DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.10.006

模糊度量空间中的有界集①

杨　浩，　吴健荣

苏州科技大学 数理学院，江苏 苏州 215009

摘要： 研究了 Gregori 和 Veeramani 意义下的模糊度量空间的有界性问题. 提出了模糊强有界集和模糊弱有界集的概念. 利用割度量和邻域等方法，得到了模糊强有界、模糊有界、模糊弱有界和模糊无界等性质的若干刻画，进一步深化了模糊度量空间的理论.

关　键　词： 模糊度量；模糊强有界集；模糊有界集；模糊弱有界集；模糊无界集

中图分类号：O159　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673－9868(2019)10－0045－06

文献[1]首先提出了模糊集合的概念，随后人们把模糊集和度量问题结合起来，从不同的角度定义了模糊度量空间的概念[2-4]，并研究了它们的一些性质. 受概率度量空间定义的启发，文献[5]利用两点距离的不确定性，给出了模糊度量(简称为 KM 模糊度量)的概念. 文献[6]对 KM 模糊度量进行了改进，提出了现在被称之为 GV 模糊度量的新概念，并给出了模糊度量导出的拓扑，证明了该拓扑是第一可数和 Hausdorff 的.

由于 GV 模糊度量被广泛地应用在彩色图像处理[7-8]和算法分析[9-12]中，越来越多的学者投入到对它的研究中. 已有研究表明，每个度量可以导出一个 GV 模糊度量. 反之，每个 GV 模糊度量可以生成一个可度量化的拓扑[5]. 文献[13]证明了存在不可完备化的 GV 模糊度量空间，这就与经典的度量空间有很大的区别.

有界性是度量空间理论中的一个重要概念. 文献[6]定义了空间子集的模糊有界性，并用有界性定义了紧致性. 文献[14]进一步给出了模糊有界、模糊半有界和模糊全有界的概念，并研究了它们之间的关系. 这些不同的概念反映了 GV 模糊度量空间中丰富的结构. 因此，进一步刻画这些概念的内在特性具有重要的意义.

1　预备知识

本节首先引入一些模糊度量空间的基本概念.

定义 1[15]　若二元算子 $*$：$[0,1]\times[0,1]\longrightarrow[0,1]$ 满足：

(a) $*$ 对结合律和交换律成立；

(b) $*$ 是连续的；

(c) $a*1=a\ (\forall a\in[0,1])$；

---

① 收稿日期：2018－05－27

基金项目：国家自然科学基金项目(11371013).

作者简介：杨　浩(1991－)，男，硕士研究生，主要从事模糊度量空间相关性质的研究.

通信作者：吴健荣，教授.

(d) 当 $a \leqslant c$ 和 $b \leqslant d(a, b, c, d \in [0, 1])$ 时，$a * b \leqslant c * d$.

则称 $*$ 是连续 t 模.

根据定义 1，容易验证连续 t 模 $*$ 满足以下性质：

性质 1[16] 设算子 $*: [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ 是连续 t 模，则：

(i) 若 $r_1 > r_2$，则存在 $r_3 \in (0, 1)$，使得 $r_1 * r_3 > r_2$，其中 $r_1, r_2 \in (0, 1)$；

(ii) $\forall r_4 \in (0, 1)$，则存在 $r_5 \in (r_4, 1)$，使得 $r_5 * r_5 > r_4$.

定义 2[6] 设 X 是一非空集合，$*$ 是连续的 t 模. $\forall x, y, z \in X$，$t, s > 0$，X 上的映射 $M: X^2 \times (0, \infty) \longrightarrow (0, 1]$ 满足以下条件：

(a) $M(x, y, t) > 0$；

(b) $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$；

(c) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$；

(d) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leqslant M(x, z, t + s)$；

(e) $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \longrightarrow (0, 1]$ 是连续的.

则称 M 是 X 上的一个 GV 模糊度量(以下简称为模糊度量)，称 $(X, M, *)$ 为 GV 模糊度量空间(以下简称为模糊度量空间).

引理 1[15] 对 $\forall x, y \in X$，$M(x, y, \cdot)$ 是递增的.

定义 3[14] 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间，$A \subseteq X$，令 $\phi_A(t) = \inf\limits_{x, y \in A} M(x, y, t)$. 若 $\sup\limits_{t > 0} \phi_A(t) = 1$，则称 A 是模糊有界集；若 $\sup\limits_{t > 0} \phi_A(t) = k$，$0 < k < 1$，则称 A 是模糊半有界集；若 $\sup\limits_{t > 0} \phi_A(t) = 0$，则称 A 是模糊无界集.

性质 2 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间，$A \subseteq X$，则：

(i) $\phi_A(t)$ 是递增的，因此 $\lim\limits_{t \to \infty} \phi_A(t)$ 存在；

(ii) $\lim\limits_{t \to \infty} \phi_A(t) = \sup\limits_{t > 0} \phi_A(t)$.

定义 4 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间，$A \subseteq X$，

(a) 如果存在 $t_0 > 0$，使得 $\phi_A(t_0) = 1$，则称 A 是模糊强有界集；

(b) 如果 $\phi_A(t) > 0$，则称 A 是模糊弱有界集.

注 1 显然，若 A 是模糊强有界集，则 A 是模糊有界集；A 是模糊弱有界集当且仅当 A 是模糊(半)有界集.

2 主要结果

对 $r \in [0, 1]$，$x, y \in X$，记

$$d_r(x, y) = \inf\{t > 0: M(x, y, t) \geqslant 1 - r\}$$

称 d_r 为 X 上的 r-(割) 度量. 显然，$d_1(x, y) \equiv 0$. 利用常规方法，可以得到以下引理：

引理 2 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间，$A \subseteq X$，$r \in [0, 1]$，则

$$\inf\{t > 0: \inf_{x, y \in A} M(x, y, t) \geqslant 1 - r\} = \sup_{x, y \in A} \inf\{t > 0: M(x, y, t) \leqslant 1 - r\}$$

引理 3 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间，$A \subseteq X$，$r \in [0, 1]$. 若

$$\inf\{t > 0: \inf_{x, y \in A} M(x, y, t) \geqslant 1 - r\} \leqslant t_0$$

则

$$\inf_{x, y \in A} M(x, y, t_0) \geqslant 1 - r$$

特别地，$\forall x, y \in X$，若 $\inf\{t > 0: M(x, y, t) \geqslant 1 - r\} \leqslant t_0$，则 $M(x, y, t_0) \geqslant 1 - r$.

引理 4　设$(X, M, *)$是模糊度量空间，$x, y \in X$，$r \in (0, 1)$，则

$$d_r(x, y) = \sup\{t > 0: M(x, y, t) < 1 - r\}$$

定理 1　设$(X, M, *)$是模糊度量空间，$A \subseteq X$，则：

(i) A 强模糊有界当且仅当存在 $t_0 > 0$，使得对$\forall r \in [0, 1]$，有 $\sup\limits_{x, y \in A} d_r(x, y) \leqslant t_0$；

(ii) A 模糊有界当且仅当对$\forall r \in (0, 1]$，存在正数 $t_0 = t_0(r)$，使得 $\sup\limits_{x, y \in A} d_r(x, y) \leqslant t_0(r)$；

(iii) A 弱模糊有界但非模糊有界当且仅当存在 $r_0 \in (0, 1)$，使得当 $r \in (0, r_0)$ 时，$\sup\limits_{x, y \in A} d_r(x, y) = \infty$，而当 $r \in (r_0, 1)$ 时，存在 $t_0 = t_0(r) > 0$，使得 $\sup\limits_{x, y \in A} d_r(x, y) \leqslant t_0(r)$；

(iv) A 模糊无界当且仅当对$\forall r \in [0, 1)$，有 $\sup\limits_{x, y \in A} d_r(x, y) = \infty$.

证　(i) 必要性易证，仅证充分性. 为此，设 $\sup\limits_{x, y \in A} d_r(x, y) \leqslant t_0$ 对一切 $r \in [0, 1]$ 成立. 由引理 2，有

$$\inf\{t > 0: \inf_{x, y \in A} M(x, y, t) \geqslant 1 - r\} = \sup_{x, y \in A} d_r(x, y) \leqslant t_0$$

由引理 3，有

$$\inf_{x, y \in A} M(x, y, t_0) \geqslant 1 - r$$

再由 r 的任意性，即得 $\inf\limits_{x, y \in A} M(x, y, t_0) = 1$.

(ii) 设 A 模糊有界，则

$$\sup_{t > 0} \inf_{x, y \in A} M(x, y, t) = 1$$

故对$\forall r \in (0, 1]$，存在 $t_0(r) > 0$，使得

$$\inf_{x, y \in A} M(x, y, t_0(r)) > 1 - r$$

由引理 2 即得

$$\sup_{x, y \in A} d_r(x, y) = \inf\{t > 0: \inf_{x, y \in A} M(x, y, t) \geqslant 1 - r\} \leqslant t_0(r)$$

反之，对任意 $r \in (0, 1]$，存在 $t_0(r) > 0$，使得

$$\sup_{x, y \in A} \inf_t\{t > 0: M(x, y, t) \geqslant 1 - r\} \leqslant t_0(r)$$

则对$\forall x, y \in A$，有

$$\inf_t\{t > 0: M(x, y, t) \geqslant 1 - r\} \leqslant t_0(r)$$

由引理 3 可知 $M(x, y, t_0(r)) \geqslant 1 - r$，所以

$$\inf_{x, y \in A} M(x, y, t_0(r)) \geqslant 1 - r$$

从而

$$\sup_{t > 0} \inf_{x, y \in A} M(x, y, t) \geqslant 1 - r$$

由 r 的任意性，即得$\sup\limits_{t > 0} \inf\limits_{x, y \in A} M(x, y, t) = 1$.

(iii) 设 A 弱模糊有界但非模糊有界，则

$$r_0 = 1 - \sup_{t > 0} \inf_{x, y \in A} M(x, y, t) \in (0, 1)$$

分两种情况：

情况 1　当 $r \in (0, r_0)$ 时，有

$$1 - r_0 = \sup_{t > 0} \inf_{x, y \in A} M(x, y, t) < 1 - r$$

因而对$\forall t > 0$，$\inf\limits_{x, y \in A} M(x, y, t) < 1 - r$. 由引理 2，有

$$\sup_{x, y \in A} \inf\{t > 0: M(x, y, t) \geqslant 1 - r\} = \inf\{t > 0: \inf_{x, y \in A} M(x, y, t) \geqslant 1 - r\} = \infty$$

情况 2　当 $r \in (r_0, 1)$ 时，有

$$1 - r_0 = \sup_{t > 0} \inf_{x, y \in A} M(x, y, t) > 1 - r$$

故存在 $t_0(r)>0$，使得 $\inf\limits_{x,y\in A}M(x,y,t_0(r))>1-r$. 于是由引理2，有

$$\sup_{x,y\in A}d_r(x,y)=\inf_t\{t>0:\inf_{x,y\in A}M(x,y,t)\geqslant 1-r\}\leqslant t_0(r)$$

反之，设(iii)中条件成立. 则当 $r\in(0,r_0)$ 时，有

$$\sup_{x,y\in A}\inf\{t>0:M(x,y,t)\geqslant 1-r\}=\infty$$

于是，对 $\forall t_0>0$，有

$$\inf\{t>0:\inf_{x,y\in A}M(x,y,t)\geqslant 1-r\}=\sup_{x,y\in A}\inf\{t>0:M(x,y,t)\geqslant 1-r\}>t_0$$

从而

$$\inf_{x,y\in A}M(x,y,t_0)<1-r$$

由 t_0 的任意性，有

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}M(x,y,t)\leqslant 1-r$$

注意到 $r\in(0,r_0)$，$r_0\in(0,1)$，因此 $\sup\limits_{t>0}\inf\limits_{x,y\in A}M(x,y,t)\neq 1$.

当 $r\in(r_0,1)$ 时，由于存在 $t_0(r)>0$，使得

$$\sup_{x,y\in A}\inf\{t\geqslant 0:M(x,y,t)\geqslant 1-r\}\leqslant t_0(r)$$

由引理2，有

$$\inf\{t>0:\inf_{x,y\in A}M(x,y,t)\geqslant 1-r\}\leqslant t_0(r)$$

再由引理3，有

$$\inf_{x,y\in A}M(x,y,t_0(r))\geqslant 1-r$$

于是

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}M(x,y,t)\geqslant 1-r$$

注意到 $r\in(r_0,1)$，$r_0\in(0,1)$，可得

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}M(x,y,t)>0$$

所以

$$1\neq\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}M(x,y,t)>0$$

即证明了 A 为弱模糊有界但非模糊有界集.

(iv) 易证，此略.

设 $t>0$，$r>0$，$x\in X$，记

$$B_x^r(t)=B_x(t,r)=\{y\in X:M(x,y,t)>1-r\}$$

定理2 设 $(X,M,*)$ 是模糊度量空间，$A\subseteq X$，则：

(i) A 是强模糊有界的当且仅当存在 $t_0>0$，对 $\forall r\in(0,1)$ 及 $\forall a\in A$，有 $A\subseteq B_a(t_0,r)$；

(ii) A 是模糊有界的当且仅当对 $\forall r\in(0,1)$，$\forall t>0$ 及 $\forall a\in A$，有 $A\subseteq B_a(t,r)$；

(iii) A 是弱模糊有界的当且仅当存在 $r_0\in(0,1)$ 及 $t_0>0$，对 $\forall a\in A$，有 $A\subseteq B_a(t_0,r_0)$；

(iv) A 是模糊无界的当且仅当对 $\forall r\in(0,1)$ 及 $\forall t>0$，存在 $a,b\in A$，使得 $b\notin B_a(t,r)$.

证 (i) 设 A 是强模糊有界的，即存在 $t_0>0$，使得 $\inf\limits_{x,y\in A}M(x,y,t_0)=1$. 因此，对 $\forall r\in(0,1)$，$a,x\in A$，有 $M(a,x,t_0)>1-r$，从而 $A\subseteq B_a(t_0,r)$.

反之，设存在 $t_0>0$，对 $\forall r\in(0,1)$ 及 $\forall a\in A$，都有 $A\subseteq B_a(t_0,r)$. 则对 $\forall x,y\in A$，$M(x,y,t_0)>1-r$，于是 $\inf\limits_{x,y\in A}M(x,y,t_0)\geqslant 1-r$. 再由 r 的任意性可知 $\inf\limits_{x,y\in A}M(x,y,t)=1$. 所以 A 是强模糊有界的.

(ii) 设 A 是模糊有界的，即 $\sup\limits_{t>0}\inf\limits_{x,y\in A}M(x,y,t)=1$. 从而对 $\forall r\in(0,1)$，存在 $t>0$，使得 $\inf\limits_{x,y\in A}M(x,$

$y, t) > 1-r$，则对$\forall a \in A$，$A \subseteq B_a(t, r)$.

反之，设$\forall r \in (0, 1)$，存在$t > 0$，对$\forall a \in A$，有$A \subseteq B_a(t, r)$，也即对$\forall x, y \in A$，有$M(x, y, t) > 1-r$，则$\inf\limits_{x,y\in A} M(x, y, t) \geqslant 1-r$. 由$r$的任意性可知$\sup\limits_{t>0} \inf\limits_{x,y\in A} M(x, y, t) = 1$，即$A$是模糊有界的.

(iii) 设A是弱模糊有界的，即$\sup\limits_{t>0} \inf\limits_{x,y\in A} M(x, y, t) > 0$. 于是存在$r' \in (0, 1)$，使得$\sup\limits_{t>0} \inf\limits_{x,y\in A} M(x, y, t) > r'$，从而存在$t_0 > 0$，使得$\inf\limits_{x,y\in A} M(x, y, t_0) > r'$. 令$r_0 = 1-r'$，则对$\forall a, x \in A$，$M(a, x, t_0) > 1-r_0$，即$x \in B_a(t_0, r_0)$. 因此$A \subseteq B_a(t_0, r_0)$.

反之，若$A \subseteq B_a(t_0, r_0)$，则$\inf\limits_{x,y\in A} M(x, y, t_0) \geqslant 1-r_0 > 0$. 从而有

$$\sup_{t>0} \inf_{x,y\in A} M(x, y, t) \geqslant \inf_{x,y\in A} M(x, y, t_0) \geqslant 1-r_0 > 0$$

即A是弱模糊有界的.

(iv) 只要注意到"A是模糊无界的当且仅当A不是弱模糊无界的"即知.

下面的结论说明：在一定条件下，定理 2 的条件可以弱化.

定理 3　设$(X, M, *)$是模糊度量空间，$A \subseteq X$. 假定存在$e \in X$，$a \in A$及$s > 0$，使得$M(a, e, s) = 1$，则：

(i) A是强模糊有界的当且仅当存在$t_0 > 0$，对$\forall r \in (0, 1)$，都有$A \subseteq B_e(t_0, r)$；

(ii) A是模糊有界的当且仅当对$\forall r \in (0, 1)$，存在$t > 0$，有$A \subseteq B_e(t, r)$；

(iii) A是弱模糊有界的当且仅当存在$r_0 \in (0, 1)$和$t_0 > 0$，有$A \subseteq B_e(t_0, r_0)$.

证　以(ii)为例，仅需证充分性. 假定对$\forall r \in (0, 1)$，存在$t > 0$，有$A \subseteq B_e(t, r)$. 由性质 1，存在$r' \in (0, r)$，使得

$$(1-r') * (1-r') > 1-r$$

对r'，存在$t' > 0$，有$A \subseteq B_e(t', r')$. 则对$\forall x, y \in A$，有

$$M(x, y, 2t') \geqslant M(x, e, t') * M(e, y, t') \geqslant (1-r') * (1-r') > 1-r$$

于是$A \subseteq B_x(2t', r)$. 由定理 1 知，A是模糊有界的.

定义 5　设(X, M)是模糊度量空间，$A \subseteq X$，$r \in (0, 1]$. 若存在$t_0 > 0$，使得对$\forall x, y \in A$，有$M(x, y, t_0) > 1-r$，则称A是X的r-有界子集.

注 2　显然，A是r-有界的当且仅当存在$t_0 > 0$，对$\forall a \in A$，都有$A \subseteq B_a(t, r_0)$.

由定理 2 易证明以下结论：

定理 4　设(X, M)是模糊度量空间，$A \subseteq X$，则有：

(i) A是强模糊有界的当且仅当A关于$r \in (0, 1)$是一致r-有界的；

(ii) A是模糊有界的当且仅当对$\forall r \in (0, 1)$，A都是r-有界的；

(iii) A是弱模糊有界的当且仅当存在$r_0 \in (0, 1)$，使得A是r_0-有界的.

参考文献：

[1] ZADEH L A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] DENG Z K. Fuzzy Pseudo-Metric Spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1982, 86(1): 74-95.

[3] ERCEG M A. Metric Spaces in Fuzzy Set Theory [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1979, 69(1): 205-230.

[4] KALEVA O, SEIKKALA S. On Fuzzy Metric Spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12(3): 215-229.

[5] KRAMOSIL I, MICHÁLEK J. Fuzzy Metric and Statistical Metric Space [J]. Kybernetika Praha, 1975, 11(5): 336-344.

[6] GEORGE A, VEERAMANI P. On Some Results in Fuzzy Metric Spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(3): 395-399.

[7] GREGORI V, MORILLAS S, SAPENA A. Examples of Fuzzy Metrics and Applications [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2011, 170(1): 95-111.

[8] 施成湘. 基于邻域特征的彩色图像分割方法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(2): 106-110.

[9] MORILLAS S, GREGORI V, PERIS-FAJARNÉS G, et al. A New Vector Median Filter Based on Fuzzy Metrics [M] // Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005: 81-90.

[10] MORILLAS S, GREGORI V, PERIS-FAJARNÉS G, et al. A Fast Impulsive Noise Color Image Filter Using Fuzzy Metrics [J]. Real-Time Imaging, 2005, 11(5-6): 417-428.

[11] ROMAGUERA S, SAPENA A, TIRADO P. The Banach Fixed Point Theorem in Fuzzy Quasi-Metric Spaces with Application to the Domain of Words [J]. Topol Appl, 2007, 154(10): 2196-2203.

[12] 尹大平, 杨明歌, 邓　磊. 模糊度量空间中广义压缩映射的不动点的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(2): 92-95.

[13] GREGORI V, ROMAGUERA S. On Completion of Fuzzy Metric Spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130(3): 399-404.

[14] GEORGE A, VEERAMANI P. Compact and Bounded Sets in Fuzzy Metric Spaces [J]. Int J of Fuzzy Mathematics, 2000(8): 975-980.

[15] SCHWEIZER B, SKLAR A. Statistical Metric Spaces [J]. Pacific J Math, 1960, 10(1): 313 -334.

[16] 杨　洋, 吴健荣. 关于模糊拟度量诱导的双拓扑空间的一些性质 [J]. 苏州科技大学学报(自然科学版), 2017, 34(4): 14-19.

Bounded Sets of Fuzzy Metric Spaces

YANG　Hao,　WU Jian-rong

School of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu 215009, China

Abstract: This paper is designed to study systematically the boundedness on fuzzy metric spaces, in the sense of Gregori and Veeramani. The new concepts of strong boundedness and weak boundedness are introduced. By using the methods such as cut distance and neighborhood, the properties of strongly bounded fuzzy sets, bounded fuzzy sets, weakly bounded fuzzy sets and unbounded fuzzy sets are characterized. The obtained results deepen the theoretical researches on fuzzy metric spaces.

Key words: fuzzy metric space; strongly bounded fuzzy set; bounded fuzzy set; weakly bounded fuzzy set; unbounded fuzzy set

责任编辑　廖　坤