第 41 卷第 9 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2019 年 9 月
Vol. 41　No. 9　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Sep.　2019

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.09.012

矢量基尔霍夫公式的证明过程中存在的纰漏及严格证明[①]

何　健[1]，　刘万海[1]，　黄玉梅[1]，　肖　敏[2]

1. 绵阳师范学院 数理学院，四川 绵阳 621000；2. 绵阳师范学院 信息工程学院，四川 绵阳 621000

摘要：揭示了在各类经典著作中，矢量基尔霍夫公式证明过程中具示范性、普遍性的错误，对其来源、特征进行了剖析，理清了证明的线索，突破了证明过程中的核心障碍. 指出：1）矢量基尔霍夫公式的成立条件是被积函数在积分区域上具有连续二阶偏导数；2）作为一个积分定理，其证明无法直接在微分尺度进行. 同时，矢量微分算符在自然坐标系中的表达须特别注意基矢选择及变换，尤其针对积分曲面与等势面的法向量.

关　键　词：矢量基尔霍夫公式；Stratton-Chu 公式；矢量微分算符；自然坐标系；法向基矢

中图分类号：O441　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2019)09－0093－08

矢量基尔霍夫公式将空间任意一点的电（磁）场表为封闭曲面上的场强及其法向导数，由此奠定了光学的衍射理论基础，同时也是电磁场散射理论中的一个重要公式[1-9]. 然而对该公式的证明在已有的论述中均出现一些缺漏、错误之处：文献[10-11]在使用矢量积分时对变量及方向的判定有误，而文献[12]则在使用矢量恒等式时对于梯度等算符的含义产生混淆. 黄晓伟等在文献[13]中指出上述错误在于对算符 ∇' 与 $\hat{n}$ 的作用关系的认知方式，但解释有误，且未能更清晰地意识到证明的核心问题所在故而转向使用了数值方法进行验证，这既不必要也不完备；同时，文献[13]在提出完整证明时给予引理的方式未能正面回应前述问题，对公式中的物理部分挖掘较少，并不利于模型的构建.

本文首先对已有的证明方法展开讨论，通过比对不同的认知观点及解释，暴露出已有证明中的缺陷及应当把握的核心要素；之后对一系列易引起混淆的点进行剖析，建立更为明晰的物理图像；最后将对公式的成立条件进行分析，给予严格证明.

1　各类证明中存在的错误分析

1.1　Kong 的证明

从 Stratton-Chu 公式出发，通过电磁感应定律结合矢量分析技巧进行化简得出更适用于衍射场景的电（磁）矢量表述形式，这便是矢量基尔霍夫公式. 其实质依然是一个关于麦氏方程组的积分解. 证明过程参见文献[10]. 其证明过程展示出矢量基尔霍夫公式与 Stratton-Chu 公式的这种等价性仅靠微分尺度下的化简技巧便可得出.

1.1.1　对 ∇'，$\hat{n}$ 作用关系的认识错误

证明中的关键步骤之一是在积分区域内于使用了矢量恒等式：

$$\hat{n}\times(\nabla'\times\boldsymbol{E})=\nabla'(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})-(\hat{n}\cdot\nabla')\boldsymbol{E}\tag{1}$$

---

① 收稿日期：2018－06－25

基金项目：四川省科技计划项目(2018JY0454)；四川省教育厅科研项目(17ZB0210).

作者简介：何　健(1980－)，男，讲师，主要从事物理教学科研工作及光学、大学物理教学论的研究.

(1) 式的获得依赖于条件:

$$(\boldsymbol{E} \cdot \nabla')\hat{n} = 0 \text{ 及 } \boldsymbol{E} \times (\nabla' \times \hat{n}) = 0 \tag{2}$$

黄晓伟等[13] 指出上述证明中“∇' 算子作用在 $\hat{n}$ 不为零，即 $\hat{n}$ 对 ∇' 不能再视作常矢”(注：文献[10] 中算符 ∇' 虽然带撇，但基于曲面表示的问题，实际作用于(x, y, z)，本文沿用原作的带撇表示).

1.1.2　对 $\hat{n}$ 含义的理解错误

文献[13] 虽然指出了 Kong 的著作中“$\hat{n}$ 对 ∇' 不能再视作常矢”，但对法向基矢 $\hat{n}$ 的理解有误：1) 将 $\hat{n}$ 仅处理为曲面坐标函数，由此将导致 $\nabla' \times \hat{n} = 0$ 的悖论；2) 混淆了积分曲面与等势面.

造就此类错误的原因在于“自然坐标系与直角坐标系 ”间的基矢表达及转化在数学上存在欠缺. 具体地，使用算子 ∇' 进行梯度运算时，自然坐标表示为：$\nabla' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\hat{n}$，但此处的 $\hat{n}$ 为运算对象的“势函数”构建的等势(曲) 面法线方向，并非针对积分曲面. 因此，在面对积分曲面时，尝试直接将 ∇' 算子以自然坐标的形式进行表达不是一个好的选择. 现尝试从直角坐标的角度入手，将法向基矢量表为曲面上一点(x, y, z) 及面外一点(x', y', z') 的函数，即：

$$\hat{n} = \frac{(x'-x)\boldsymbol{i} + (y'-y)\boldsymbol{j} + (z'-z)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}} = \frac{\boldsymbol{n}}{n} \tag{3}$$

其中 $n = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$[* 此时仅是借用了$(x, y, z)$ 与(x', y', z') 作为坐标表示，并非电动力学中习惯表示中的“场”、“源” 坐标.] 此时，微分运算中不能把基矢仅当作曲面坐标(x, y, z) 的函数. 对于点(x, y, z) 而言，其相应的法向基矢还应当由曲面几何形态 $S(x, y, x) = 0$ 给出约束条件，即点(x', y', z') 将成为点(x, y, z) 的函数：

$x'(x, y, z)$，$y'(x, y, z)$，$z'(x, y, z)$. 这与电动力学中的场、源坐标互独立的情形并不相同. 同时，在曲面具体形态给定之前，$\hat{n}$ 的坐标表示也无法给定 —— 即便给出曲面形态，若非极度规则的情形，$\hat{n}$ 的表示也会相当困难.

现以 $\hat{n}$ 的旋度运算 z 分量为例：

$$\nabla S = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}n}\hat{n} = \frac{\partial S}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial S}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial S}{\partial z}\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}n}(n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j} + n_z\boldsymbol{k}) \tag{4}$$

$$n_x = \frac{\partial S}{\partial x} / \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}n} = \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S} \qquad n_y = \frac{\partial S}{\partial y} / \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}n} = \frac{\partial S}{\partial y}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S} \qquad n_z = \frac{\partial S}{\partial z} / \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}n} = \frac{\partial S}{\partial z}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}(\nabla' \times \hat{n})_z &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S}\right) = \\ &\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S}\right) - \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S} - \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S}\right) = \\ &\frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S}\right) - \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S}\right) \neq 0\end{aligned} \tag{6}$$

可知：积分曲面法向基矢的散度、旋度运算将不恒为零. 这是文献[13] 中的错误之一.

1.2　张善杰的证明

张善杰[12] 尝试将场量分解为 3 个直角坐标分量，直接从微分角度给予证明. 其中典型错误如：

$$\begin{aligned}&(\hat{n} \cdot \boldsymbol{i})\nabla' E_x + (\hat{n} \cdot \boldsymbol{j})\nabla' E_y + (\hat{n} \cdot \boldsymbol{k})\nabla' E_z = \\ &\left(\frac{\partial E_x}{\partial n}\hat{n} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial E_y}{\partial n}\hat{n} \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial E_z}{\partial n}\hat{n} \cdot \boldsymbol{k}\right)\hat{n} = \\ &(\nabla' E_x \cdot \boldsymbol{i} + \nabla' E_y \cdot \boldsymbol{j} + \nabla' E_z \cdot \boldsymbol{k})\hat{n} = \\ &\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\hat{n} = \\ &(\nabla' \cdot \boldsymbol{E})\hat{n}\end{aligned} \tag{7}$$

（注：文献[10] 中使用了 $\boldsymbol{e}_n$ 表示自然坐标系的法向基矢，本文为简化表达将其统一为 $\hat{n}$）.

1.2.1　对$(\hat{n}\cdot\boldsymbol{i})\nabla' E_x$ 方向解释的错误

黄晓伟等指出(7) 式的方向判定有误：$(\hat{n}\cdot\boldsymbol{i})\nabla' E_x$ 指向 E_x 增长最快的方向(梯度)，而经第一个等号后的$\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial n}\hat{n}\cdot\boldsymbol{i}\right)\hat{n}$ 则指向积分表面的外法向，故等式不成立. 但$(\hat{n}\cdot\boldsymbol{i})\nabla' E_x$ 是和矢量的一个分量，$\dfrac{\partial E_x}{\partial n}\hat{n}\cdot\boldsymbol{i}$ 仅是沿着 $\hat{n}$ 方向的一个成分，两者本不应置于同一层面比较，即便(7) 式第一个等号成立，也不能得出前述结论. 更进一步讲，非要将两式拆开进行分量比较，也应当是以同类项进行，如：$\left\{\begin{matrix}(\hat{n}\cdot\boldsymbol{i})(\nabla' E_x)\\(\hat{n}\cdot\boldsymbol{j})(\nabla' E_y)\\(\hat{n}\cdot\boldsymbol{k})(\nabla' E_z)\end{matrix}\right\}\cdot\boldsymbol{i}$ 与$\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial n}\hat{n}\cdot\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial E_y}{\partial n}\hat{n}\cdot\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial E_z}{\partial n}\hat{n}\cdot\boldsymbol{k}\right)\hat{n}\cdot\boldsymbol{i}$ 比较.

因此，黄晓伟等的错误在于：人为地进行了“分量化”的讨论，把不是同一层面的量置于同一层面比较.

1.2.2　对$\dfrac{\partial E_x}{\partial n}\hat{n}$ 方向解释的错误

注意到(7) 式第二个等号前后均为 $\hat{n}$ 方向，因此比较是可行的. 故$\dfrac{\partial E_x}{\partial n}\hat{n}\cdot\boldsymbol{i}=\nabla' E_x\cdot\boldsymbol{i}$，消去基矢 $\boldsymbol{i}$，得$\dfrac{\partial E_x}{\partial n}\hat{n}=\nabla' E_x$. 错误出现在：① 算符 ∇' 的自然坐标系表示形式须为全微分形式 $\nabla'=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\hat{n}$，因其定义就是沿着等势面的法线方向的全导数，故无其他分量；② 若作者使用的 $\hat{n}$ 并非被作用函数的等势面法向而是积分曲面的法向，则会因为积分曲面并非等势面而造成梯度运算中还得带上切向导数$\dfrac{\partial E_x}{\partial \tau}\hat{\tau}$；③ 梯度方向是被作用标量函数的“等势面” 的法线方向，并非积分曲面的法线方向. 实际上对 $\nabla' E_x$，$\nabla' E_y$，$\nabla' E_z$ 而言，三者的方向并无确切关联，更与积分曲面的法向无关. 这是原作证明中的细节疏漏.

若巧合地有 $\nabla' E_x$，$\nabla' E_y$，$\nabla' E_z$ 方向均刚好与积分曲面的法向 $\hat{n}$ 同向，则有：

$$(\hat{n}\cdot\boldsymbol{i})\nabla' E_x=(\hat{n}\cdot\boldsymbol{i})\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}n}\hat{n}=\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}n}\hat{n}(\boldsymbol{i}\cdot\hat{n})$$

但第一个等号后是$\dfrac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}n}\hat{n}\cdot\hat{n}\boldsymbol{i}$ 形式(姑且暂时统一为全导数形式)，矢量的标、点积不能随意交换次序，两者仍不相等.

类似问题还出现在：

$$\begin{aligned}&(\hat{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla' G+(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla' G=\\&-(\nabla' G\cdot\boldsymbol{E})\hat{n}+(\nabla' G\cdot\hat{n})\boldsymbol{E}+(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla' G=\\&-(\frac{\partial G}{\partial n}\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\hat{n}+(\frac{\partial G}{\partial n}\hat{n}\cdot\hat{n})\boldsymbol{E}+(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\partial G}{\partial n}\hat{n}=\\&\frac{\partial G}{\partial n}\boldsymbol{E}\end{aligned}\tag{8}$$

故，$\nabla' G$ 的方向被误当作积分曲面的法线方向了(实际上应当为 $\boldsymbol{R}$ 方向).

1.2.3　启　示

自然坐标系的选择并不唯一，但不同于直角坐标系及极坐标系等，其有坐标系原点，若出现不同的坐标系，容易鉴别并寻找相互转化关系，而自然坐标系的刻画在目前来看过于模糊，言语表示也较为抽象，不易进行定量变换. 建议通过角标或者带撇来区分.

1.3　杨儒贵的证明

杨儒贵[14] 的办法避开了使用高斯积分定理及斯托克斯积分定理，他直接处理直角坐标系下场强的分

量，以通过解其对应的无源域齐次亥姆霍兹方程的办法给出积分解．该方法的核心要素有三：构造闭合曲面、利用标量格林定理、设定无穷远处的辐射条件[15]：

$$\lim_{R\to\infty} R\left[\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial n}+jkU(\boldsymbol{r})\right]=0 \tag{9}$$

黄晓伟等[13] 指出此条件仅为一假设，并未给予证明，同时提出："经过严格证明的电磁场能够满足的辐射条件为以下形式：

$$\lim_{R\to\infty} R\left[\nabla\times\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{pmatrix}+jk\hat{R}\times\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{pmatrix}\right]=0 \tag{10}$$

这并不能导出(9)式：叉积操作已经把 3 个直角坐标分量进行耦合，无法直接分离为标量形式"，故辐射条件问题成为文献[14]的纰漏之处．

2 证明的核心

2.1 对 Stratton-Chu 公式法的修正

经过分析可知：若沿用 Kong 的办法，则须突破核心障碍——将原文中直接略去的两部分积分重新考虑并且在承认其各自不为零的情形之下证明两者的抵消性，或移项得下述待证等式：

$$\oiint_S [(\boldsymbol{E}\cdot\nabla')\hat{n}+\boldsymbol{E}\times(\nabla'\times\hat{n})]G\,\mathrm{d}S=\oiint_S \nabla'[G(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})]-\hat{n}[\nabla'\cdot(\boldsymbol{E}G)]\}\,\mathrm{d}S \tag{11}$$

(11)式两端在各自不为零的情况下需严格地相等，否则整个关于基尔霍夫公式的性质都得进行重新描述(甚至进一步导致很多衍射问题的精度问题需重新进行考虑)，故单纯使用黄晓伟的数值模拟法是不能令人满意的．

2.1.1 物理含义的分析

设电场沿 x 方向：

$$\boldsymbol{E}=E_x(x,y,z)\boldsymbol{i}$$

则：

$$(\boldsymbol{E}\cdot\nabla')\hat{n}=E_x\frac{\partial}{\partial x}\hat{n}$$

$$\boldsymbol{E}\times(\nabla'\times\hat{n})=E_x\boldsymbol{i}\times\left[\left(\frac{\partial n_x}{\partial z}-\frac{\partial n_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial n_y}{\partial x}-\frac{\partial n_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]=$$

$$E_x\left(\frac{\partial n_x}{\partial z}-\frac{\partial n_z}{\partial x}\right)k-E_x\left(\frac{\partial n_y}{\partial x}-\frac{\partial n_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}$$

得：

$$[(\boldsymbol{E}\cdot\nabla')\hat{n}+\boldsymbol{E}\times(\nabla'\times\hat{n})]G=GE_x\nabla' n_x \tag{12}$$

故，在 Kong 著作中误被丢弃掉的部分其物理含义便是："场平行的法向基矢分量的梯度再标乘该场的分量"．由于此运算不涉及显性相消问题，故不能判定针对封闭曲面的积分为零．

(11)式右侧：

$$\nabla'[G(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})]=\nabla'(Gn_xE_X)=n_x\nabla'(GE_X)+GE_X\nabla' n_x;\ \hat{n}[\nabla'\cdot(\boldsymbol{E}G)]=\hat{n}\frac{\partial}{\partial x}(E_xG)$$

故：

$$\nabla'[G(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})]-\hat{n}[\nabla'\cdot(\boldsymbol{E}G)]=n_x\nabla'(GE_X)+GE_X\nabla' n-\hat{n}\frac{\partial}{\partial x}(E_xG) \tag{13}$$

这便是右侧积分核的详细内容．由于两侧表达式中皆得到 $GE_x\nabla' n$ 此项，若要得到期望的结论，则需：

$$n_x\nabla'(GE_X)-\hat{n}\frac{\partial}{\partial x}(E_xG)=0 \tag{14}$$

第 1 项的方向沿 $\varphi(x,y,z)=GE_X=C$ 所形成的等势面的法线方向，该方向并不等同于积分曲面的法线方向，因此等式不成立．

2.1.2　严格论证

现将待证式(11)移项改写作：

$$\oiint_S \{\nabla'[G(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})]-\hat{n}[\nabla'\cdot(\boldsymbol{E}G)]-[(\boldsymbol{E}\cdot\nabla')\hat{n}+\boldsymbol{E}\times(\nabla'\times\hat{n})]G\}\,\mathrm{d}S=0 \tag{15}$$

考虑电场的一般情形(3 个方向皆有分量)，挑选积分的 z 分量，使用张量演算及爱因斯坦求和法则，对(15)中每一项进行改写：

$$\nabla'[G(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})]-\hat{n}[\nabla'\cdot(\boldsymbol{E}G)]_k=\partial_k(Gn_iE_i)-n_k\partial_i(E_iG)=$$

$$n_i\partial_k(GE_i)+GE_i\partial_k n_i-n_k\partial_i(E_iG)=(n_i\partial_k-n_k\partial_i)(GE_i)+GE_i\partial_k n_i \tag{16}$$

$$[(\boldsymbol{E}\cdot\nabla')\hat{n}+\boldsymbol{E}\times(\nabla'\times\hat{n})]_k=E_i\partial_i n_k+E_i(\partial_k n_i-\partial_i n_k)=E_i\partial_k n_i \tag{17}$$

代(16)、(17)入(15)，得其 z 分量为：

$$\oiint_S (n_i\partial_k-n_k\partial_i)(GE_i)\,\mathrm{d}S=0 \tag{18}$$

注意到 $n_i\partial_k-n_k\partial_i$ 正是叉积的分量形式，$(n_i\partial_k-n_k\partial_i)(GE_i)$ 的矢量形式对应于：$\hat{n}\times\nabla'(GE_i)$. 显然，$\nabla'(GE_i)$ 的方向沿 GE_i 等势面的法线方向，而此法线方向并非积分曲面的法向 $\hat{n}$，这意味着两者叉积并不恒为零. 故(11)式(及(15)式)的相等性并不在微分层面成立，尝试直接从矢量恒等式证明其相等性是不能的. 实际上黄的文章中所做数值部分显示的结论便是对解析的积分微元的不等作出的反应. 但当针对闭合曲面 S 进行积分后，情形则有不同：

仍挑选其中一分量(z 方向)进行讨论：

$$\oiint_S (n_i\partial_k-n_k\partial_i)(GE_i)\,\mathrm{d}S=\oiint_S (n_i\boldsymbol{i}+n_y\boldsymbol{j}+n_k\boldsymbol{k})\cdot(\partial_k\boldsymbol{i}-\partial_i\boldsymbol{k})(GE_i)\,\mathrm{d}S=$$

$$\oiint_S \hat{n}\cdot[(\partial_k\boldsymbol{i}-\partial_i\boldsymbol{k})(GE_i)]\cdot\mathrm{d}S \tag{19}$$

利用矢量场的高斯定理，上式化作：

$$\oiint_S \hat{n}\cdot[(\partial_k\boldsymbol{i}-\partial_i\boldsymbol{k})(GE_i)]\cdot\mathrm{d}S=\iiint_V \nabla'\cdot[(\partial_k\boldsymbol{i}-\partial_i\boldsymbol{k})(GE_i)]\,\mathrm{d}V=$$

$$\iiint_V (\partial_i\boldsymbol{i}+\partial_y\boldsymbol{j}+\partial_k\boldsymbol{k})\cdot[(\partial_k\boldsymbol{i}-\partial_i\boldsymbol{k})(GE_i)]\,\mathrm{d}V=$$

$$\iiint_V (\partial_i\partial_k-\partial_k\partial_i)\cdot(GE_i)\,\mathrm{d}V \tag{20}$$

2.1.3　结论分析

(1) 若 G 和 E_i 均在积分区域 V 上具有二阶连续偏导数，则有求偏导次序无关的特性，此时：

$$\iiint_V (\partial_i\partial_k-\partial_k\partial_i)\cdot(GE_i)\,\mathrm{d}V=0 \tag{21}$$

同理，由对称性可证 x , y 分量积分均为 0，统一表示为：

$$\oiint_S \{\nabla'[G(\hat{n}\cdot\boldsymbol{E})]-\hat{n}[\nabla'\cdot(\boldsymbol{E}G)]-[(\boldsymbol{E}\cdot\nabla')\hat{n}+\boldsymbol{E}\times(\nabla'\times\hat{n})]G\}\,\mathrm{d}S=$$

$$\left[\oiint_S (n_{i'}\partial_i-n_{i'}\partial_j)(GE_{i'})\,\mathrm{d}S\right]\hat{i}+\left[\oiint_S (n_{i'}\partial_j-n_j\partial_{i'})(GE_{i'})\,\mathrm{d}S\right]\hat{j}+$$

$$\left[\oiint_S (n_{i'}\partial_k-n_k\partial_{i'})(GE_{i'})\,\mathrm{d}S\right]\hat{k}=0 \tag{22}$$

式中：为简化表示，并与 i 区别，使用了 i' 作哑指标.

(2) 若 G 和 E_i 均在积分区域 V 上不具有二阶连续偏导数，则矢量基尔霍夫公式不成立.

2.2　矢量分析法(微分法)

通过上述分析，可知矢量基尔霍夫公式是一个积分定理，无法直接在微分层面进行证明. 故沿用张善

杰的办法须在恰当的时候引入积分定理进行积分处理才能圆满证明，故此办法最终与2.1的证明等价.

2.2.1 微分分析

张善杰通过上述方式试图证明：

$$\hat{n}\times(\nabla'\times\boldsymbol{E})=(\nabla'\cdot\boldsymbol{E})\hat{n}-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial n} \tag{23}$$

仍采用张量演算方式，挑出上式第 k 项，有：

$$[\hat{n}\times(\nabla'\times\boldsymbol{E})]_k=[\hat{n}\times(\nabla'\times\boldsymbol{E})]_k=n_i(\partial_k E_i-\partial_i E_k)$$

$$\left[(\nabla'\cdot\boldsymbol{E})\hat{n}-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial n}\right]_k=\left[(\nabla'\cdot\boldsymbol{E})\hat{n}-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial n}\right]_k=(\partial_i E_i)n_k-\partial_n E_k$$

$$\left[\hat{n}\times(\nabla'\times\boldsymbol{E})-(\nabla'\cdot\boldsymbol{E})\hat{n}-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial n}\right]_k=n_i(\partial_k E_i-\partial_i E_k)-(\partial_i E_i)n_k+\partial_n E_k=$$
$$(n_i\partial_k-n_k\partial_i)E_i-n_i\partial_i E_k+\partial_n E_k \tag{24}$$

注意到受曲面的约束关系，$\partial_n\neq n_i\partial_i$；$n_i\partial_k\neq n_k\partial_i$，故(24)式不能直接等于零，即：在微分层面是无法直接证明基尔霍夫公式的，事实如果能从微分形式直接导出，那么矢量基尔霍夫公式的意义也就与Stratton-Chu公式重叠，而正是这种“微分尺度的不等——积分尺度的相等、将某些变化的量在闭合积分时内部抵消”从而呈现出新的特性，才体现出基尔霍夫公式的价值.

2.2.2 积分处理

现考虑积分拓展，先将式(24)改写为矢量形式：

$$(n_i\partial_k-n_k\partial_i)E_i-n_i\partial_i E_k+\partial_n E_k\Rightarrow\hat{n}\times\nabla' E_i-\hat{n}\cdot\nabla' E_k+\frac{\partial E_k}{\partial n}\hat{n} \tag{25}$$

考虑积分的高斯定理，得：

$$\oint\!\!\!\oint_S\left(\hat{n}\times\nabla' E_i-\hat{n}\cdot\nabla' E_k+\frac{\partial E_k}{\partial n}\hat{n}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=$$
$$\iiint_V[\nabla'\times\nabla'(GE_i)-\nabla'\cdot E_k+\nabla'\cdot E_k]\,\mathrm{d}V=0 \tag{26}$$

证明核心部分与前面一样，其中利用了矢量场的高斯公式：

$$\oint\!\!\!\oint_S\frac{\partial E_k}{\partial n}\hat{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint\!\!\!\oint_S\frac{\partial E_k}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_V\nabla'\cdot E_k\,\mathrm{d}V \tag{27}$$

2.3 标量证明法(直角坐标系下)

前面已经指出，辐射条件问题是文献[14]的纰漏之处. 为解决这一问题，黄晓伟等[13]以附录形式从电场远场近似出发给进行讨论并给出了证明. 但笔者认为这样的操作既不能更好地揭示出两者物理层面的内在关联，又显得繁琐. 实际上只需充分理解(10)式中“当 $R\to\infty$ 时，$\nabla\times\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{H}\end{pmatrix}+jk\hat{R}\times\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{H}\end{pmatrix}$ 项应是一相比于 $\frac{1}{R}$ 的高阶无穷小”这一内涵，便可较易地导出(9)式.

现取电场部分进行分析，注意到使用面元进行分析时，其作为波源的物理模型只能是“点波源”，所辐射的场在中场区域演化成球面波形式；同时，$\hat{R}$ 正是积分面元(作为点波源)指向场点的方向基矢，即波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向，故有：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+jk\hat{R}\times\boldsymbol{E}=\nabla\times\boldsymbol{E}+j\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} \tag{28}$$

这是一相比 $\frac{1}{R}$ 的高阶无穷小. 究其原因，是由于电场进行传播过程中以点波源的形式进行复振幅传输过程时，$\boldsymbol{E}$ 具有基本解形式：$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{E}_0}{R}e^{j(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}+\varphi_0)}$，故其旋度运算产生的两项分别是$(-j\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})$(与式中第二部分抵消)、$\frac{1}{R^2}$项(造成最终整体趋于0的原因). 由此可见，辐射条件的内在实质来源于$\boldsymbol{E}$的基本解形式具

备的两大特点：复振幅的 e 指数形式、点波源的球面波性质，基于此，可将旋度运算替换为散度，直接导出其另一等价表示：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} + jk\hat{R} \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \boldsymbol{E} + j\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} \tag{29}$$

为证上式等价于 $\frac{1}{R^2}$ 的无穷小，取其一分量考虑：

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\Big|_x &= \left[\frac{\partial}{\partial n}\hat{n} \cdot (E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k})\right]\Big|_x = \frac{\partial E_x}{\partial n}\hat{n} \cdot \boldsymbol{i} \\ -jk\frac{\boldsymbol{R}}{R} \cdot (E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k})\Big|_x &= \left[-jk\frac{R}{} \cdot (E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k})\right]\Big|_x = -jk\frac{R_x}{R}E_x\end{aligned} \tag{30}$$

当 $R \to \infty$，其与 $\hat{n}$ 方向一致，$\hat{n} \cdot \boldsymbol{i} = \cos\alpha = \frac{R_x}{R}$，有：$\frac{\partial E_x}{\partial n} + jkE_x \to \frac{1}{R^2}$，故：

$$\lim_{R\to\infty} R\left[\frac{\partial E_x}{\partial n} + jkE_x\right] = 0 \tag{31}$$

以 $U(\boldsymbol{r})$ 表示任一分量，便得(9) 式，由此按文献[14] 可给出严格证明.

3　结　论

矢量基尔霍夫公式作为光学衍射理论的基础，在各类经典著作中的证明及理解均存在纰漏，虽有文献给予分析，但并不彻底，主要体现在：

1）对 Stratton-Chu 公式中积分曲面的法线基矢的处理问题：① 被误作常矢量，② 处理为变量但没能考虑曲面本身的几何约束从而导致计算错误；

2）微分算符在自然坐标系中的表达问题：混淆了积分曲面与被积函数本身的“等势面”，从而引发法向基矢的表达错误；

3）矢量 Sommerfeld 辐射条件的原始形态过渡到标量形态缺乏证明，而抛弃两者关联另行论证则缺乏物理内涵的挖掘.

这些问题向我们展示了在进行针对场源模型涉及曲面积分的矢量分析时必须注意的几个要点：在同一曲面积分问题中必须严格区分被积函数等势面的法向量与积分曲面的法向量；矢量微分算符在自然坐标系中的表达须特别注意基矢选择及变换. 同时得到两个重要结论：

1）矢量基尔霍夫公式的成立条件是被积函数在积分区域(V 内)具备二阶连续偏导数；

2）(矢量基尔霍夫公式)作为一个积分定理，仅靠微分尺度的分析无法给出完整、正确的证明.

同时，本研究牢牢把握住物理图像，从特例出发进行分析，再结合张量运算，给出证明过程中被误弃项的详细展示，通过积分处理，给出了矢量基尔霍夫公式的严格证明，因此本研究具有一定的示范性.

参考文献：

[1]　JACKSON J. D. Classical Electrodynamics [M]. 3th ed. New York: Wiley-Interscience, 1998.

[2]　BORN M, WOLF E. Principles of Optics [M]. 6th ed. New York: Pergamon Press Ltd, 1986.

[3]　JOSÉ LUIS PALACIOS, JOSÉ M. Renom. Broder and Karlin's Formula for Hitting Times and the Kirchhoff Index [J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2011, 111(1): 35-39.

[4]　王晓方，王晶宇. 菲涅耳波带板应用于聚变靶的高分辨 X 射线成像分析 [J]. 物理学报，2011，60(2)：495-501.

[5]　刘普生，王建东，刘义东. 角谱理论的近似公式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(9)：118-121.

[6]　陈学文，罗源源，张家伟，等. 光的衍射的理论分析及 Mathematica 仿真模拟 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(11)：156-161.

[7]　洪熙春，黄维刚，王绍民. 失调光学系统的衍射积分公式 [J]. 物理学报，1982，31(12)：1655-1663.

[8]　刘春香，程传福，任晓荣，等. 随机表面散射光场的格林函数法与基尔霍夫近似的比较 [J]. 物理学报，2004，53(2)：427-435.

[9]　盛新庆. 电磁理论、计算、应用 [M]. 北京：高等教育出版社，2016.

[10]　KONG J. A. Electromagnetic Wave Theory [M]. NewYork: Wiley-Interscience, 1986.

[11] 葛德彪，魏　兵. 电磁波理论 [M]. 北京：科学出版社，2011.
[12] 张善杰. 工程电磁理论 [M]. 北京：科学出版社，2009.
[13] 黄晓伟，盛新庆. 矢量基尔霍夫公式经典证明的漏洞与新的严格证明 [J]. 物理学报，2017，66(16)：164201-1-164201-10.
[14] 杨儒贵. 高等电磁理论 [M]. 2版. 北京：高等教育出版社，2008.
[15] SOMMERFELD A. Partial Differential Equations in Physics [M]. New York：Academic Press，1949.

Error in Vector Kirchhoff Formula Proof Process and Strict Proof Method

HE Jian[1]， LIU Wan-hai[1]， HUANG Yu-mei[1]， XIAO Min[2]

1. School of Mathematics and Physics，Mianyang Normal University，Mianyang Sichuan 621000，China；
2. School of Imformation Engineering，Mianyang Normal University，Mianyang Sichuan 621000，China

Abstract：Vector Kirchhoff formula is the basis of the optical diffraction theory，but the certification and understanding of it is not flawless in all kinds of classic works. Although such flaws are analyzed by some researchers in the literature available，but such analyses are not complete. Mainly reflected in：1. The Stratton - Chu formula in integral surface normals base vector processing problems：1) it's misused as a constant vector，2) although it is treated as a variable，it fails to consider the geometrical constraints of the surface itself，resulting in the calculation error. 2. The error of the differential operator in the natural coordinate system is to confuse the "equipotential surface" of the integral surface and the integrand，which will cause the expression of the method to the base vector；3. The transition of the original form of vector Sommerfeld radiation condition to the scalar form is not proved，and abandoning the two related to another argument lacks the physical connotation. These issues shows us in on the source model involving the surface integral vector analysis must pay attention to several points：in the same surface integral problem must strictly distinguish between the integrand equipotential surface normal vector and normal vector integral surface；The expression of the vector differential operator in the natural coordinate system must pay special attention to the selection and transformation of the base vector. We draw two conclusions through proof：1. the vector kirchhoff formula is established if the integrand has a continuous second partial derivative in the integral region；2. (vector kirchhoff formula) as an integral theorem，just on the analysis of the differential scale unable to provide complete and correct. At the same time，firmly grasp the physical image，this paper starting from the special case analysis，combining tensor operations，proved by mistake put item details，in the process of processing by integral and gives the strict proof of vector kirchhoff formula，therefore，this paper has some demonstration.

Key words：vector Kirchhoff formula；Stratton-Chu formula；vector differential operator；natural coordinate system；normal base vector

责任编辑　潘春燕