第 41 卷第 11 期 西南大学学报(自然科学版) 2019年11月
Vol. 41 No. 11 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Nov. 2019

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.11.008

带借贷利率和干扰的双 Poisson-Geometric 风险过程模型①

王月明[1], 魏广华[2], 郭 楠[1], 高艳艳[1]

1. 南京工程学院 数理部,南京 211167;2. 金陵科技学院 理学院,南京 211169

摘要: 考虑了带借贷利率及干扰的双复合 Poisson-Geometric 风险过程,借助全期望公式、微分和伊藤积分等知识,并综合引起破产的原因得到无限时破产概率积分微分方程和有限时破产概率的积分偏微分方程.

关 键 词: 借贷;复合 Poisson-Geometric 过程;布朗运动;破产概率;积分微分方程;积分偏微分方程

中图分类号: O211.9 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2019)11-0054-10

近年来,破产概率是风险理论研究中的热门话题,越来越多学者开始研究各种风险模型下的破产概率、利率等问题[1-11]. 文献[9]考虑带借贷的理赔为单复合泊松模型的风险模型,文献[2]研究带借贷及干扰的理赔为双复合泊松模型的风险过程,获得积分微分方程. Poisson 分布的重要特征是方差等于均值,但是索赔事件和风险事件不是等价的,实际生活中,保险公司和投保人提高了风险意识,保险公司采用回避风险机制,如免赔制度、无赔款折扣(NCD)制度,所以事故发生时,投保人会权衡其利益得失而决定是否进行索赔,从而理赔次数小于事故发生次数,因此索赔次数并不完全遵循 Poisson 分布,文献[3-5]对该问题进行了研究,考虑索赔次数为复合 Poisson-Geometric 风险过程,得到破产概率的积分方程. 本文推广上述风险模型,引入双复合 Poisson-Geometric 风险过程,并用布朗运动描述不确定的付款和收益的影响,同时考虑借贷因素,即研究带借贷及干扰的双复合 Poisson-Geometric 模型.

记

$$
\begin{aligned}
U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i - \sum_{j=1}^{N_2(t)} Y_j + \sigma B(t) = \\
u + ct - S_1(t) - S_2(t) + \sigma B(t) \qquad t \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中: u 是初始准备金, c 是保险公司单位时间征收的保险费率; $\{X, X_i, i=1,2,\cdots\}$ 是期望为 μ_1 的独立同分布的非负随机变量序列, X 表示 A 险种的理赔额,其分布为 $G(x)$,密度函数为 $g(x)$,且 $G^{*k}(x)$, $g^{*k}(x)$ 分别为 $G(x)$, $g(x)$ 的 k 重卷积; $\{N_1(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 (λ_1, ρ_1) 的 Poisson-Geometric 过程,表示到时刻 t 为止 A 险种理赔发生的次数; $\{Y, Y_j, j=1,2,\cdots\}$ 是期望为 μ_2 的独立同分布的非负随机变量序列, Y 表示 B 险种的理赔额,其分布为 $F(x)$,密度函数为 $f(x)$,且 $F^{*k}(x)$, $f^{*k}(x)$ 分别为 $F(x)$, $f(x)$ 的 k 重卷积; $\{N_2(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 (λ_2, ρ_2) 的 Poisson-Geometric 过程,表示到时刻 t 为止 B 险种理赔

① 收稿日期: 2017-07-13
基金项目: 国家自然科学基金项目(61374080,11271193);江苏高校自然科学研究项目(11KJB110005).
作者简介: 王月明(1980-),女,讲师,主要从事基础数学研究.

发生的次数;$\{B(t), t \geqslant 0\}$ 是一标准布朗运动,表示不确定的付款和收入,σ 是一常数;由于各个保险过程和理赔是相互独立的,设$\{X_i, i=1,2,\cdots\}$,$\{Y_j, j=1,2,\cdots\}$,$\{N_1(t), t \geqslant 0\}$,$\{N_2(t), t \geqslant 0\}$ 以及 $\{B(t), t \geqslant 0\}$ 是相互独立的.

为了使模型更具有实际意义,假设当保险公司财政赤字时,即盈余是负的,可以允许其以利息力 $\delta > 0$ 进行借贷并继续经营其业务,保险公司通过它的保费收入来偿还其债务,然而当公司的盈余低于 $-\dfrac{c}{\delta}$ 时,绝对破产出现.

带借贷的双复合 Poisson-Geometric 模型风险过程,即

$$\mathrm{d}U_\delta(t)=(c+\delta U_\delta(t)I(U_\delta(t)<0))\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t)-\mathrm{d}S_1(t)-\mathrm{d}S_2(t) \qquad U_\delta(0)=u \tag{2}$$

其中:$I(A)$ 是集合 A 上的示性函数,设 T_δ 表示风险模型(2) 的破产时刻,$T_\delta=\inf\left\{t \geqslant 0: U_\delta(t)<-\dfrac{c}{\delta}\right\}$ 且约定$\inf\phi=\infty$;$\psi(u)$ 表示模型(2) 中初始资本为 u 的无限时破产概率,即

$$\psi(u)=Pr\{T_\delta<\infty \mid U_\delta(0)=u\},\ u>-\frac{c}{\delta},\ \psi\left(-\frac{c}{\delta}\right)=1$$

当盈余处于不同水平时,破产概率符合不同的积分微分方程,为了研究问题的方便,当 $u \geqslant 0$ 时,记 $\psi(u)=\psi_+(u)$;当 $-\dfrac{c}{\delta}<u<0$ 时,记 $\psi(u)=\psi_-(u)$.

设 T 表示风险模型(1) 的破产时刻,$T=\inf\{t \geqslant 0: U(t)<0\}$;$\phi(u)$ 表示风险模型(1) 中初始资本为 u 的无限时破产概率,即

$$\phi(u)=Pr\{T<\infty \mid U_0=u\},\ u>0$$

显然当 $u \geqslant 0$ 时,$T \leqslant T_\delta$,$\psi_+(u) \leqslant \phi(u)$ 且 $\lim\limits_{u \to +\infty} \psi_+(u)=0$ 及 $0<\psi_+(u) \leqslant \phi(u)<1$.

由[5, 13] 可知,导致破产出现有两种可能. 一种是由于理赔引起的,$\psi_s(u)$ 表示破产是由理赔引起的破产概率;另一种是由于扰动引起的,$\psi_d(u)$ 表示破产是由扰动引起的破产概率. 因此无限时破产概率有以下分解:

$$\psi(u)=\psi_s(u)+\psi_d(u) \qquad u \geqslant -\frac{c}{\delta}$$

而且,

$$\psi_d\left(-\frac{c}{\delta}\right)=\psi\left(-\frac{c}{\delta}\right)=1,\ \psi_s\left(-\frac{c}{\delta}\right)=0$$

类似地,当 $u \geqslant 0$ 时,记 $\psi_{s+}=\psi_s(u)$,$\psi_{d+}=\psi_d(u)$;当 $-\dfrac{c}{\delta}<u<0$ 时,记 $\psi_{s-}=\psi_s(u)$,$\psi_{d-}=\psi_d(u)$.

同样地,定义有限时破产所有变量 $\psi(u, t)$,$\psi_s(u, t)$,$\psi_d(u, t)$,$\psi_{s-}(u, t)$,$\psi_{s+}(u, t)$,$\psi_{d-}(u, t)$,$\psi_{d+}(u, t)$.

为了保证保险公司的稳定经营,假定保费收入的期望值大于总的理赔的均值,由此定义安全负荷条件为

$$c>\frac{\lambda_1}{1-\rho_1}\mu_1+\frac{\lambda_2}{1-\rho_2}\mu_2$$

1 相关知识简要回顾

定义 1 称母函数 $G(t)=\mathrm{e}^{\frac{\lambda(t-1)}{1-\rho t}}$ 所对应的分布为复合 Poisson-Geometric 分布,记为 $PG(\lambda, \rho)$,其中 $\lambda>0$,$0 \leqslant \rho<1$.

引理 1[6] 当 $\rho=0$ 时,$PG(\lambda, \rho)$ 是参数为 λ 的 Poisson 分布.

引理 2[6]　对 $t>0$，若 $N(t)$ 服从 $PG(\lambda t,\rho)$ 分布，则

$$E(N(t))=\frac{\lambda t}{1-\rho},\ \operatorname{var}(N(t))=\frac{\lambda t(1+\rho)}{(1-\rho)^2}$$

引理 3[6]　若$\{N_i(t);t\geqslant 0\}$，是参数为 λ_i,ρ_i 的 Poisson-Geometric 过程，记 $\alpha_i=\dfrac{\lambda_i(1-\rho_i)}{\rho_i}$（若 $\rho_i=0$，则取 $\alpha_i=\lambda_i$），则当 t 足够小时有

$$P(N_i(t)=0)=\mathrm{e}^{-\lambda_i t}=1-\lambda_i t+o(t),\ P(N_i(t)=k)=\alpha_i\rho_i^k t+A_k^i(t)o(t)\qquad k=1,2,3,\cdots$$

其中

$$A_k^i(t)=\rho_i^k+(k-1)(\rho_i(1+\alpha_i t))^{k-2}$$

且 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k^i(t)$ 一致收敛，$i=1,2$，$o(t)$ 与 k 无关.

2　主要结果

定理 1　假设 $\psi_s(u)$ 是二次连续可微的，当 $u\geqslant 0$ 时，则 $\psi_s(u)$ 符合下面积分微分方程：

$$(\lambda_1+\lambda_2)\psi_{s+}(u)=c\psi'_{s+}(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''_{s+}(u)+\int_0^u\psi_{s+}(u-x)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+B_{s_1}(u)+\int_0^u\psi_{s+}(u-y)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+B_{s_2}(u)\tag{3}$$

当 $-\dfrac{c}{\delta}<u<0$ 时，则 $\psi_s(u)$ 符合下面积分微分方程：

$$(\lambda_1+\lambda_2)\psi_{s-}(u)=(u\delta+c)\psi'_{s-}(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''_{s-}(u)+\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{G^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_1\rho_1^k+\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{F^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_2\rho_2^k\tag{4}$$

边界条件为

$$\begin{cases}\psi_{s-}\left(-\dfrac{c}{\delta}\right)=0\\ \dfrac{1}{2}\sigma^2\psi''_{s-}\left(-\dfrac{c}{\delta}\right)=-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_1\rho_1^k-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_2\rho_2^k\\ \lim\limits_{u\to\infty}\psi_{s+}(u)=0\end{cases}\tag{5}$$

其中

$$B_{s_1}(u)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{G^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_1\rho_1^k$$

$$B_{s_2}(u)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{F^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_2\rho_2^k\qquad u\geqslant 0$$

证　当 $u\geqslant 0$ 时，令

$$H(t)=u+ct+\sigma B(t)$$

则

$$H(0)=u$$

且

$$\mathrm{d}H(t)=c\,\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B_t$$

由伊藤积分公式有

$$\mathrm{d}\psi_{s+}(H(t))=\left(c\psi'_{s+}(H(t))+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''_{s+}(H(t))\right)\mathrm{d}t+\sigma\psi'_{s+}(H(t))\mathrm{d}B_t$$

即

$$\psi_{s+}(H(t))-\psi_{s+}(u)=\int_0^t\left(c\psi'_{s+}(H(x))+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''_{s+}(H(x))\right)\mathrm{d}x+\int_0^t\sigma\psi'_{s+}(H(x))\mathrm{d}B_x$$

所以

$$E(\psi_{s+}(H(t)))-\psi_{s+}(u)=\int_0^t\left(cE[\psi'_{s+}(H(x))]+\frac{1}{2}\sigma^2E[\psi''_{s+}(H(x))]\right)\mathrm{d}x \tag{6}$$

在充分小的时间段$(0,t]$内，考虑(2)式定义的风险过程$U_\delta(t)$. 既然$N_1(t)$和$N_2(t)$都是Poisson-Geometric过程，则在$(0,t]$有以下4种可能情况：

1) $N_1(t)$和$N_2(t)$都没有跳跃，即没有保单到达，也没有索赔发生，其发生的概率为$(1-\lambda_1 t+o(t))(1-\lambda_2 t+o(t))$.

2) $N_1(t)$至少有一个跳跃，且$N_2(t)$没有跳跃，其发生的概率为$(1-\lambda_2 t+o(t))\sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_1\rho_1^k t+A_k^1(t)o(t)]$.

3) $N_1(t)$没有跳跃，且$N_2(t)$至少有一跳跃，其发生的概率为$(1-\lambda_1 t+o(t))\sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_2\rho_2^k t+A_k^2(t)o(t)]$.

4) $N_1(t)$(或者$N_2(t)$)至少有两个跳跃或者$N_1(t)$和$N_2(t)$同时有跳跃，其发生的概率为$o(t)$.

因此

$$\begin{aligned}\psi_{s+}(u)=&(1-\lambda_1 t+o(t))(1-\lambda_2 t+o(t))E[\psi_{s+}(H(t))]+(1-\lambda_2 t+o(t))\\&\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\int_0^{H(t)}\psi_{s+}(H(t)-x)\mathrm{d}G^{*k}(x)+\int_{H(t)}^{H(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(t)-x)\mathrm{d}G^{*k}(x)+\int_{H(t)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}\mathrm{d}G^{*k}(x)\right]\\&(\alpha_1\rho_1^k t+A_k^1(t)o(t))+(1-\lambda_1 t+o(t))\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\int_0^{H(t)}\psi_{s+}(H(t)-y)\mathrm{d}F^{*k}(y)+\right.\\&\left.\int_{H(t)}^{H(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(t)-y)\mathrm{d}F^{*k}(y)+\int_{H(t)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}\mathrm{d}F^{*k}(y)\right](\alpha_2\rho_2^k t+A_k^2(t)o(t))+o(t)\end{aligned}$$

整理可得

$$\begin{aligned}(\lambda_1+\lambda_2)tE[\psi_{s+}(H(t))]=&E[\psi_{s+}(H(t))]-\psi_{s+}(u)+\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\int_0^{H(t)}\psi_{s+}(H(t)-x)g^{*k}(x)\mathrm{d}x+\right.\\&\left.\int_{H(t)}^{H(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(t)-x)g^{*k}(x)\mathrm{d}x+\overline{G^{*k}}(H(t)+\frac{c}{\delta})\right]\alpha_1\rho_1^k t+\\&\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\int_0^{H(t)}\psi_{s+}(H(t)-y)f^{*k}(y)\mathrm{d}y+\right.\\&\left.\int_{H(t)}^{H(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(t)-y)f^{*k}(y)\mathrm{d}x+\overline{F^{*k}}(H(t)+\frac{c}{\delta})\right]\alpha_2\rho_2^k t+o(t)\end{aligned} \tag{7}$$

在(7)式两边同时除以t，令$t\to0$，同时利用(6)式则有

$$\begin{aligned}(\lambda_1+\lambda_2)\psi_{s+}(u)=&c\psi'_{s+}(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''_{s+}(u)+\int_0^u\psi_{s+}(u-x)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+\\&\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{G^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_1\rho_1^k+\end{aligned}$$

$$\int_0^u \psi_{s+}(u-y)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\overline{F^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_2\rho_2^k$$

其中

$$g_{\rho_1}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_1\rho_1^k g^{*k}(x)\qquad f_{\rho_2}(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_2\rho_2^k f^{*k}(y)$$

所以(3)式成立.

当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时，令 $Y(t)=u\mathrm{e}^{\delta t}+ct+\sigma B_t$，则 $Y(0)=u$ 及 $\mathrm{d}Y(t)=(u\delta\mathrm{e}^{\delta t}+c)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B_t$.

由伊藤积分公式有：

$$\mathrm{d}\psi_{s-}(Y(t))=\left((u\delta\mathrm{e}^{\delta t}+c)\psi_{s-}(Y(t))+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''_{s-}(Y(t))\right)\mathrm{d}t+\sigma\psi'_{s-}(Y(t))\mathrm{d}B_t$$

即

$$\psi_{s-}(Y(t))-\psi_{s-}(u)=\int_0^t\left((u\delta\mathrm{e}^{\delta x}+c)\psi_{s-}(Y(x))+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''_{s-}(Y(x))\right)\mathrm{d}x+\int_0^t\sigma\psi'_{s-}(Y(x))\mathrm{d}B_x$$

所以

$$E(\psi_{s-}(Y(t)))-\psi_{s-}(u)=\int_0^t\left((u\delta\mathrm{e}^{\delta x}+c)E[\psi_{s-}(Y(x))]+\frac{1}{2}\sigma^2E[\psi''_{s-}(Y(x))]\right)\mathrm{d}x \tag{8}$$

利用同 $u\geqslant 0$ 时的讨论方法可得：

$$\psi_{s-}(u)=(1-\lambda_1t+o(t))(1-\lambda_2t+o(t))E[\psi_{s-}(Y(t))]+(1-\lambda_2t+o(t))$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}E\left(\int_0^{Y(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(t)-x)\mathrm{d}G^{*k}(x)+\int_{Y(t)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}\mathrm{d}G^{*k}(x)\right)(\alpha_1\rho_1^kt+A_k^1(t)o(t))+$$
$$(1-\lambda_1t+o(t))\sum_{k=1}^{\infty}E\left(\int_0^{Y(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(t)-y)\mathrm{d}F^{*k}(y)+\int_{Y(t)+\frac{c}{\delta}}^{\infty}\mathrm{d}F^{*k}(y)\right)$$
$$(\alpha_2\rho_2^kt+A_k^2(t)o(t))+o(t)$$

整理可得

$$(\lambda_1+\lambda_2)tE(\psi_{s-}(Y(t)))=E(\psi_{s-}(Y(t)))-\psi_{s-}(u)+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}E\left(\int_0^{Y(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(t)-x)g^{*k}(x)\mathrm{d}x+\overline{G^{*k}}\left(Y(t)+\frac{c}{\delta}\right)\right)\alpha_1\rho_1^kt+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}E\left(\int_0^{Y(t)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(t)-y)f^{*k}(y)\mathrm{d}y+\overline{F^{*k}}(Y(t)+\frac{c}{\delta})\right)\alpha_2\rho_2^kt+o(t) \tag{9}$$

在(9)式两边同时除以 t，令 $t\to 0$，同时利用(8)式则有(4)式成立.

在(4)式中，令 $u\to -\frac{c}{\delta}$，得边界条件(5)式中的第 2 式.

注 1　当 $\rho_i=0$ 时，$\alpha_i=\lambda_i$，$i=1,2$，(3),(4)式分别退化为文献[2]中的(3),(4)式.

定理 2　假设 $\psi_d(u)$ 是二次连续可微的，当 $u\geqslant 0$ 时，则 $\psi_d(u)$ 符合下面积分微分方程：

$$(\lambda_1+\lambda_2)\psi_{d+}(u)=c\psi'_{d+}(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''_{d+}(u)+\int_0^u\psi_{d+}(u-x)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+B_{d_1}(u)+$$
$$\int_0^u\psi_{d+}(u-y)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+B_{d_2}(u) \tag{10}$$

当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时, $\psi_d(u)$ 符合下面积分微分方程:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\psi_{d-}(u)=(u\delta+c)\psi'_{d-}(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''_{d-}(u)+\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-x)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+$$
$$\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y \tag{11}$$

边界条件为

$$\begin{cases}\psi_{d-}\left(-\frac{c}{\delta}\right)=1\\ \frac{1}{2}\sigma^2\psi''_{d-}\left(-\frac{c}{\delta}\right)=\lambda_1+\lambda_2\\ \lim\limits_{u\to\infty}\psi_{d+}(u)=0\end{cases} \tag{12}$$

其中

$$B_{d_1}(u)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-x)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x$$

$$B_{d_2}(u)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-y)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y,\ u\geqslant 0$$

证 类似于定理 1.

注 2 当 $\rho_i=0$ 时, $\alpha_i=\lambda_i$, $i=1,2$, (10),(11) 式分别退化为文献[2] 中的(10),(11) 式.

推论 1 在定理 1 和定理 2 的条件下, 当 $u>0$ 时, $\psi(u)$ 符合下面的积分微分方程:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\psi(u)=c\psi'(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''(u)+\int_0^u\psi(u-x)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+B_1(u)+$$
$$\int_0^u\psi(u-y)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+B_2(u) \tag{13}$$

当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时, 则 $\psi(u)$ 符合下面积分微分方程:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\psi(u)=(u\delta+c)\psi'(u)+\frac{1}{2}\sigma^2\psi''(u)+\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-x)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\overline{G^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_1\rho_1^k+\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-y)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{F^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_2\rho_2^k \tag{14}$$

边界条件为

$$\begin{cases}\psi_-\left(-\frac{c}{\delta}\right)=1\\ \frac{1}{2}\sigma^2\psi''_-\left(-\frac{c}{\delta}\right)=\lambda_1+\lambda_2-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_1\rho_1^k-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_2\rho_2^k\\ \lim\limits_{u\to\infty}\psi_+(u)=0\end{cases} \tag{15}$$

其中

$$B_1(u)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-x)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{G^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_1\rho_1^k$$

$$B_2(u)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-y)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{F^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_2\rho_2^k,\ u\geqslant 0$$

证

$$\psi_d(u)+\psi_s(u)=\psi(u),\ \psi'_d(u)+\psi'_s(u)=\psi'(u),\ \psi''_d(u)+\psi''_s(u)=\psi''(u)$$

因此，根据(3)式和(10)式得(13)式，根据(4)式和(11)式得(14)式，根据(5)式和(12)式得(15)式.

注 3　当 $\rho_i=0$ 时，$\alpha_i=\lambda_i$，$i=1,2$，(13),(14)及(15)式分别退化为文献[2]中的(13),(14)及(15)式.

定理 3　假设 $\psi_s(u,t)$ 对 u 是二次连续可微的，对 t 是一次连续可微的. 当 $u\geqslant 0$ 时，$\psi_s(u,t)$ 符合下面的偏微分积分方程：

$$\begin{aligned}(\lambda_1+\lambda_2)\psi_{s+}(u,t)=&c\frac{\partial\psi_{s+}(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{s+}(u,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{s+}(u,t)}{\partial u^2}+\\&\int_0^u\psi_{s+}(u-x,t)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+B_{s_1}(u,t)+\\&\int_0^u\psi_{s+}(u-y,t)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+B_{s_2}(u,t)\end{aligned}\tag{16}$$

当 $-\frac{c}{\delta}<u<0$ 时，则 $\psi_s(u,t)$ 符合下面积分微分方程：

$$\begin{aligned}&(u\delta+c)\frac{\partial\psi_{s-}(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{s-}(u,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{s-}(u,t)}{\partial u^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\psi_{s-}(u,t)=\\&-\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x,t)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{\infty}\overline{G^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_1\rho_1^k-\\&\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y,t)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y-\overline{F^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_2\rho_2^k\end{aligned}\tag{17}$$

边界条件为

$$\begin{cases}\psi_{s+}(+\infty,t)=0\\ \psi_s(u,+\infty)=\psi_s(u)\end{cases}\tag{18}$$

其中

$$B_{s_1}(u,t)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x,t)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{G^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_1\rho_1^k$$

$$B_{s_2}(u,t)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y,t)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{F^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_2\rho_2^k,\ u\geqslant 0$$

注 4　当 $\rho_i=0$ 时，$\alpha_i=\lambda_i$，$i=1,2$，(16),(17)式分别退化为文献[2]中的(23),(24)式.

证　当 $u\geqslant 0$ 时，令 $H(t)=u+ct+\sigma B(t)$，则 $H(0)=u$ 且 $\mathrm{d}H(\Delta)=c\,\mathrm{d}\Delta+\sigma\mathrm{d}B_\Delta$.

由伊藤积分公式有

$$\begin{aligned}\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)-\psi_{s+}(u,t)=&\int_0^\Delta\Bigg(c\frac{\partial\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial t}+\\&\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial u^2}\Bigg)\mathrm{d}x+\int_0^\Delta\sigma\frac{\partial\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial u}\mathrm{d}B_x\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}E[\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)]-\psi_{s+}(u,t)=&\int_0^\Delta\Bigg(c\,E\left[\frac{\partial\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial u}\right]+E\left[\frac{\partial\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial t}\right]+\\&\frac{1}{2}\sigma^2E\left[\frac{\partial^2\psi_{s+}(H(x),t-x)}{\partial u^2}\right]\Bigg)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{19}$$

在充分小的时间段(0, Δ]内，考虑(2)式定义的风险过程. 首先研究索赔引起的有限时破产概率 $\psi_s(u,t)$，

由全概公式整理可得

$$(\lambda_1+\lambda_2)\Delta E[\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)]=E[\psi_{s+}(H(\Delta),t-\Delta)]-\psi_{s+}(u,t)+\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\int_0^{H(\Delta)}\psi_{s+}(H(\Delta)-x,t-\Delta)g^{*k}(x)\mathrm{d}x+\int_{H(\Delta)}^{H(\Delta)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(\Delta)-x,t-\Delta)g^{*k}(x)\mathrm{d}x+\overline{G^{*k}}(H(\Delta)+\frac{c}{\delta})\right]\alpha_1\rho_1^k\Delta+\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\int_0^{H(\Delta)}\psi_{s+}(H(\Delta)-y,t-\Delta)f^{*k}(y)\mathrm{d}y+\int_{H(\Delta)}^{H(\Delta)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(H(\Delta)-y,t-\Delta)f^{*k}(y)\mathrm{d}x+\overline{F^{*k}}(H(\Delta)+\frac{c}{\delta})\right]\alpha_2\rho_2^k\Delta+o(\Delta) \tag{20}$$

在(20)式两边同时除以Δ,令$\Delta\to 0$,同时利用(19)式得(16)式.

当$-\frac{c}{\delta}<u<0$时,令$Y(t)=u\mathrm{e}^{\delta t}+ct+\sigma B_t$,则$Y(0)=u$及$\mathrm{d}Y(\Delta)=(u\delta\mathrm{e}^{\delta\Delta}+c)\mathrm{d}\Delta+\sigma\mathrm{d}B_\Delta$.

由伊藤积分公式可得

$$E[\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)]-\psi_{s-}(u,t)=\int_0^{\Delta}\left((u\delta\mathrm{e}^{\delta x}+c)E\left[\frac{\partial\psi_{s-}(Y(x),t-x)}{\partial u}\right]+E\left[\frac{\partial\psi_{s-}(Y(x),t-x)}{\partial t}\right]+\frac{1}{2}\sigma^2E\left[\frac{\partial^2\psi_{s-}(Y(x),t-x)}{\partial u^2}\right]\right)\mathrm{d}x \tag{21}$$

利用同$u\geqslant 0$时讨论的方法得

$$(\lambda_1+\lambda_2)\Delta E[\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)]=E[\psi_{s-}(Y(\Delta),t-\Delta)]-\psi_{s-}(u,t)+\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\int_0^{Y(\Delta)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(\Delta)-x,t-\Delta)g^{*k}(x)\mathrm{d}x+\overline{G^{*k}}(Y(\Delta)+\frac{c}{\delta})\right]\alpha_1\rho_1^k\Delta+\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\int_0^{Y(\Delta)+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(Y(\Delta)-y,t-\Delta)f^{*k}(y)\mathrm{d}y+\overline{F^{*k}}(Y(\Delta)+\frac{c}{\delta})\right]\alpha_2\rho_2^k\Delta+o(\Delta) \tag{22}$$

在(22)式两边同时除以Δ,令$\Delta\to 0$,同时利用(21)式得(17)式.

注5 $\frac{\partial\psi_s(u,t)}{\partial t}\Big|_{t=\infty}=0$,当$t\to\infty$时,(16)式即为(3)式,(17)式即为(4)式.

定理4 假设$\psi_d(u,t)$对u是二次连续可微的,对t是一次连续可微的. 当$u\geqslant 0$,$\psi_s(u,t)$符合下面的偏微分积分方程:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\psi_{d+}(u,t)=c\frac{\partial\psi_{d^+}(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{d^+}(u,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{d^+}(u,t)}{\partial u^2}+\int_0^u\psi_{d+}(u-x,t)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+B_{d_1}(u,t)+\int_0^u\psi_{d+}(u-y,t)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+B_{d_2}(u,t) \tag{23}$$

当$-\frac{c}{\delta}<u<0$时,则$\psi_d(u,t)$符合下面积分微分方程:

$$(u\delta+c)\frac{\partial\psi_{d-}(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi_{d-}(u,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi_{d-}(u,t)}{\partial u^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\psi_{d-}(u,t)=-\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-x,t)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x-\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-y,t)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y \tag{24}$$

边界条件为

$$\begin{cases}\psi_{d+}(+\infty,t)=0\\ \psi_d(u,+\infty)=\psi_d(u)\end{cases}$$

其中

$$B_{d_1}(u,t)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-x,t)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x$$

$$B_{d_2}(u,t)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{d-}(u-y,t)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y,\ u\geqslant 0$$

注 6　$\dfrac{\partial\psi_d(u,t)}{\partial t}\Big|_{t=\infty}=0$，当 $t\to\infty$ 时，(23) 式即为(10) 式，(24) 式即为(11) 式.

注 7　当 $\rho_i=0$ 时，$\alpha_i=\lambda_i$，$i=1,2$，(23)，(24) 式分别退化为文献[2] 中的(30)，(31) 式.

推论 2　在定理 3 和定理 4 条件下，当 $u\geqslant 0$，$\psi(u,t)$ 符合下面的偏微分积分方程：

$$(\lambda_1+\lambda_2)\psi(u,t)=c\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi(u,t)}{\partial u^2}+\int_0^u\psi(u-x,t)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+$$

$$B_1(u,t)+\int_0^u\psi(u-y,t)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+B_2(u,t)\tag{25}$$

当 $-\dfrac{c}{\delta}<u<0$ 时，则 $\psi(u,t)$ 符合下面积分微分方程：

$$(u\delta+c)\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi(u,t)}{\partial u^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\psi(u,t)=$$

$$-\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-x,t)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{\infty}\overline{G^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_1\rho_1^k-$$

$$\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\psi(u-y,t)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y-\overline{F^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_2\rho_2^k\tag{26}$$

边界条件为

$$\begin{cases}\psi(+\infty,t)=0\\ \psi(u,+\infty)=\psi(u)\end{cases}$$

其中

$$B_1(u,t)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-x,t)g_{\rho_1}(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{G^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_1\rho_1^k$$

$$B_2(u,t)=\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}\psi_{s-}(u-y,t)f_{\rho_2}(y)\mathrm{d}y+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{F^{*k}}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\alpha_2\rho_2^k,\ u\geqslant 0$$

注 8　$\dfrac{\partial\psi(u,t)}{\partial t}\Big|_{t=\infty}=0$，当 $t\to\infty$ 时，(25) 式即为(13) 式，(26) 式即为(14) 式.

注 9　当 $\rho_i=0$ 时，$\alpha_i=\lambda_i$，$i=1,2$，(25)，(26) 式分别退化为文献[2] 中的(32)，(33) 式.

参考文献：

[1] CAI J，YANG H. Ruin in the Perturbed Compound Poisson Risk Process under Interest Force [J]. Advances in Applied Probability，2005，37(3)：819-835.

[2] 魏广华，高启兵，刘国祥，等. 带借贷利率及干扰的双到达过程风险模型 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(9)：82-93.

[3] 毛泽春，刘锦萼. 索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型及破产概率 [J]. 应用数学学报，2005，28(3)：419-428.

[4] 熊双平. 索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的常利率风险模型 [J]. 经济数学，2006，23(1)：15-18.

[5] 甘　柳，晏小兵，彭朝晖. 一类常利率下的复合 Poisson-Geometric 过程风险模型 [J]. 数学理论与应用，2010，30(1)：62-66.

[6] 魏广华，高启兵，刘国祥．常利力下双复合 Poisson 风险过程的生存概率 [J]．南京师大学报(自然科学版)，2013，36(2)：27-30，38.
[7] 魏广华，高启兵．常利力下双复合泊松风险模型破产概率的上界 [J]．南京师大学报(自然科学版)，2009，32(1)：30-34.
[8] 覃东君，李俊平，刘志峰，等．双到达过程带索赔成本风险模型的破产概率 [J]．数学理论与应用，2011，31(2)：110-114.
[9] CAI J，YANG H. On the Decomposition of the Absolute Ruin Probability in a Perturbed Compound Poisson Surplus Process with Debit Interest [J]. Annals of Operations Research，2014，212(1)：61-77.
[10] 魏广华，高启兵，王晓谦．常利力下带干扰的双复合 Poisson 风险过程的生存概率 [J]．应用概率统计，2012，28(1)：31-42.
[11] 魏广华，袁明霞，王丙均，等．随机利率下数字幂型期权的定价 [J]．西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(12)：55-60.

A Perturbed Double Compound Poisson-Geometric Risk Process Model with Debit Interest

WANG Yue-ming[1]， WEI Guang-hua[2]， GUO Nan[1]， GAO Yan-yan[1]

1. Department of Mathematics and Physics，Nanjing Institute of Technology，Nanjing 211167，China；
2. School of Science，Jinling Institute of Technology，Nanjing 211169，China

Abstract：In this paper，we consider a risk model which is a perturbed double compound Poisson-Geometric process with debit interest. We obtain the Integro-differential equation for infinite time ruin probability and then derive the integral partial differential equation for finite time ruin probability by total expectation formula，differential calculus，Ito formula and other knowledge and the causes of ruin.

Key words：debit；compound Poisson-Geometric process；Brown motion；ruin probability；integro-differential equation；integral partial differential equation

责任编辑 张 枸