DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.10.005

具有良恰当断面的富足半群的结构[①]

孔祥军[1]，　王　蓓[2]

1. 曲阜师范大学 数学科学学院，山东 曲阜 273165；2. 曲阜师范大学 软件学院，山东 曲阜 273165

摘要：利用 $\mathscr{L}^*$-幂单半群和 $\mathscr{R}^*$-幂单半群，给出具有良恰当断面的富足半群的一个对称的织积结构定理．此结论去掉了拟理想这个重要的前提，且比已有结论的形式更简单．其结果是对逆断面和恰当断面中相应结果的丰富和推广，为进一步研究该类半群的结构、性质及刻画其上的同余奠定了坚实的理论基础．

关　键　词：富足半群；良恰当断面；$\mathscr{L}^*$-幂单半群

中图分类号：O152.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2019)10-0037-08

正则半群的逆断面[1]的概念于1982年引入．若正则半群 S 的逆子半群 S^o 含 S 的每个元素的唯一逆元，则称 S^o 为 S 的逆断面．在逆断面情形下，文献[2]引入了两个子半群 R 和 L，文献[3]证明了两个幂等子集 I 和 Λ 都是带．作为逆断面的推广，恰当断面[4]的概念于1993年引入到富足半群中，文献[4]建立了具有可乘型 A 断面的富足半群的结构．文献[5]引入了两个幂等子集 I 和 Λ，并研究了恰当断面的若干性质．文献[6]引入并研究了两个重要子集 R 和 L，建立了具有拟理想恰当断面的富足半群的织积结构．文献[7]建立了具有左单 S-恰当断面的富足半群的结构，文献[8]利用左正则带和 $\mathscr{L}^*$-幂单半群，建立了具有 S-恰当断面的富足半群的结构，但这两个半群是不对称的．文献[9]得到了完全正则半群簇的子簇的两种分解．文献[10]得到了变换半群的一个组合结果．文献[11-12]进一步讨论了恰当断面的性质，并研究了拟理想恰当断面的乘积问题．文献[13]对拟理想恰当断面的乘积问题进行了推广．文献[14]研究了可乘拟恰当断面的好同余．本文的主要目的是利用两个对称的半群 $\mathscr{L}^*$-幂单半群和 $\mathscr{R}^*$-幂单半群，建立具有良恰当断面的富足半群的结构．

如果半群 S 的每一 $\mathscr{L}^*$-类和 $\mathscr{R}^*$-类都含幂等元，则称 S 为富足半群[15]．幂等元集成带（半格）的富足半群称为拟恰当半群（恰当半群）[16]．恰当半群的每一 $\mathscr{L}^*$-类 L_a^* 和 $\mathscr{R}^*$-类 R_a^* 仅含一个幂等元，分别记作 a^* 和 a^+．用符号 E 和 E^o 分别表示半群 S 和 S^o 的幂等元集．

设 U 是富足半群 S 的富足子半群．如果对任意 $a \in U$，存在两个幂等元 $e \in L_a^*(S) \cap U$ 和 $f \in R_a^*(S) \cap U$，则称 U 为 S 的 $*$-子半群．设 S^o 是富足半群 S 的 $*$-恰当子半群．如果对任意 $x \in S$，存在幂等元 $e, f \in E$ 和唯一 $\overline{x} \in S^o$，使得 $x = e\overline{x}f$，这里 $e\mathscr{L}\overline{x}^+, f\mathscr{R}\overline{x}^*$，则称 S^o 为 S 的恰当断面．易知 e 和 f 是由 x 和 S^o 唯一确定的，分别记为 e_x 和 f_x，且有 $e_x\mathscr{R}^* x\mathscr{L}^* f_x$．记

$$I = \{e_x : x \in S\} \qquad \Lambda = \{f_x : x \in S\}$$

① 收稿日期：2018-05-29
基金项目：国家自然科学基金面上项目(11871301)；山东省自然科学基金面上项目(ZR2016AM02)；山东省高校科技计划项目(J18KA248)；曲阜师范大学科技计划项目(xkj201509)．
作者简介：孔祥军(1978-)，男，博士，副教授，主要从事半群代数理论的研究．

如果 I 和 Λ 都是带，则称 S^o 为 S 的良恰当断面．据文献[5]的命题2.3知，若 S^o 是 S 的良恰当断面，则 I 是左正则带($iji=ij$)，Λ 是右正则带($iji=ji$)．幂等元集成右正则带(左正则带)的拟恰当半群称为 $\mathscr{L}^*$ -幂单半群($\mathscr{R}^*$ -幂单半群)．本文未定义的概念和符号见文献[6,15-16]．

引理1[8] 设 S 是具有恰当断面 S^o 的富足半群．若 $I(\Lambda)$ 是子半群，则 $R(L)$ 也是子半群，从而 $R(L)$ 是拟恰当半群．

在下文中，R 表示一个具有恰当断面 S^o 的 $\mathscr{R}^*$ -幂单半群．则易知，对任一 $x\in R$，有 $f_x=\overline{x}^*\in E^o$ 和 $x=e_x\overline{x}$．对 $\mathscr{L}^*$ -幂单半群 L 有对偶的结论．下面给出本文的主要定理．

定理1 设 $\mathscr{R}^*$ -幂单半群 R 和 $\mathscr{L}^*$ -幂单半群 L 具有一个共同的恰当断面 S^o．对任一 $a\in L$，设 $\phi_a: R\longrightarrow R$，$y\longmapsto\phi_a y$ 为映射；对任一 $x\in R$，设 $\psi_x: L\longrightarrow L$，$b\longmapsto b\psi_x$ 为映射．在集合 $U=R\times L=\{(x,a)\in R\times L:\overline{x}=\overline{a}\}$ 上定义乘法

$$(x,a)(y,b)=(e_x(\phi_a y),(a\psi_y)f_b)$$

假设对任意 $a,b\in L$ 和任意 $x,y\in R$，下列条件满足：

(i) $\overline{\phi_a y}=\overline{a\psi_y}$；

(ii) 若 $\overline{x}=\overline{b}$，则 $\phi_a(e_x(\phi_b y))=e_{\phi_a x}(\phi_{(a\psi_x)f_b}y)$ 且 $(a\psi_{e_x(\phi_b y)})f_{b\psi_y}=((a\psi_x)f_b)\psi_y$；

(iii) 若 $a\in S^o$，则 $\phi_a y=ay$ 且 $a\psi_y=\overline{ay}$；若 $x\in S^o$，则 $b\psi_x=bx$ 且 $\phi_a x=\overline{ax}$；

(iv) $e_a(\phi_a x)=\phi_a x$ 且 $(a\psi_x)f_x=a\psi_x$；

(v) 对任一 $c\in L$ 及 $z\in R$，若 $\phi_a y=\phi_a z$ 及 $(a\psi_y)f_b=(a\psi_z)f_c$，则 $\phi_{f_a}y=\phi_{f_a}z$ 且 $(f_a\psi_y)f_b=(f_a\psi_z)f_c$；若 $e_y(\phi_b x)=e_z(\phi_c x)$ 及 $b\psi_x=c\psi_x$，则 $e_y(\phi_b e_x)=e_z(\phi_c e_x)$ 且 $b\psi_{e_x}=c\psi_{e_x}$．

则 U 是具有同构于 S^o 的良恰当断面的富足半群．

反之，每一个具有良恰当断面的富足半群都可以这样构造．

定理1由下面几个引理逐步证得．

引理2 U 上的乘法是有定义的．

证 只须证 $(e_x(\phi_a y),(a\psi_y)f_b)\in U$．

因 $\phi_a: R\longrightarrow R$ 和 $\psi_y: L\longrightarrow L$ 是映射，显然有

$$(e_x(\phi_a y),(a\psi_y)f_b)\in R\times L$$

因 $E(R)$ 是左正则带，且

$$e_a e_x e_{\phi_a y}=e_a e_x e_{ea(\phi_a y)}=e_a e_x e_a e_{\phi_a y}=e_a e_{\phi_a y}=e_{\phi_a y}$$

据条件(i)和(iv)，有

$$e_x(\phi_a y)=e_x e_{\phi_a y}\overline{\phi_a y}$$

且

$$e_x e_{\phi_a y}\mathscr{L}e_{\phi_a y}\mathscr{L}\overline{\phi_a y}^+$$

故 $\overline{e_{x(\phi_a y)}}=\overline{\phi_a y}$．类似地，$\overline{(a\psi_y)f_b}=\overline{a\psi_y}$．据条件(iv)，有

$$\overline{e_x(\phi_a y)}=\overline{(a\psi_y)f_b}$$

故

$$(e_x(\phi_a y),(a\psi_y)f_b)\in U$$

引理3 U 是半群．

证 设 $(x,a),(y,b),(z,c)\in U$．则

$$[(x,a)(y,b)](z,c)=(e_x(\phi_a y),(a\psi_y)f_b)(z,c)=$$

$$(e_{e_x(\phi_a y)}(\phi_{(a\psi_y)f_b}z),((\phi_a y)f_b)\psi_z f_c)=$$
$$(e_x e_{\phi_a y}(\phi_{(a\psi_y)f_b}z),((\phi_a y)f_b)\psi_z f_c)$$

而

$$\begin{aligned}(x,a)[(y,b)(z,c)]&=(x,a)(e_y(\phi_b z),(b\psi_z)f_c)=\\&(e_x(\phi_a(e_y(\phi_b z))),(a\psi_{e_y(\phi_b z)})f_{(b\psi_z)f_c})=\\&(e_x(\phi_a(e_y(\phi_b z))),(a\psi_{e_y(\phi_b z)})f_{b\psi_z}f_c)\end{aligned}$$

由$\overline{y}=\overline{b}$，据条件 (ii)，有

$$[(x,a)(y,b)](z,c)=(x,a)[(y,b)(z,c)]$$

所以 U 是半群.

引理 4　设$(x,a)\in U$. 则$(x,a)\in E(U)$ 当且仅当 $\phi_a x=a\psi_x=\overline{a}=\overline{x}$.

证　因

$$(x,a)(x,a)=(e_x(\phi_a x),(a\psi_x)f_a)$$

注意到 $x\in R$ 和 $a\in L$，易知：若

$$\phi_a x=a\psi_x=\overline{a}=\overline{x}$$

则

$$(e_x(\phi_a x),(a\psi_x)f_a)=(e_x\overline{x},\overline{a}f_a)=(x,a)$$

故$(x,a)\in E(U)$. 反之，若$(x,a)\in E(U)$，则 $e_x(\phi_a x)=x$ 且$(a\psi_x)f_a=a$. 据$(x,a)\in U$ 和 $a\in L$，有 $e_x\mathscr{L}\overline{x}^+=\overline{a}^+=e_a$. 故

$$\phi_a x=e_a(\phi_a x)=e_a e_x(\phi_a x)=e_a x=\overline{x}^+e_x\overline{x}=\overline{x}^+\overline{x}=\overline{x}=\overline{a}$$

类似地，$a\psi_x=\overline{a}=\overline{x}$.

引理 5　假设$(x,a)\in U$，记 $u=(e_x,\overline{x}^+)$ 和 $v=(\overline{a}^*,f_a)$. 则 $u,v\in E(U)$ 且 $u\mathscr{R}^*(x,a)\mathscr{L}^*v$.

证　据引理 4，显然有 $u,v\in E(U)$. 令 $\overline{x}\in E^o$，$a\in L$，因为 $\overline{x}f_a=\overline{a}f_a=a$，则

$$(e_x,\overline{x}^+)(x,a)=(e_x(\phi_{\overline{x}^+}x),(\overline{x}^+\psi_x)f_a)=(e_x\overline{x}^+x,\overline{\overline{x}^+xf_a})(x,\overline{x}f_a)=(x,a)$$

假设$(y,b),(z,c)\in\Gamma^1$，使得

$$(y,b)(x,a)=(z,c)(x,a)$$

则

$$(e_y(\phi_b x),(b\psi_x)f_a)=(e_z(\phi_c x),(c\psi_x)f_a)$$

即

$$e_y(\phi_b x)=e_z(\phi_c x)$$

且

$$(b\psi_x)f_a=(c\psi_x)f_a$$

故

$$(b\psi_x)f_a f_x=(c\psi_x)f_a f_x$$

据 $f_a\mathscr{R}^*\overline{a}^*=\overline{x}^*=f_x$ 和条件 (iv)，有 $b\psi_x=c\psi_x$. 因此据条件 (v)，有

$$e_y(\phi_b e_x)=e_z(\phi_c e_x)$$

且

$$b\psi_{e_x}=c\psi_{e_x}$$

所以

$$(y, b)(e_x, \overline{x}^+)=(e_y(\phi_b e_x), (b\psi_{e_x})\overline{x}^+)=(e_z(\phi_c e_x), (c\psi_{e_x})\overline{x}^+)=(z, c)(e_x, \overline{x}^+)$$

故$(x, a)\mathscr{R}^* u$. 对偶地，有$(x, a)\mathscr{L}^* v$.

引理6 U 是富足半群.

证 据引理5可得.

引理7 设 $W=\{(s, s): s\in S^o\}$. 则 W 是同构于 S^o 的 U 的恰当 $*$-子半群.

证 显然 $W\subseteq U$. 设(s, s),$(t, t)\in W$. 易知

$$(s, s)(t, t)=(e_s st, stf_t)=(st, st)\in W$$

所以 W 是子半群. 对任一 $s\in S^o$，定义 $s\varphi=(s, s)$，显然 φ 是一个同构. 故 $S^o\cong W$.

为证 W 是 $*$-子半群，设$(s, s)\in W$. 据引理4和引理5，有

$$u=(e_s, s^+)=(s^+, s^+)\in E(W)$$

且 $u\mathscr{R}^*(s, s)$. 类似地，$v=(s^*, s^*)\in E(W)$ 且 $v\mathscr{L}^*(s, s)$.

引理8 设(x_1, a_1)，$(x_2, a_2)\in U$. 则：

(i) $(x_1, a_1)\mathscr{R}^*(x_2, a_2)$ 当且仅当 $x_1\mathscr{R}^* x_2$；

(ii) $(x_1, a_1)\mathscr{L}^*(x_2, a_2)$ 当且仅当 $a_1\mathscr{L}^* a_2$.

证 为证(i)，据引理5，只需证明$(e_{x_1}, \overline{x_1}^+)\mathscr{R}^*(e_{x_2}, \overline{x_2}^+)$ 当且仅当 $x_1\mathscr{R}^* x_2$.

若 $x_1\mathscr{R}^* x_2$，则 $e_{x_1}=e_{x_2}$，故$\overline{x_1}^+=\overline{x_2}^+$. 因此

$$(e_{x_1}, \overline{x_1}^+)=(e_{x_2}, \overline{x_2}^+)$$

反之，若

$$u_1=(e_{x_1}, \overline{x_1}^+)\mathscr{R}^* u_2=(e_{x_2}, \overline{x_2}^+)$$

则 $u_1u_2=u_2$ 且 $u_2u_1=u_1$. 故

$$e_{x_1}(\phi_{\overline{x_1}^+} e_{x_2})=e_{x_1}\overline{x_1}^+ e_{x_2}=e_{x_2}$$

且

$$e_{x_2}(\phi_{\overline{x_2}^+} e_{x_1})=e_{x_2}\overline{x_2}^+ e_{x_1}=e_{x_1}$$

即 $e_{x_1}e_{x_2}=e_{x_2}$，且 $e_{x_2}e_{x_1}=e_{x_1}$. 故 $e_{x_1}\mathscr{R}^* e_{x_2}$. 所以 $x_1\mathscr{R}^* x_2$.

(ii) 可对偶地证明.

引理9 W 是 U 的恰当断面.

证 对任意的 $t=(x, a)\in U$，记

$$\overline{t}=(\overline{x}, \overline{x})\in W \qquad e_t=(e_x, \overline{x}^+) \qquad f_t=(\overline{a}^*, f_a)$$

易验证 $t=e_t\overline{t}f_t$. 而且

$$e_t\mathscr{L}\overline{t}^+=(\overline{x}^+, \overline{x}^+) \qquad f_t\mathscr{R}\overline{t}^*=(\overline{a}^*, \overline{a}^*)$$

假设 t 可以写成另一种形式 $t=e_t'\overline{t}'f_t'$，其中

$$e_t'=(y_1, b_1)\in E(U) \qquad f_t'=(y_2, b_2)\in E(U)$$

$$\overline{t}'=(\overline{y}, \overline{y})\in W \qquad e_t'\mathscr{L}\overline{t}'^+=(\overline{y}^+, \overline{y}^+)$$

及

$$f_t'=\overline{t}'^*=(\overline{y}^*, \overline{y}^*)$$

根据引理8的证明，有

$$f_{b_1}=\overline{y}^+ \qquad \overline{b_1}^*=\overline{y}^+ \qquad \overline{y}^*=e_{y_2} \qquad \overline{y_2}^+=\overline{y}^*$$

由 $e_t\mathscr{R}^* t\mathscr{R}^* e_t'$ 知

$$e_y = e_{y_1} \qquad \overline{x}^+ = \overline{y_1}^+$$

类似地，有 $f_a = f_{b_2}$，$\overline{a}^* = \overline{b_2}^*$. 所以，由 $b_1 \in L$ 及 $y_2 \in R$ 知

$$b_1 = \overline{b_1} f_{b_1} = \overline{b_1 b_1}^* = \overline{b_1} \in S^o$$

$$y_2 = e_{y_2} \overline{y_2} = \overline{y_2}^+ \overline{y_2} = \overline{y_2} \in S^o$$

从而

$$e_t{}' = (y_1, \overline{b_1}) \qquad f_t{}' = (\overline{y_2}, b_2)$$

因 $e_t{}', f_t{}' \in E(U)$，根据引理 4，有 $\overline{b_1} y_1 = \overline{y_1}$ 且 $b_2 \overline{y_2} = \overline{b_2}$. 因 $y_1 \in R$，有

$$y_1 = e_{y_1} \overline{y_1} \qquad \overline{y_1}^+ y_1 = \overline{y_1}^+ e_{y_1} \overline{y_1} = \overline{y_1}$$

故 $y_1 \mathscr{L}^* \overline{y_1} \mathscr{L}^* \overline{y_1}^*$. 从 $\overline{b_1} y_1 = \overline{y_1}$ 可推断出 $\overline{y_1} = \overline{y_1} y_1$. 因 $\overline{b_1} = \overline{y_1}$，从而 $\overline{y_1}^* = \overline{y_1}^* y_1$，故

$$y_1 y_1 = y_1 \overline{y_1}^* y_1 = y_1 \overline{y_1}^* = y_1$$

因此 y_1 是幂等元，且 $y_1 = e_{y_1} = e_x$. 类似地，有

$$b_2 = f_{b_2} = f_a$$

易知

$$b_1 = \overline{b_1} = \overline{y_1} = \overline{e_x} = \overline{x}^+ \qquad y_2 = \overline{y_2} = \overline{b_2} = \overline{f_a} = \overline{a}^*$$

故 $e_t{}' = e_t$ 且 $f_t{}' = f_t$. 从而

$$t = (x, a) = e_t{}' \overline{t}' f_t{}' = (e_x, \overline{x}^+)(\overline{y}, \overline{y})(\overline{a}^*, f_a) = (e_x \overline{y}, \overline{x}^+ \overline{y} f_a)$$

故 $x = e_x \overline{y}$. 由 $x = e_x \overline{x}$ 知 $e_x \overline{y} = e_x \overline{x}$，可得 $\overline{x}^+ \overline{y} = \overline{x}$. 显然 $\overline{x}^+ = \overline{b_1} = \overline{b_1}^* = \overline{y}^+$，故 $\overline{x} = \overline{y}^+ \overline{y} = \overline{y}$. 所以，$W$ 是 U 的恰当断面.

引理 10　W 是 U 的良恰当断面.

证　设

$$E(R) \,|\!\times\!|\, E^o = \{(x, a) \in U : x^2 = x,\ a \in E^o\}$$

$$E^o \,|\!\times\!|\, E(L) = \{(x, a) \in U : x \in E^o,\ a^2 = a\}$$

对任一 $(x, a) \in I(U)$，有 $(x, a) \in E(U)$，且存在 $(y, y) \in E(W)$，$y \in E^o$，使得 $(x, a) \mathscr{L} (y, y)$. 则 $(\overline{a}^*, f_a) \mathscr{L} (y, y)$，故 $(\overline{a}^*, f_a) = (y, y)$，即 $\overline{a}^* = y = f_a$. 故 $a \in R \cap L = S^o$，根据引理 4，有 $a = \phi_a x = ax$. 因 $(x, a) \in U$，有 $\overline{x} = \overline{a} = a$，故 $\overline{x} = \overline{x} x$. 从引理 9 的证明可推断出 x 是幂等元，故 $x = e_x$. 从而

$$a = \overline{a} = \overline{x} = \overline{e_x} = \overline{x}^+ \in E^o$$

因此

$$I(U) \subseteq E(R) \,|\!\times\!|\, E^o$$

对任一 $(x, a) \in U$，其中 $x^2 = x$ 及 $a \in E^o$，显然有

$$(x, a) \in E(U) \qquad (x, a) \mathscr{L} (a, a) \in E(W)$$

所以 $I(U) = E(R) \,|\!\times\!|\, E^o \simeq E(R)$ 是左正则带. 对偶地，$\Lambda(U) = E^o \,|\!\times\!|\, E(L) \simeq E(L)$ 是右正则带.

据定义知 W 是 U 的良恰当断面. 至此完成了定理 1 正面部分的证明.

反之，假设 S 是富足半群，具有良恰当断面 S^o. 则 I 是左正则带，Λ 是右正则带. 从而，R 是 $\mathscr{R}^*$ -幂单半群，L 是 $\mathscr{L}^*$ -幂单半群，且 R 和 L 分享一个共同的恰当断面 S^o. 对任一 $a \in L$ 及 $x \in R$，设

$$\phi_a : R \longrightarrow R \qquad \phi_a x = ax\overline{ax}^*$$

$$\psi_x : L \longrightarrow L \qquad a\psi_x = \overline{ax}^+ ax$$

为映射. 则它们满足下列条件：

(ⅰ) 因

$$\phi_a y = ay\overline{ay}^* = e_{ay}\overline{ay}f_{ay}\overline{ay}^* = e_{ay}\overline{ay}$$

及 $e_{ay}\mathscr{L}\overline{ay}^+$，有$\overline{\phi_a y} = \overline{ay}$. 类似地，因

$$a\psi_y = \overline{ay}^+ ay = \overline{ay}f_{ay}$$

及 $f_{ay}\mathscr{R}\overline{ay}^*$，有$\overline{a\psi_y} = \overline{ay}$. 故$\overline{\phi_a y} = \overline{a\psi_y}$.

(ⅱ) 由$\overline{x} = \overline{b}$，$x \in R$ 及 $b \in L$ 知

$$e_x b = e_x\overline{b}f_b = e_x\overline{x}f_b = xf_b$$

计算得

$$\phi_a(e_x(\phi_b y)) = \phi_a(e_x(by\overline{by}^*)) = ae_x(by\overline{by}^*)\overline{ae_x(by\overline{by}^*)}^* =$$

$$e_{ae_x(by\overline{by}^*)}\overline{ae_x(by\overline{by}^*)} = e_{ae_x by}\overline{ae_x by} = e_{axf_b y}\overline{axf_b y}$$

$$e_{\phi_a x}(\phi_{(a\psi_x)f_b}y) = e_{ax\overline{ax}^*}(\phi_{(\overline{ax}^+ ax)f_b}y) = e_{ax}e_{(\overline{ax}^+ ax)f_b y}\overline{(\overline{ax}^+ ax)f_b y} =$$

$$e_{ax}e_{axf_b y}\overline{axf_b y} = e_{axf_b y}\overline{axf_b y}$$

故

$$\phi_a(e_x(\phi_b y)) = e_{\phi_a x}(\phi_{(a\psi_x)f_b}y)$$

类似地，有

$$(a\psi_{e_x(\phi_b y)})f_{b\psi_y} = \overline{axf_b y}f_{axf_b y} = ((a\psi_x)f_b)\psi_y$$

(ⅲ) 若 $a \in S^o$，则 $ay \in S^oR \subseteq R$，故 $f_{ay} = \overline{ay}^*$. 所以

$$\phi_a y = ay\overline{ay}^* = ayf_{ay} = ay$$

$$a\psi_y = \overline{ay}^+ ay = \overline{ay}f_{ay} = \overline{ayay}^* = \overline{ay}$$

对偶地，若 $x \in S^o$，则 $b\psi_x = bx$，且 $\phi_a x = \overline{ax}$.

(ⅳ) 易知

$$e_a(\phi_a y) = e_a ay\overline{ay}^* = ay\,\overline{ay}^* = \phi_a y$$

$$(a\psi_y)f_y = \overline{ay}^+ ayf_y = \overline{ay}^+ ay = a\psi_y$$

(ⅴ) 最后证明：若 $b\psi_x = c\psi_x$ 及 $e_y(\phi_b x) = e_z(\phi_c x)$，则

$$b\psi_{e_x} = c\psi_{e_x} \qquad e_y(\phi_b e_x) = e_z(\phi_c e_x)$$

因 $e_{bx} = e_{be_x}$，由 E^o 是半格，有$\overline{bx}^+ = \overline{be_x}^+$. 类似地，$\overline{cx}^+ = \overline{ce_x}^+$. 从 $b\psi_x = c\psi_x$ 可推断出

$$\overline{be_x}^+ \cdot be_x\overline{x} = \overline{ce_x}^+ ce_x\overline{x}$$

所以$\overline{be_x}^+ be_x = \overline{ce_x}^+ ce_x$，从而 $b\psi_x = c\psi_x$. 若 $e_y(\phi_b x) = e_z(\phi_c x)$，则 $e_y e_{bx}\overline{bx} = e_z e_{cx}\overline{cx}$. 因 $b\psi_x = c\psi_x$，有$\overline{b\psi_x} = \overline{c\psi_x}$，据(ⅰ)，$\overline{bx} = \overline{cx}$. 从而

$$e_y e_{bx}\overline{bx}^+ = e_z e_{cx}\overline{cx}^+$$

故 $e_y e_{bx} = e_z e_{cx}$. 所以 $e_y e_{be_x} = e_z e_{ce_x}$. 类似地，因 $b\psi_{e_x} = c\psi_{e_x}$，有$\overline{be_x} = \overline{ce_x}$，故

$$e_y e_{be_x}\overline{be_x} = e_z e_{ce_x}\overline{ce_x}$$

从而

$$e_y be_x\overline{be_x}^* = e_z ce_x\overline{ce_x}^*$$

即

$$e_y(\phi_b e_x)=e_z(\phi_c e_x)$$

对偶地，若 $\phi_a y=\phi_a z$ 及 $(a\psi_y)f_b=(a\psi_z)f_c$，则

$$\phi_{f_a} y=\phi_{f_a} z \qquad (f_a\psi_y)f_b=(f_a\psi_z)f_c$$

所以得到一个富足半群 U. 最后证明 U 同构于 S.

设 $(x, a)\in U$. 定义 $\theta: U\longrightarrow S$ 为 $\theta((x, a))=e_x a$，则 θ 是有定义的，且 θ 是单射. 事实上，若

$$\overline{x}=\overline{a} \qquad \overline{y}=\overline{b} \qquad e_x a=e_y b$$

其中 $x, y\in R$，$a, b\in L$. 则从 $e_x a=e_x\overline{a}f_a$，$f_a\mathscr{R}\overline{a}^*$ 和 $e_x\mathscr{L}\overline{x}^+=\overline{a}^+$ 可推断出 $\overline{e_x a}=\overline{a}$. 类似地，$\overline{e_y b}=\overline{b}$，故 $\overline{a}=\overline{b}$. 从而

$$\overline{x}=\overline{y} \qquad f_x=\overline{x}^*=\overline{y}^*=f_y$$

所以

$$x=e_x\overline{x}f_x=e_x\overline{a}f_x=e_x af_x=e_y bf_x=e_y bf_y=e_y\overline{b}f_y=e_y\overline{y}f_y=y$$

类似地，$a=b$.

对任意 $(x, a),(y, b)\in U$，因 $yf_b=e_y b$，有

$$\begin{aligned}\theta[(x, a)(y, b)]&=\theta((e_x ay\overline{ay}^*, \overline{ay}^+ ayf_b))=\\ &e_{e_x ay\overline{ay}^*}\cdot\overline{ay}^+ ayf_b=e_x e_{ay\overline{ay}^*}\cdot\overline{ay}^+ ayf_b=\\ &e_x e_{ay}\overline{ay}^+ ayf_b=e_x ayf_b=e_x a\cdot e_y b=\\ &\theta((x, a))\cdot\theta((y, b))\end{aligned}$$

故 θ 是同态. 对任一 $x\in S$，易验证 $x\overline{x}^*\in R$ 且 $\overline{x}^+ x\in L$. 而且，从

$$x\overline{x}^*=e_x\overline{x}f_x\overline{x}^*=e_x\overline{x}\quad\overline{x}^* \qquad e_x\mathscr{L}\overline{x}^+$$

和

$$\overline{x}^+ x=\overline{x}^+ e_x\overline{x}f_x=\overline{x}^+\overline{x}f_x \qquad f_x\mathscr{R}\overline{x}^*$$

可推断出 $\overline{x\overline{x}^*}=\overline{x}=\overline{\overline{x}^+ x}$. 故 $(x\overline{x}^*, \overline{x}^+ x)\in U$ 且

$$\theta((x\overline{x}^*, \overline{x}^+ x))=e_{x\overline{x}^*}\cdot\overline{x}^+ x=e_x\overline{x}^+ x=e_x x=x$$

这就说明 θ 是满射. 所以 θ 是一个同构.

参考文献：

[1] BLYTH T S，MCFADDEN R. Regular Semigroups with a Multiplicative Inverse Transversal [J]. Proc Roy Soc Edinburgh，1982，92(3-4)：253-270.

[2] SAITO T. Structure of Regular Semigroups with a Quasi-Ideal Inverse Transversal [J]. Semigroup Forum，1985，31(1)：305-309.

[3] TANG X L. Regular Semigoups with Inverse Transversal [J]. Semigroup Forum，1997，55(1)：24-32.

[4] EL-QALLALI A. Abundant Semigroups with a Multiplicative Type A Transversal [J]. Semigroup Forum，1993，47(1)：327-340.

[5] CHEN J C. Abundant Semigroups with Adequate Transversals [J]. Semigroup Forum，2000，60(1)：67-79.

[6] KONG X J. Abundant Semigroups with Quasi-Ideal Adequate Transversals [J]. Advance in Math，2008，37(1)：37-40.

[7] WANG P，KONG X J. Structure of Abundant Semigroups with Left Simplistic S-Adequate Transversals [J]. Advance in Math，2012，41(5)：554-564.

[8] 孔祥军，侯海龙，王　蓓. 一类富足半群的结构 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2010，32(2)：113-117.

[9] 潘慧兰，王正攀，李际单. $(LO)BG$ 的两种分解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(2)：5-8.

[10] 孙　垒. 保持等价关系的变换半群的组合结果[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(8): 82-88.

[11] KONG X J. Some Properties Associated with Adequate Transversals [J]. Canadian Math Bull, 2011, 54(3): 487-497.

[12] KONG X J, WANG P. The Product of Quasi-Ideal Adequate Transversals of an Abundant Semigroup [J]. Semigroup Forum, 2011, 83(2): 304-312.

[13] KONG X J, WANG P, WU Y H. The Product of Quasi-Ideal Refined Generalised Quasi-Adequate Transversals [J]. Open Mathematics, 2019, 17(1): 43-51.

[14] 孔祥军, 王　蓓. 关于可乘拟恰当断面的好同余[J]. 山东大学学报(理学版), 2018, 53(12): 1-3, 8.

[15] FOUNTAIN J. Abundant Semigroups [J]. Proc London Math Soc, 1982, 44(S3): 103-129.

[16] FOUNTAIN J. Adequate Semigroups [J]. Proc Edinburgh Math Soc, 1979, 22(2): 113-125.

A Structure of Abundant Semigroups with Good Adequate Transversals

KONG Xiang-jun[1], WANG Pei[2]

1. School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China;

2. School of Software Engineering, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China

Abstract: By means of an $\mathscr{L}^*$-unipotent semigroup and an $\mathscr{R}^*$-unipotent semigroup, a symmetrical spined product structure theorem for an abundant semigroup with a good adequate transversal is established. This conclusion removes "quasi-ideal" - an important premise - thus making it more concise than the conclusions in available literature. The result of this paper is an improvement and extension of the previous results about inverse transversals and adequate transversals. It lays a solid theoretical foundation for further study of the structure, properties and characterization of the congruences on this kind of semigroups.

Key words: abundant semigroup; good adequate transversal; $\mathscr{L}^*$-unipotent semigroup

责任编辑　廖　坤