymbol{x})) - f(E(\boldsymbol{y})))$$

$$f(E(\boldsymbol{y}) + \lambda(E(\boldsymbol{x}) - E(\boldsymbol{y}))) - f(E(\boldsymbol{y})) \leqslant \lambda(f(E(\boldsymbol{x})) - f(E(\boldsymbol{y}))) \tag{4}$$

当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$ 时，(4) 式恒成立．现考虑 $\lambda \in (0, 1)$ 时的情况，显然有

$$f(E(\boldsymbol{x})) - f(E(\boldsymbol{y})) \geqslant \frac{f(E(\boldsymbol{y}) + \lambda(E(\boldsymbol{x}) - E(\boldsymbol{y}))) - f(E(\boldsymbol{y}))}{\lambda}$$

当 $\lambda \to 0^+$ 时，得到不等式 $f(E(\boldsymbol{x})) - f(E(\boldsymbol{y})) \geqslant \nabla f(E(\boldsymbol{y}))^{\mathrm{T}} (E(\boldsymbol{x}) - E(\boldsymbol{y}))$，证毕.

定理 7　设 K 是关于映射 α 与 η 的 E-α-不变凸集，$E(\cdot)$ 是满射．函数 f 满足条件 A，映射 η 满足条件 B．若对 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$，$\forall \lambda \in [0, 1]$，有

$$\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})) = \alpha(E(\boldsymbol{y}), E(\boldsymbol{y}) + \lambda \alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})) \eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))$$

成立，则函数 f 是关于 α 和 η 的 E-α-预不变凸函数当且仅当对 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$，$\forall \lambda \in [0, 1]$，$g(\lambda) = f(E(\boldsymbol{y}) +$

$\lambda\alpha(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y}))\eta(E(\boldsymbol{x}), E(\boldsymbol{y})))$ 为凸函数.

证 利用定理 1 的方法可类似证明.

考虑下列多目标规划问题(MOP1)

$$\begin{aligned} \min \quad & f(E(\boldsymbol{x}))=(f_1(E(\boldsymbol{x})), f_2(E(\boldsymbol{x})), \cdots, f_m(E(\boldsymbol{x}))) \\ \text{s.t.} \quad & g(E(\boldsymbol{x}))=(g_1(E(\boldsymbol{x})), g_2(E(\boldsymbol{x})), \cdots, g_n(E(\boldsymbol{x}))) \leqslant 0 \\ & h(E(\boldsymbol{x}))=(h_1(E(\boldsymbol{x})), h_2(E(\boldsymbol{x})), \cdots, h_p(E(\boldsymbol{x})))=0 \\ & \boldsymbol{x} \in K \end{aligned}$$

其中 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是关于 α 与 η 的 E-α-不变凸集，$f_i(i=1, 2, 3, \cdots, m)$，$g_j(j=1, 2, 3, \cdots, n)$ 与 $h_k(k=1, 2, 3, \cdots, p)$ 是 K 上关于同一 α 与 η 的 E-α-预不变凸函数，设多目标规划问题(MOP1)的可行域为 D.

先引入以下几个符号：设 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n)$.

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i=\boldsymbol{y}_i(i=1, 2, 3, \cdots, n); \ \boldsymbol{x}<\boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i<\boldsymbol{y}_i(i=1, 2, 3, \cdots, n)$$

$$\boldsymbol{x} \leqslant q\ \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i \leqslant \boldsymbol{y}_i(i=1, 2, 3, \cdots, n); \ \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \leqslant q\ \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$$

$$\mathbb{R}_{+}^n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \geqslant 0, i=1, 2, 3, \cdots, n\}$$

$$\mathbb{R}_{++}^n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i>0, i=1, 2, 3, \cdots, n\}$$

定义 8 设 $\boldsymbol{x}^*$ 是多目标规划问题(MOP1)的可行解，若不存在另一可行解 $\boldsymbol{x}$，使 $f(E(\boldsymbol{x})) \leqslant f(E(\boldsymbol{x}^*))$(或 $f(E(\boldsymbol{x}))<f(E(\boldsymbol{x}^*))$)成立，则称 $\boldsymbol{x}^*$ 为该问题的有效解(或弱有效解).

定理 8 设 $\boldsymbol{x}^*$ 是多目标规划问题(MOP1)的可行解，f_i, g_j, h_k 具有一阶连续偏导数，$\sum\limits_{k=1}^{p} v_k h_k$，$\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, \cdots, v_p) \in \mathbb{R}^p$ 是关于 α 和 η 的 E-α-预不变凸函数，并且定理 6 中的条件皆成立. 若存在 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_{++}^m$，$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_{+}^n$，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^p$，使得

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(E(\boldsymbol{x}^*))+\sum_{j=1}^{n} \mu_j \nabla g_j(E(\boldsymbol{x}^*))+\sum_{k=1}^{p} v_k \nabla h_k(E(\boldsymbol{x}^*))=0 \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j g_j(E(\boldsymbol{x}^*))=0 \tag{6}$$

则 $\boldsymbol{x}^*$ 是多目标规划问题(MOP1)的有效解(弱有效解).

证 反证. 假设 $\boldsymbol{x}^*$ 不是(MOP1)的有效解(弱有效解)，则存在 $\boldsymbol{x} \in D$，使得 $f(E(\boldsymbol{x})) \leqslant (<) f(E(\boldsymbol{x}^*))$. 由于 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_{++}^m$，下列不等式成立

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(E(\boldsymbol{x}))<\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(E(\boldsymbol{x}^*)) \tag{7}$$

由于 f_i, g_j 与 $\sum\limits_{k=1}^{p} v_k h_k$ 为 E-α-预不变凸函数，且满足定理 6 的假设，则以下不等式成立

$$f_i(E(\boldsymbol{x}))-f_i(E(\boldsymbol{x}^*)) \geqslant \nabla f_i(E(\boldsymbol{x}^*))^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x})-E(\boldsymbol{x}^*)) \qquad i=1,2,3,\cdots,m \tag{8}$$

$$g_j(E(\boldsymbol{x}))-g_j(E(\boldsymbol{x}^*)) \geqslant \nabla g_j(E(\boldsymbol{x}^*))^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x})-E(\boldsymbol{x}^*)) \qquad j=1,2,3,\cdots,n \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{p} v_k h_k(E(\boldsymbol{x}))-\sum_{k=1}^{p} v_k h_k(E(\boldsymbol{x}^*)) \geqslant (\nabla \sum_{k=1}^{p} v_k h_k(E(\boldsymbol{x}^*)))^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x})-E(\boldsymbol{x}^*)) \tag{10}$$

将(8)式中第 i 式乘以 λ_i，(9)中第 j 式乘以 μ_j，并与(10)式相加得到

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(E(\boldsymbol{x}))-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(E(\boldsymbol{x}^*))+\sum_{j=1}^{n} \mu_j g_j(E(\boldsymbol{x}))-\sum_{j=1}^{n} \mu_j g_j(E(\boldsymbol{x}^*))+$$

$$\sum_{k=1}^{p} v_k h_k(E(\boldsymbol{x}))-\sum_{k=1}^{p} v_k h_k(E(\boldsymbol{x}^*)) \geqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla f_i(E(\boldsymbol{x}^*))+\sum_{j=1}^{n}\mu_j\nabla g_j(E(\boldsymbol{x}^*))+\nabla\sum_{k=1}^{p}v_kh_k(E(\boldsymbol{x}^*))\right)^{\mathrm{T}}(E(\boldsymbol{x})-E(\boldsymbol{x}^*))=0$$

则有

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(E(\boldsymbol{x}))\geqslant\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(E(\boldsymbol{x}^*))-\sum_{j=1}^{n}\mu_j g_j(E(\boldsymbol{x}))+\sum_{j=1}^{n}\mu_j g_j(E(\boldsymbol{x}^*))\geqslant\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(E(\boldsymbol{x}^*))\tag{11}$$

式(11)与(7)矛盾，故 $\boldsymbol{x}^*$ 为有效解(弱有效解)，证毕.

下面给出例 5 来证明以上结果的正确性.

例 5　考虑多目标规划问题(MOP2)

$$\begin{gathered}\min\quad(f_1(E(x,y)),f_2(E(x,y)))\\ \text{s.t.}\quad g(E(x,y))\leqslant 0\\ h(E(x,y))=0\\ (x,y)\in K\end{gathered}$$

其中 $K=[0,1]\times[0,1]$. 对 $\forall(x,y)\in K$，$E(x,y)=(x^2,y^2)$，$f_1(x,y)=x^2$，$f_2(x,y)=x^3-1$，$g(x,y)=y^{\frac{3}{2}}-1$，$h(x,y)=0$. 对 $\forall(x_1,y_1),(x_2,y2)\in K$，令

$$\alpha((x_1,y_1),(x_2,y_2))=x_1+y_2+1,\ \eta((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\left(\frac{x_1-x_2}{x_1+y_2+1},\frac{y_1-y_2}{x_1+y_2+1}\right)$$

分析　容易证明 K 是关于 α 和 η 的 E-α-不变凸集，f_1,f_2,g,h 是关于 α 和 η 的 E-α-预不变凸函数且满足定理 6 的条件，$\boldsymbol{x}^*=(0,0)$ 是(MOP2)的一个可行解. 任取 $\lambda_1,\lambda_2>0$，$v\in\mathbb{R}$，$\mu=0$ 有

$$\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\nabla f_i(E(\boldsymbol{x}^*))+\mu\nabla g(E(\boldsymbol{x}^*))+v\nabla h(E(\boldsymbol{x}^*))=0$$

$$\mu g(E(\boldsymbol{x}^*))=0$$

因此 $\boldsymbol{x}^*=(0,0)$ 是(MOP2)的有效解.

参考文献：

[1]　HANSON M A，MOND B. Convex Transformable Programming Problems and Invexity [J]. Journal of Information and Optimization Sciences，1987，8(2)：201-207.

[2]　YOUNESS E A. E-Convex Sets，E-Convex Functions，and E-Convex Programming [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1999，102(2)：439-450.

[3]　YANG X M，YANG X Q，TEO K L. Characterizations and Applications of Prequasi-Invex Functions [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2001，110(3)：645-668.

[4]　SYAU Y R，LEE E S. Some Properties of E-convex Functions [J]. Applied Mathematics Letters，2005，18(9)：1074-1080.

[5]　FULGA C，PREDA V. Nonlinear Programming with E-Preinvex and Local E-Preinvex Functions [J]. European Journal of Operational Research，2009，192(3)：737-743.

[6]　NOOR M A，NOOR K I. Some Characterizations of Strongly Preinvex Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2006，316(2)：697-706.

[7]　FAN L Y，GUO Y L. On Strongly A-Preinvex Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2007，330(2)：1412-1425.

[8]　LIU C P. Some Characterizations and Applications on Stronglyα-Preinvex and Stronglyα-Invex Functions [J]. Journal of

Industrial and Management Optimization, 2008, 4(4): 727-738.

[9] 时统业，焦赛军，周国辉. F-G 广义凸函数的一个性质及其应用 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2012，30(5)：41-45.

[10] 王海英，符祖峰，何　芝. α-预不变凸函数的若干性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(3)：99-105.

[11] 李　婷，彭再云，李科科，等. 拟 α-预不变凸函数 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2017，34(4)：8-12.

[12] BAZARAA M S, SHERALI H D, SHETTY C M. Nonlinear Programming [M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 1997.

E-α-prequasiinvex-Type Functions and Their Optimization

WANG Zi-yuan[1,2], WANG Jing-jing[1], PENG Zai-yun[1], SHAO Chong-yang[1], ZHOU Da-qiong[1]

1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;

2. Department of Mathematics, University of British Columbia, Kelowna, BC V1V1V7, Canada

Abstract: In this paper, we mainly study the concept of E-α-prequasiinvex-type functions and their applications. First, the definition of E-α-prequasiinvex functions is given, with examples demonstrating their existence. The necessary and sufficient conditions of strictly (semi-strictly) E-α-prequasiinvex functions under the assumption of Condition A and Condition B are discussed. Then, the nonlinear programming problem (NP1) with inequality constraints under the E-α-prequasiinvex condition is proposed. The E-α-invexity of the feasible solution set and optimal solution set of (NP1) is proved, and the property of the local optimal solution of NP1 is given. Finally, the concepts of E-α-preinvex functions are discussed, the equivalent characterization of E-α-preinvex functions is given, and the optimal result of the multi-objective programming problem under E-α-preinvex condition is obtained. Examples are given to verify the conclusions reached.

Key words: E-α-prequasiinvex function; nonlinear programming problem; optimal criterion; E-α-preinvex function

责任编辑　张　枸