DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.09.011

非线性随机 Ginzburg-Landau 方程的 Wong-Zakai 逼近[①]

王凤玲， 吴柯楠， 李扬荣

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：主要证明了非线性随机 Ginzburg-Landau 方程在 Wong-Zakai 逼近意义下吸引子的存在性.

关 键 词：非线性随机 Ginzburg-Landau 方程；吸引子；Wong-Zakai 逼近

中图分类号：O211.4 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2019)09-0087-06

目前已有很多文献从不同角度对 Ginzburg-Landau 方程进行了研究[1-3]. 本文参考文献[2]，首先引入参数动力系统，定义了具有参数的方程所决定的动力过程 Φ，针对这个动力过程，证明随机吸收集的存在性，再证明 Φ 的拉回渐进紧性，从而证明了在 Wong-Zakai 逼近意义下，非线性随机 Ginzburg-Landau 方程 $\mathscr{D}$-拉回吸引子的存在性.

1 预备知识

本节参考文献[3]，将引入具有参数的随机动力过程及其拉回吸引子的相关概念. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个随机空间，θ_t：$\mathbb{R}\times\Omega \longrightarrow \Omega$ 是一个 $(\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{F}, \mathscr{F})$ 可测映射，使得 $\theta_t(0, \cdot)$ 是 Ω 上的恒等映射，且对任意的 $t, s \in \mathbb{R}$，满足 $\theta_t(s+t, \cdot)=\theta_t(t, \cdot)\circ\theta_t(s, \cdot)$.

定义 1 令 $(\Omega, \mathscr{F}, P, \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是参数动力系统，如果映射 Φ：$\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\Omega\times X \longrightarrow X$，对任意 $\omega\in\Omega$，$\tau\in\mathbb{R}$ 及 $t, s\in\mathbb{R}^+$，满足条件：

(i) $\Phi(\cdot, \tau, \cdot, \cdot)$：$\mathbb{R}^+\times\Omega\times X \longrightarrow X$ 是 $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^+)\times\mathscr{F}\times\mathscr{B}(X), \mathscr{B}(X))$ 可测；

(ii) $\Phi(0, \tau, \omega, \cdot)$ 是 X 上的恒等映射；

(iii) $\Phi(t+s, \tau, \omega, \cdot)=\Phi(t, \tau+s, \theta_s\omega, \cdot)\circ\Phi(s, \tau, \omega, \cdot)$；

(iv) $\Phi(t, \tau, \omega, \cdot)$：$X \longrightarrow X$ 是连续的，

则称映射 Φ 是关于 $(\Omega, \mathscr{F}, P, \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 的连续动力过程.

定义 2 令 $\mathscr{T}$ 为 X 的所有有界非空子集族的集合，假设 $K=\{K(\tau, \omega): \tau\in\mathbb{R}, \omega\in\Omega\}\in\mathscr{T}$. 如果存在 $T=T(D, \tau, \omega)>0$，当 $t\geqslant T$ 时，对任意 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$ 及 $D\in\mathscr{T}$，满足：

$$\Phi(t, \tau-t, \theta_{-t}\omega, D(\tau-t, \theta_{-t}\omega))\subseteq K(\tau, \omega)$$

则称 K 为关于 Φ 的 $\mathscr{T}$-拉回吸收集.

另外，如果 $\forall\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，$K(\tau, \omega)$ 是 X 的非空闭子集，K 在 Ω 中关于 $\mathscr{F}$ 可测，则称 K 为 Φ 的闭可测 $\mathscr{T}$-拉回吸收集.

---

① 收稿日期：2018-07-27

基金项目：国家自然科学基金项目(11571283).

作者简介：王凤玲(1995-)，女，硕士研究生，主要从事无穷维随机动力系统与随机分析的研究.

通信作者：李扬荣，博士生导师，教授.

定义3 如果 $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\ \omega\in\Omega\}\in\mathscr{T}$，满足：

(i) $\mathscr{A}$ 在 Ω 中关于 $\mathscr{F}$ 是可测的，并且对任意的 $\omega\in\Omega$，$\mathscr{A}$ 在 X 中是紧的.

(ii) $\mathscr{A}$ 关于 Φ 是不变的. 即对任意的 $t\geqslant 0$，$\Phi(t,\tau,\omega,\mathscr{A}(\tau,\omega))=\mathscr{A}(\tau+t,\theta_t\omega)$.

(iii) $\mathscr{A}$ 吸引 $\mathscr{T}$ 中的每个元素：对于每个 $D\in\mathscr{T}$，

$$\lim_{t\to+\infty} d_X(\Phi(t,\tau-t,\theta_{-t}\omega,D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)),\mathscr{A}(\tau,\omega))=0$$

则称 $\mathscr{A}$ 是 Φ 的 $\mathscr{T}$-拉回吸引子. 其中，$d_X(A,B)=\sup\limits_{a\in A}\inf\limits_{b\in B}\|a-b\|_X$ 是 Hausdorff-半距离.

2 非线性随机 Ginzburg-Landau 方程的协循环

设 $\mathscr{O}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域，其中 $n=1,2$. 令 $\tau,\delta\in\mathbb{R}$ 且 $\delta\neq 0$. 下面考虑如下的非线性 Ginzburg-Landau 方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-(\lambda+\mathrm{i}\mu(t))\Delta u=\gamma u-(\kappa+\mathrm{i}\beta(t))\,|u|^2u+g(t,x)+u\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)\\ u(t,x)=0 \qquad t\geqslant\tau,\ x\in\partial\mathscr{O},\ u(\tau,x)=u_\tau(x),\ x\in\mathscr{O}\end{cases}\tag{1}$$

其中未知量 u 是一个复值函数，$\lambda,\gamma,\kappa>0$，$\mu(\cdot)\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$\beta(\cdot)\in\mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$g\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},L^2(\mathscr{O}))$.

当 $\delta\neq 0$ 时，随机变量 $\mathscr{G}_\delta$ 定义为：

$$\mathscr{G}_\delta(\omega)=\frac{\omega(\delta)}{\delta}\qquad\forall\,\omega\in\Omega\tag{2}$$

存在一个 θ_t 不变量集 $\Omega\subseteq\widetilde{\Omega}$，对于每个 $\omega\in\widetilde{\Omega}$，有

$$\frac{\omega(t)}{t}\to 0\qquad t\to\pm\infty\tag{3}$$

因此由(2)式可得

$$\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)=\frac{\omega(t+\delta)-\omega(t)}{\delta}\qquad\int_0^t\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\mathrm{d}s=\int_t^{t+\delta}\frac{\omega(s)}{\delta}\mathrm{d}s+\int_\delta^0\frac{\omega(s)}{\delta}\mathrm{d}s\tag{4}$$

由参考文献[3]、方程(4)以及 ω 的连续性可知，对于任意 $t\in\mathbb{R}$，满足：

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^t\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)\mathrm{d}s=\omega(t)-\omega(0)=\omega(t)\tag{5}$$

方程(1)是含有参数 $\omega\in\Omega$ 的确定性方程. 由文献[5]可知，如果(2)-(4)式满足，则对 $\forall\omega\in\Omega$，$\tau\in\mathbb{R}$ 和 $u_\tau\in L^2(\mathscr{O})$，方程(1)存在唯一的解 $u(\cdot,\tau,\omega,u_\tau)\in C([\tau,\infty),L^2(\mathscr{O}))\cap L^2_{\mathrm{loc}}([\tau,\infty),H^1_0(\mathscr{O}))$. 由此可以定义一个协循环 Φ：$\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\Omega\times L^2(\mathscr{O})\longrightarrow L^2(\mathscr{O})$，使得 $\forall\,t\in\mathbb{R}^+$，$\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\omega\in\Omega$，$u_\tau\in L^2(\mathscr{O})$ 满足

$$\Phi(t,\tau,\omega,u_\tau)=u(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,u_\tau)\tag{6}$$

由定义1可知 Φ 是 $L^2(\mathscr{O})$ 上关于$(\Omega,\mathscr{F},P,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 的连续协循环.

定义 $\mathscr{D}$ 为 $L^2(\mathscr{O})$ 的所有有界非空子集族的集合，即 $\mathscr{D}=\{D=\{D(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\ \omega\in\Omega\}\}$，$\forall\,c>0$，$\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\omega\in\Omega$，

$$\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{ct}\,\|D(t+\tau,\theta_t\omega)\|=0\tag{7}$$

其中

$$\|D\|=\sup_{u\in D}\|u\|_{L^2(\mathscr{O})}$$

则 D 为缓增族. 如果 $\mathscr{D}$ 的所有元素为缓增的，则称 $\mathscr{D}$ 为缓增的.

本文中我们假设外力项 g 满足如下条件：存在常数 $\alpha>0$，使得

$$\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\alpha s}(\|g(s,\cdot)\|^2)\mathrm{d}s<\infty\qquad\forall\,\tau\in\mathbb{R}\tag{8}$$

当证明缓增拉回吸收集存在时，需要假设：存在常数 $\alpha>0$，对任意 $c>0$，

$$\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{ct}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha s}(\|g(s+t,\cdot)\|^2)\mathrm{d}s=0\tag{9}$$

3　解的一致性估计

本节将对方程(1) 的解在 $L^2(\mathscr{O})$ 空间上进行一致性估计.

引理 1　对于 $\tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$ 以及 $D=\{D(\tau,\omega): \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\} \in \mathscr{D}$，存在 $T=T(\tau,\omega,D)>0$，使得对于 $\forall t \geqslant T$，方程(1) 中的 u 满足：

$$\|u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^2+2\lambda\int_{\tau-t}^{\tau} e^{\alpha(s-\tau)}\|\nabla u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^2 ds \leqslant$$

$$M\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha s}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|^2+\|g(s+\tau)\|^2)ds \tag{10}$$

$$\int_{\tau-t}^{\tau} e^{\alpha(s-\tau)}(\|\nabla u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^2+\|u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|_{L^4}^4) \leqslant$$

$$M\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha s}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|^2+\|g(s+\tau)\|^2)ds \tag{11}$$

证　将方程(1) 与 u 的共轭 $\bar{u}$ 在 $\mathscr{O}$ 上作内积并且取实部，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2+\lambda\|\nabla u\|^2=\gamma\|u\|^2+\mathrm{Re}((g(t,x),u(t,x)))-\kappa\|u\|_{L^4}^4+\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)\|u\|^2 \tag{12}$$

对(12) 式右边第二项估计，可得

$$|(g(t,x),u(t,x))| \leqslant \frac{\alpha}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2\alpha}\|g\|^2 \tag{13}$$

对(12) 式右边第三项和第四项估计，可得

$$\kappa\|u\|_{L^4}^4-\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)\|u\|^2 \geqslant -\frac{|\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)|^2}{4\kappa}|\mathscr{O}| \tag{14}$$

由(13),(14) 式可知，

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2+2\lambda\|\nabla u\|^2+\kappa\|u\|_{L^4}^4 \leqslant$$

$$2\gamma\|u\|^2+\alpha\|u\|^2+\frac{1}{\alpha}\|g\|^2-\kappa\|u\|_{L^4}^4+2\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)\|u\|^2=$$

$$-\kappa\|u\|_{L^4}^4+2(\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)+(\gamma+\alpha))\|u\|^2+\frac{1}{\alpha}\|g\|^2-\alpha\|u\|^2 \leqslant$$

$$\frac{|\mathscr{G}_\delta(\theta_t\omega)+(\gamma+\alpha)|^2}{\kappa}|\mathscr{O}|+\frac{1}{\alpha}\|g\|^2-\alpha\|u\|^2 \tag{15}$$

综上可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2+2\lambda\|\nabla u\|^2+\kappa\|u\|_{L^4}^4+\alpha\|u\|^2 \leqslant \frac{|\mathscr{G}_\delta+(\gamma+\alpha)|^2}{\kappa}|\mathscr{O}|+\frac{1}{\alpha}\|g\|^2 \tag{16}$$

在(16) 式两边乘以 $e^{\alpha t}$，在$(\tau-t,\tau)$上积分，其中 $\tau \geqslant r$，$\omega \in \Omega$，令 $\theta_{-\tau}\omega$ 替代ω 可得

$$\|u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^2+2\lambda\int_{\tau-t}^{\tau} e^{\alpha(s-\tau)}\|\nabla u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^2 ds \leqslant$$

$$e^{-\alpha t}\|u_{\tau-t}\|^2+\int_{\tau-t}^{\tau} e^{\alpha(s-\tau)}\left(\frac{1}{\alpha}\|g(s)\|^2\right)ds+\frac{C_0}{\kappa}\int_{\tau-t}^{\tau} e^{\alpha(s-\tau)}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_{s-\tau}\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_{s-\tau}\omega)|^2)ds \leqslant$$

$$e^{-\alpha t}\|u_{\tau-t}\|^2+\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha s}\left(\frac{1}{\alpha}\|g(s+\tau)\|^2\right)ds+\frac{C_0}{\kappa}\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha s}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|^2)ds \tag{17}$$

由(4),(5),(7) 式可知，对于 $u_{\tau-t} \in D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$，$D \in \mathscr{D}$，当 $t \to \infty$ 时有

$$e^{-\alpha t}\|u_{\tau-t}\|^2 \leqslant e^{-\alpha t}\|D(\tau-t,\theta_{-\tau}\omega)\| \to 0$$

故存在 $T=T(\tau,\omega,D)>0$，使得对 $\forall t \geqslant T$，

$$e^{-\alpha t}\|u_{\tau-t}\|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha s}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|^2)ds \tag{18}$$

结合(17),(18) 式，可知(10) 式成立.

另一方面，结合(17),(18)式，对(16)式在$(\tau-t,\tau)$上运用Gronwall不等式，并令$\theta_{-\tau}\omega$替代ω可得

$$\int_{\tau-t}^{\tau}\mathrm{e}^{\alpha(s-\tau)}(\|\nabla u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^2+\|u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|_{L^4}^4)\leqslant$$

$$M\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha s}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|^2+\|g(s+\tau)\|^2)\mathrm{d}s \tag{19}$$

则引理1得证.

推论1 假设(8),(9)式成立，则连续协循环Φ具有一个闭的、可测的$\mathscr{D}$-拉回吸引集$K=\{K(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}\in\mathscr{D}$. 对$\forall\tau\in\mathbb{R}$以及$\omega\in\Omega$，$K$定义为

$$K(\tau,\omega)=\{u\in L^2(\mathscr{O}):\|u\|^2\leqslant R_1(\tau,\omega)\}$$

其中

$$R_1(\tau,\omega)=M\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha s}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|^2+\|g(s+\tau)\|^2)\mathrm{d}s \tag{20}$$

证 对给定的$\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$及$D\in\mathscr{D}$，由定义2和引理1知，存在$T=T(\tau,\omega,D)>0$，使得对任意$t\geqslant T$，

$$\Phi(t,\tau-t,\theta_{-t}\omega,D(\tau-t,\theta_{-t}\omega))=u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,D(\tau-t,\theta_{-t}\omega))\subseteq K(\tau,\omega) \tag{21}$$

令P是任意正数，

$$\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{Pt}\|K(\tau+t,\theta_t\omega)\|^2=\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{Pt}R_1(\tau+t,\theta_t\omega)=$$

$$\lim_{t\to-\infty}M\mathrm{e}^{Pt}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha s}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_{s+t}\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_{s+t}\omega)|^2)\mathrm{d}s+$$

$$\lim_{t\to-\infty}M\ \mathrm{e}^{Pt}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha s}(\|g(s+\tau+t)\|^2)\mathrm{d}s \tag{22}$$

对(22)式右边第一项估计，令$N=\min\{P,\alpha\}$，对任意的$t\leqslant0$，可得

$$M\mathrm{e}^{Pt}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha s}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_{s+t}\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_{s+t}\omega)|^2)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$M\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{N(s+t)}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_{s+t}\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_{s+t}\omega)|^2)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$M\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{Ns}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|^2)\mathrm{d}s \tag{23}$$

通过(3),(4)式，可得

$$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{Ns}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_s\omega)|^2)\mathrm{d}s<\infty$$

因此

$$\lim_{t\to-\infty}M\mathrm{e}^{Pt}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha s}(|\mathscr{G}_\delta(\theta_{s+t}\omega)|+|\mathscr{G}_\delta(\theta_{s+t}\omega)|^2)\mathrm{d}s=0 \tag{24}$$

结合(10)式，对(22)式右边第二项估计，可得

$$\lim_{t\to-\infty}M\mathrm{e}^{Pt}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha s}(\|g(s+\tau+t)\|^2)\mathrm{d}s=M\mathrm{e}^{-P\tau}\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{Pt}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha s}(\|g(s+t)\|^2)\mathrm{d}s=0 \tag{25}$$

结合(24),(25)式，对于任意的$P>0$，可得

$$\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{Pt}\|K(\tau+t,\theta_t\omega)\|^2=0 \tag{26}$$

因此$K(\tau,\omega)$在空间$L^2(\mathscr{O})$上是缓增的. 另外，对$\forall\tau\in\mathbb{R}$，$L(\tau,\cdot):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$是可测的.

引理2 存在随机半径$R_2(\tau,\omega)$：假设(8),(9)式成立，对$\forall\tau\in\mathbb{R}$和$\omega\in\Omega$，$D=\{D(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}\in\mathscr{D}$，存在$T=T(\tau,\omega,D)>0$，使得对$\forall t\geqslant T$，满足

$$\int_{\tau-1}^{\tau}\|\nabla u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^2\mathrm{d}s\leqslant R_2(\tau,\omega) \tag{27}$$

证 由引理1，存在$T=T(\tau,\omega,D)\geqslant1$，对$\forall t\geqslant T$，

$$\lambda\int_{\tau-1}^{\tau}\mathrm{e}^{\alpha s}\|\nabla u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\lambda\int_{\tau-t}^{\tau} e^{\alpha s}\|\nabla u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^{2}ds\leqslant$$
$$M\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha s}(|\mathscr{G}_{\delta}(\theta_{s}\omega)|+|\mathscr{G}_{\delta}(\theta_{s}\omega)|^{2}+\|g(s+\tau)\|^{2})ds \tag{28}$$

令

$$R_{2}(\tau,\omega)=\frac{R_{1}(\tau,\omega)}{\lambda}=\frac{M}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha s}(|\mathscr{G}_{\delta}(\theta_{s}\omega)|+|\mathscr{G}_{\delta}(\theta_{s}\omega)|^{2}+\|g(s+\tau)\|^{2})ds$$

根据 $e^{\alpha s}\geqslant e^{\alpha\tau}e^{-\alpha}$，对所有的 $s\geqslant\tau-1$，引理 2 成立.

引理 3　存在随机半径 $R_3(\tau,\omega)$：对于 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$ 以及 $D=\{D(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}\in\mathscr{D}$，存在 $T=T(\tau,\omega,D)>0$，使得对于 $\forall t\geqslant T$，$\exists\varepsilon>0$，$\sigma\in\mathbb{R}$，满足

$$\|\nabla u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^{2}\leqslant R_{3}(\tau,\omega) \tag{29}$$

证　对于所有的 $t\geqslant T$，将方程(1)与 $-\Delta\bar{u}$ 在 $\mathscr{O}$ 上作内积并且取实部，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla u\|^{2}+\lambda\|\Delta u\|^{2}=\gamma\|\nabla u\|^{2}+$$
$$\mathrm{Re}((\kappa+i\beta(t))(|u|^{2}u,\Delta u))-\mathrm{Re}(g(t,\cdot),\Delta u)+\mathscr{G}_{\delta}(\theta_{t}\omega)\|\nabla u\|^{2} \tag{30}$$

根据 Young 不等式可知

$$|(g(t,x),\Delta u(t,x))|\leqslant\frac{\lambda}{4}\|\Delta u\|^{2}+C\|g(t,\cdot)\|^{2}$$

再根据 Sobolev 嵌入定理和内插不等式可知，对任意的 $u\in H_{1}^{0}(\mathscr{O})$，

$$\|\nabla u\|_{4}^{2}\leqslant C\|\nabla u\|(\|u\|^{2}+\|\Delta u\|^{2})^{\frac{1}{2}}$$

则对(30)式右边第二项估计，可得

$$\mathrm{Re}((\kappa+i\beta(t))(|u|^{2}u,\Delta u))\leqslant\frac{\lambda}{4}(\|u\|^{2}+\|\Delta u\|^{2})+C\|u\|_{L^{4}}^{4}\|\nabla u\|^{2} \tag{31}$$

综上可知

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla u\|^{2}\leqslant C(1+\|u\|_{L^{4}}^{4}+\mathscr{G}_{\delta}(\theta_{t}\omega))\|\nabla u\|^{2}+C\|u\|^{2}+C\|g(t,\cdot)\|^{2} \tag{32}$$

任给 $t\geqslant0$，$\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，取 $s\in(\tau-1,\tau)$，在区间$(\tau-1,\tau)$上运用 Gronwall 不等式，并将 ω 替换成 $\theta_{-\tau}\omega$，可得

$$\|\nabla u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^{2}\leqslant Ce^{\int_{\tau-1}^{\tau}(1+\|u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|_{4}^{4}+\mathscr{G}_{\delta}(\theta_{s}\omega))ds}$$
$$(C\int_{\tau-1}^{\tau}(\|u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^{2}+\|g(s,\cdot)\|^{2})ds+$$
$$\int_{\tau-1}^{\tau}\|\nabla u(s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^{2}ds) \tag{33}$$

其中，结合(3)，(4)式以及文献[4]可知，存在 $\varepsilon>0$，$\sigma\in\mathbb{R}$，$h<0$，使得 $|\int_{h}^{0}\mathscr{G}_{\delta}(\theta_{\sigma}\omega)d\sigma|\leqslant-\varepsilon h+C_{\sigma}(\omega)$ 成立.

由引理 1、引理 2 和(9)式可得

$$\|\nabla u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,u_{\tau-t})\|^{2}\leqslant C(R_{1}(\tau,\omega)+R_{2}(\tau,\omega))e^{C(1+R_{1}(\tau,\omega)+C_{\sigma}(\omega))}$$

成立. 令

$$C(R_{1}(\tau,\omega)+R_{2}(\tau,\omega))e^{C(1+R_{1}(\tau,\omega)+C_{\sigma}(\omega))}=R_{3}(\tau,\omega)$$

从而引理 3 成立.

4　主要结论

定理 1　假设(8)，(9)式成立，则协循环 Φ 在 $L^{2}(\mathscr{O})$ 上有唯一的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},$

$\omega \in \Omega\} \in \mathscr{D}$.

证　由引理1可知，Φ 有一闭的、可测的 $\mathscr{D}$-拉回吸收集 K，由引理3可知，Φ 在 $L^2(\mathcal{O})$ 上有一个紧的吸收集. 因此，由文献[5]吸引子的存在性结论，可得协循环 Φ 存在 $\mathscr{D}$-拉回吸引子.

参考文献：

[1] 王　蕊，李扬荣. 带有可乘白噪音的广义Ginzburg-Landau方程的随机吸引子[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2012，34(2)：92-95.
[2] LU K，WANG B. Wong-Zakai Approximations and Long Term Behavior of Stochastic Partial Differential Equations[J]. Journal of Dynamics Differential Equations，2017(4)：1-31.
[3] WANG B. Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-Compact Random Dynamical Systems[J]. Journal of Differential Equations，2012，253(5)：1544-1583.
[4] WANG B. Random Attractors for Non-Autonomous Stochastic Wave Equations with Multiplicative Noise[J]. Discrete Continuous Dynamical Systems-Series A (DCDS-A)，2013，34(1)：269-300.
[5] TEMAM R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M]. New York：Springer-Verlag，1997.

Wong-Zakai Approximations of Nonlinear Stochastic Ginzburg-Landau Equations

WANG Feng-ling，　WU Ke-nan，　LI Yang-rong
School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，we mainly prove，through the Wong-Zakai approximations，the existence of pullback random attractors of nonlinear stochastic Ginzburg-Landau equations.

Key words：nonlinear stochastic Ginzburg-Landau equation；Pullback random attractor；Wong-Zakai approximation

责任编辑　张　枸